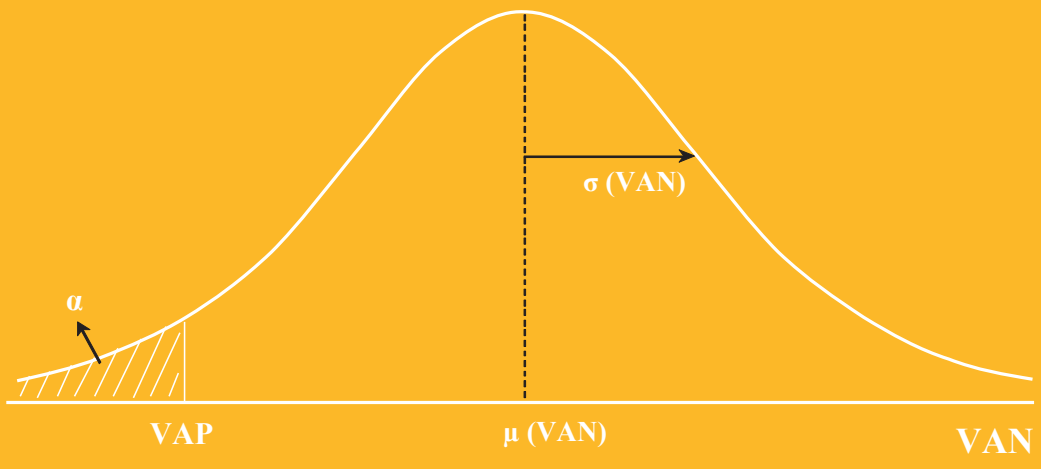
Fernando Gómez-Bezares,
José Antonio Madariaga
y Javier Santibáñez (eds.)

Penalización lineal por riesgo en finanzas

Valor Actualizado Penalizado (VAP) y Tasa de Rentabilidad Interna Penalizada (TRIP)



Deusto

Economía

Penalización lineal por riesgo en finanzas: Valor Actualizado Penalizado (VAP) y Tasa de Rentabilidad Interna Penalizada (TRIP)

Linear risk penalization in finance: Penalized Present Value (PPV) and Penalized Internal Rate of Return (PIRR)

Fernando Gómez-Bezares, José Antonio Madariaga y Javier Santibáñez (editores)

Deusto Business School

A la Universidad Comercial de Deusto, hoy Deusto Business School, en cuyo ambiente se desarrollaron los trabajos que forman este volumen

Queremos mostrar nuestro agradecimiento a las revistas Análisis Financiero, Análisis Financiero Internacional, Boletín de Estudios Económicos, Cogent Economics and Finance, Ekonomiaz, Estudios Empresariales y Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa, así como a la Editorial Desclée de Brouwer, por las facilidades que nos han dado para publicar esta compilación

Por la misma razón, queremos también agradecer su generosidad al resto de autores que participaron en algunos de los artículos incluidos en ella: Amaia Apraiz, Leyre Goitia-Berriozabal, Fernando R. Gómez-Bezares y Jon Paul Laka

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

© Publicaciones de la Universidad de Deusto
Apartado 1 - E48080 Bilbao
Correo electrónico: publicaciones@deusto.es

ISBN: 978-84-1325-189-9

ÍNDICE

ÍNDICE iii

INTRODUCCIÓN v

1. ALGUNOS MODELOS BÁSICOS PARA LA SELECCIÓN DE INVERSIONES CON FLUJOS RELACIONADOS 1
por F. Gómez-Bezares

2. LA INVERSIÓN EN CONDICIONES DE RIESGO (Las decisiones financieras en la práctica, Capítulo 6) 13
por F. Gómez-Bezares

3. PENALIZACIÓN DE LAS DECISIONES DE INVERSIÓN EN FUNCIÓN DEL RIESGO 23
por F. Gómez-Bezares

4. CRITERIOS DE SELECCIÓN DE INVERSIONES CON RIESGO (Un análisis parcial) 37
por F. Gómez-Bezares

5. VALOR ACTUALIZADO PENALIZADO (Dirección Financiera, Capítulo X) 65
por F. Gómez-Bezares

6. EL TRATAMIENTO DEL RIESGO EN LA DECISIÓN DE INVERSIÓN: VAP y distribuciones no conocidas 79
por Javier Santibáñez Grúber

7. ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE EL VALOR ACTUALIZADO PENALIZADO (VAP) 99
por J.P. Laka y J. Santibáñez

8. LA DECISIÓN DE INVERSIÓN EN ENTORNOS DE RIESGO 113
por F. Gómez-Bezares, J. A. Madariaga y J. Santibáñez

9. MEDIDAS DE *PERFORMANCE*: ALGUNOS ÍNDICES CLÁSICOS Y RELACIÓN DE LA TRIP CON LA TEORÍA DE CARTERA 141
por F. Gómez-Bezares, J. A. Madariaga y J. Santibáñez

10. *PERFORMANCE* AJUSTADA AL RIESGO: ÍNDICES CLÁSICOS Y NUEVAS MEDIDAS 193
por F. Gómez-Bezares, J. A. Madariaga y J. Santibáñez

11. ÍNDICES DE *PERFORMANCE*, GESTIÓN ACTIVA Y EFICIENCIA. UN ANÁLISIS EMPÍRICO 213
por F. Gómez-Bezares, J. A. Madariaga, J. Santibáñez y A. Apraiz

12. ÍNDICES DE *PERFORMANCE*, GESTIÓN ACTIVA Y EFICIENCIA. UN ANÁLISIS DE SENSITIVIDAD Y DEL FENÓMENO DE LA PERSISTENCIA 243
por F. Gómez-Bezares, J. A. Madariaga, J. Santibáñez y A. Apraiz

13. VALORACIÓN EN TIEMPOS DE CRISIS 267
por F. Gómez-Bezares

14. DON'T USE QUOTIENTS TO CALCULATE PERFORMANCE..... 277
por F. Gómez-Bezares and F.R. Gómez-Bezares

15. COSTE DE LOS FONDOS APLICABLE A PROYECTOS DE INVERSIÓN: UNA APROXIMACIÓN A TRAVÉS DEL VAP..... 295
por J. Santibáñez

16. VALOR ACTUALIZADO PENALIZADO: PENALIZACIÓN LINEAL POR TRAMOS 317
por J. Santibáñez, F. Gómez-Bezares y J.A. Madariaga

17. ESTRUCTURA FINANCIERA Y CREACIÓN DE VALOR: UNA APROXIMACIÓN A TRAVÉS DE LA TRIP..... 343
por J. Santibáñez, L. Goitia-Berriozabal y J.A. Madariaga

18. ÁRBOLES DE DECISIÓN Y VAN PENALIZADO (Una alternativa a la valoración por opciones reales) 365
por F. Gómez-Bezares, J. A. Madariaga y J. Santibáñez

19. OPCIONES REALES Y PENALIZACIÓN LINEAL PARA VALORAR INVERSIONES 379
por F. Gómez-Bezares, J. A. Madariaga y J. Santibáñez

INTRODUCCIÓN

El tratamiento del riesgo ha sido un tema fundamental en las modernas finanzas, que aparecen en los años cincuenta del siglo XX. Nosotros hemos bebido, entre otros, de autores como Markowitz, Modigliani y Miller, Sharpe o Fama, conocidos premios Nobel de economía que hacen sus aportaciones fundamentales en este campo en el tercer cuarto del siglo.

El riesgo en finanzas se entiende como variabilidad: no hay un resultado cierto sino una dispersión de resultados posibles. Así nuestras decisiones son más arriesgadas cuanto más se alejan unos potenciales resultados de otros. Además, si hemos adquirido suficiente conocimiento sobre el tema objeto de la decisión, podremos ser capaces de asignar probabilidades a las diferentes posibilidades; esto es lo que normalmente denominamos ambiente de riesgo.

Los seres humanos actuamos como enemigos del riesgo: si alguien nos ofrece apostar la única vivienda que poseemos a cara o cruz, con la posibilidad de perderla en el 50% de los casos, o de tener dos en el otro 50%, una persona con una renta media no aceptará el juego, pues puede quedarse sin su casa. Es cierto que también puede encontrarse con una segunda vivienda, lo que le viene bien, para venderla o para disfrutarla, pero la ventaja que supone la segunda vivienda no puede compararse con el quebranto que acarrea la pérdida del hogar.

Para aceptar un riesgo exigimos un premio, o lo que es lo mismo, hemos de penalizar el resultado esperado de una decisión arriesgada para hacerlo comparable al resultado de una decisión sin riesgo. Metiéndonos ya en el campo de la inversión, las inversiones han de ser penalizadas en función de su riesgo: las más arriesgadas deben penalizarse más, para luego poder compararlas con otras y tomar una decisión. Hay diversos métodos de penalización, como hay diferentes maneras de medir el riesgo, tal como se ve en los artículos de esta antología.

Este libro defiende una apuesta por la penalización lineal, es lo que hacen el Valor Actualizado Penalizado (VAP) y la Tasa de Rentabilidad Interna Penalizada (TRIP). En la práctica se usan diferentes formas de penalización, como la penalización por cociente (es lo que hace, por ejemplo, el popular índice de Sharpe), pero esta forma de penalización tiene, por lo menos, una debilidad importante (en el caso del índice de Sharpe, este se dispara cuando la desviación estándar es muy pequeña). La penalización lineal evita esos problemas, como explicamos y comprobamos en algunos artículos de este volumen. Es cierto que la penalización lineal tiene también algunas limitaciones, como el hecho de que algunas veces da la impresión de que no penaliza lo suficiente para riesgos altos (es lo que le pasa al α de Jensen, que también usa penalización lineal). También veremos estudios para resolver esto.

El VAP y la TRIP tratan de obtener un mínimo garantizado (con una determinada probabilidad) que asimilamos a un equivalente cierto, y que usamos como valor para tomar decisiones. Ambos criterios son fáciles de calcular, lo que les otorga una gran practicidad. Desde el punto de vista de la microeconomía, su linealidad equivale a utilizar rectas de indiferencia, tema que puede ser revisado como veremos en algún artículo.

El sustraer *t* desviaciones estándar de la esperanza matemática como criterio de decisión (en eso consiste básicamente nuestra penalización lineal) significa juzgar una decisión arriesgada por su resultado medio menos su riesgo (multiplicado por determinada cantidad): es la media menos una medida de variabilidad (penalizamos la media de manera lineal). El VAP y la TRIP así calculados son fáciles de interpretar y utilizar, lo que es otra ventaja para su uso.

Animamos al lector, en consecuencia, a leer algunos de los artículos de este libro, hojear otros, o tal vez leer todos. Cada artículo se concibió como una publicación independiente y tiene sentido por sí mismo (esto podría ser matizado en el caso de los dos capítulos de libro que se incluyen), pero los hay más complicados y menos, también resultarán más o menos asequibles según la formación previa del lector. Los hemos ordenado cronológicamente, para que se pueda ver cómo se han ido enriqueciendo los conceptos (aunque la fecha de publicación a veces se haya retrasado bastante respecto a la de redacción). El primer artículo y el tercero (comunicaciones en congresos) pueden resultar más difíciles de leer, a pesar de estar al principio. Los artículos están en castellano y uno en inglés, y algunos (los más antiguos) hemos tenido que volverlos a mecanografiar, por lo que puede habérsenos escapado alguna errata. También puede haber alguna pequeña diferencia entre la versión aquí recogida y la publicada con anterioridad.

Este libro tiene como objetivo recoger un amplio conjunto de artículos sobre la idea del VAP (y su corolario la TRIP), desarrollados desde hace cuarenta años en nuestro departamento de finanzas de Deusto Business School. De esta manera ponemos a disposición de todas las personas interesadas unos trabajos que creemos que pueden ser útiles. Hemos hecho una selección, podríamos incluir otros más, pero entendemos que los seleccionados dan una idea completa del tema. Confiamos en que los lectores aprecien con su interés el trabajo de edición de este volumen, pero, sobre todo, encuentren provecho en el estudio de algunos o todos los artículos que lo componen. La penalización lineal es, en nuestra opinión, una buena idea, que puede complementar adecuadamente otras formas de penalización por riesgo.

Otros artículos interesantes que tratan el tema del VAP y/o la TRIP, pero que por diferentes motivos no se han incluido en esta selección son:

GÓMEZ-BEZARES, F. (1993): "Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions", en AGGARWAL, R., ed., *Capital budgeting under uncertainty*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, págs. 91-102.

FERRUZ, L., F. GÓMEZ-BEZARES y M. VARGAS (2009): "Performance measures: advantages of linear risk penalization", *Applied Financial Economics*, 19: 1, págs. 73-85.

GÓMEZ-BEZARES, F. y F. R. GÓMEZ-BEZARES (2012): "Classic performance indexes revisited: axiomatic and applications", *Applied Economics Letters*, vol. 19, págs. 467-470.

GÓMEZ-BEZARES, F. y F. R. GÓMEZ-BEZARES (2022): "An analysis of risk treatment in the field of finance", en LEE, C.-F. y A.C. LEE, eds., *Encyclopedia of finance*, Springer, Suiza, 3ª ed., vol. 2, págs. 1397-1409.

El lector interesado puede acudir a los mismos.

Esperamos que el esfuerzo realizado en la edición de esta obra, sea útil para la comunidad académica y para los profesionales.

Los editores

Universidad de Deusto, Bilbao, España, 2023

INTRODUCTION

The treatment of risk has been a fundamental topic in modern finance, which appeared in the fifties of the twentieth century. We have drawn, among others, from authors such as Markowitz, Modigliani and Miller, Sharpe and Fama, well-known Nobel Prize winners in Economics who made their main contributions in this field in the third quarter of the century.

Risk in finance is understood as variability: there is no certain outcome but a dispersion of possible ones. Thus our decisions are riskier the further apart some potential outcomes are from others. Moreover, if we have acquired sufficient knowledge about the subject matter of the decision, we may be able to assign probabilities to the different posible alternatives; this is what we usually refer to as the risk environment.

Human beings act as “risk-averse”: if someone offers to bet the only house we own on heads or tails, with the possibility of losing it in 50% of the cases, or having two in the other 50%, a person with an average income will not accept the game, as he may lose his house. It is true that they may also find themselves with a second house, which is good for them, either to sell or to enjoy, but the advantage of a second house cannot be compared to the loss of a home.

In order to accept a risk we demand a premium, in other words, we have to penalise the expected outcome of a risky decision in order to make it comparable to the outcome of a risk-free one. Moving into the field of investment, investments should be penalised according to their risk: riskier investments should be penalised more, so that they can then be compared with others and a decision can be made. There are different methods of penalisation, just as there are different ways of measuring risk, as can be seen in the papers in this anthology.

This book argues for a commitment to linear penalisation, which is what the Penalised Present Value (PPV) and the Penalised Internal Rate of Return (PIRR) do. In practice, different ways of penalizing are used, such as the ratio penalty (this is what the popular Sharpe ratio does, for example), but this form of penalty has at least one major weakness (in the case of the Sharpe ratio, it triggers when the standard deviation is very small). The linear penalty avoids these problems, as we explain and test in some of the papers in this volume. It is true that the linear penalty also has some limitations, such as the fact that it sometimes gives the impression that it does not penalise enough for high risks (this is what happens to Jensen's α, which also uses linear penalisation). We will also look at studies to address this.

PPV and PIRR try to obtain a guaranteed minimum (with a certain probability) that we assimilate to a certain equivalent, and that we use as a value to make decisions. Both criteria are easy to calculate, which makes them very practical. From the point of view of microeconomics,

their linearity is equivalent to using indifference lines, a subject that can be reviewed as can be seen in some papers of this anthology.

Subtracting *t* standard deviations from the expected value as a decision criterion (this is basically our linear penalty) means judging a risky decision by its mean outcome minus its risk (multiplied by a certain amount): it is the mean minus a measure of variability (we penalise the mean in a linear way). PPV and PIRR calculated in this way are easy to interpret and use, which is another advantage for their use.

We encourage the reader, therefore, to read some of the papers in this book, skim others, or perhaps read them all. Each paper was conceived as a stand-alone publication and makes sense on its own (this could be qualified in the case of the two book chapters that are included), but there are more complicated papers and less complicated ones, which will also be more or less accessible depending on the reader's background. We have ordered them chronologically, so that it is possible to see how the concepts have been enriched (although the date of publication has sometimes lagged a long way behind the date of writing). The first and third papers (conference papers) may be more difficult to read, despite being at the beginning. The papers are in Spanish and one in English, and some (the older ones) have had to be retyped, so we may have missed some typos. There may also be some slight differences between the version here and the version published previously.

The purpose of this book is to bring together a wide range of papers on the idea of PPV (and its corollary, PIRR), developed over the last forty years in our Department of Finance at Deusto Business School. In this way, we are making available to all those interested works that we believe may be useful. We have made a selection, we could include more, but we believe that those selected give a complete idea of the subject. We hope that readers will appreciate the work of editing this volume, but, above all, that they will find it useful to study some or all of the papers that comprise it. The linear penalty is, in our view, a good idea, which can adequately complement other forms of risk penalty.

Other interesting papers that deal with PPV and/or PIRR, but for various reasons have not been included in this selection are:

GÓMEZ-BEZARES, F. (1993): "Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions", in AGGARWAL, R., ed., *Capital budgeting under uncertainty*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, pp. 91-102.

FERRUZ, L., F. GÓMEZ-BEZARES and M. VARGAS (2009): "Performance measures: advantages of linear risk penalization", *Applied Financial Economics*, 19: 1, pp. 73-85.

GÓMEZ-BEZARES, F. and F. R. GÓMEZ-BEZARES (2012): "Classic performance indexes revisited: axiomatic and applications", *Applied Economics Letters*, vol. 19, pp. 467-470.

GÓMEZ-BEZARES, F. and F. R. GÓMEZ-BEZARES (2022): "An analysis of risk treatment in the field of finance", in LEE, C.-F. y A.C. LEE, eds., *Encyclopedia of finance*, Springer, Switzerland, 3ª ed., vol. 2, pp. 1397-1409.

The interested reader is welcome to consult them.

We hope that the effort made in publishing this work will be useful to the academic community and to professionals.

The editors

University of Deusto, Bilbao, Spain, 2023

ALGUNOS MODELOS BÁSICOS PARA LA SELECCIÓN DE INVERSIONES CON FLUJOS RELACIONADOS

por Fernando Gómez-Bezares
Publicado en las Actas del *XIV Congreso de la SEIO*, Caja de Ahorros de Granada, Granada, 1984, vol. 1, págs. 40-51

RESUMEN

En los problemas de selección de inversiones con riesgo es muy normal la aparición de flujos relacionados. Bastante frecuente es la existencia de relación entre los flujos de los distintos años de vida de un proyecto. En este trabajo se presentan algunos modelos que intentan aproximarse a la solución del problema de forma operativa. La simulación y distintas formas de programación matemática pueden resultar muy eficaces en estos casos.

Clasificación AMS – 90 B99

Palabras Clave: Inversión, Riesgo, Flujos relacionados, Modelos, Simulación, Programación matemática.

1-INTRODUCCIÓN

A la hora de proceder a la selección de una serie de inversiones posibles nos encontramos, en primer lugar, con la existencia de diferentes criterios aplicables como son el "valor actualizado neto" (VAN), la "tasa de rentabilidad interna" (TRI), etc., pudiendo consultarse a este respecto obras como las de Weston y Brigham (1977), Van Horne (1980), etc. No vamos a entrar aquí en la discusión de lo que aportan los distintos criterios, tema que ya ha sido exhaustivamente estudiado, y aceptaremos que, en general, la técnica del VAN es la más interesante. Si denominamos D al desembolso inicial necesario para la nueva inversión y A_t a los flujos monetarios que de ella se derivarán en los distintos años de vida del proyecto, siendo k la tasa de actualización (normalmente el coste del dinero), tendremos en la fórmula (1) el VAN correspondiente:

$$VAN = -D + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{A_t}{(1+k)^t} \quad (1)$$

Para el cálculo de un VAN son necesarios, en consecuencia, los siguientes datos: D, n, k y las A_t; todos estos datos pueden conocerse perfectamente (situación de certeza), conocerse sus distribuciones de probabilidad (situación de riesgo) o no conocerse en absoluto (situación de incertidumbre). En la práctica, rara vez los datos son absolutamente ciertos y es bastante normal conocer algo sobre las distribuciones de las variables que les afectan; nosotros vamos a suponer que estamos en ese caso, pero dando como suficientemente seguros los datos D, n y k, con lo que quedan como variables las A_t. En esta situación yo puedo conocer directamente las distribuciones de las A_t o las de las variables que las determinan. En cualquier caso podremos, bien de forma analítica, bien mediante simulación, obtener la distribución de probabilidad del VAN.

Podemos preguntarnos cuál es la causa del interés en obtener esa distribución, o al menos, conocer su esperanza matemática y su desviación típica, no conformándonos sólo con la primera. La razón es que los inversores se comportan con aversión al riesgo y exigen esperanzas matemáticas de VAN crecientes conforme crece su riesgo. Markowitz (1959) estableció unas curvas de indiferencia para los inversores en bolsa con esperanzas matemáticas y desviaciones típicas de rendimientos, que fácilmente podemos adaptar a valores actualizados netos de las inversiones (figura 1).

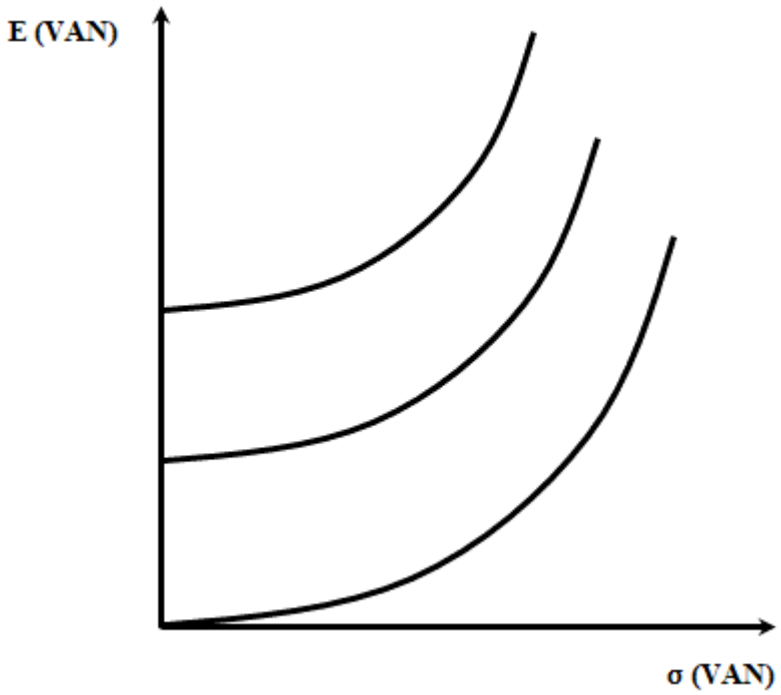


Figura 1

En el caso de que conozcamos las distribuciones de probabilidad podemos convertir las unidades monetarias en unidades útiles y operar con ellas. Todo esto lo trataremos en la última

parte de este trabajo y lo enuncio aquí únicamente al objeto de justificar el interés de conocer las distribuciones citadas, o al menos, sus promedios y desviaciones.

El cálculo del promedio y varianza del VAN ha sido tratado por distintos autores, destacando los supuestos de Hillier (1963), donde se estudian algunos casos de relación entre los flujos de distintos años, y el modelo de Hertz (1964) donde se aplica el método de simulación. En este trabajo trataremos de seguir avanzando por este camino, sin pretender hacer un modelo teórico de gran perfección, sino más bien modelos sencillos de fácil aplicación práctica en la realidad empresarial.

Antes de terminar esta introducción quiero dejar patente mi agradecimiento al P. Chacón por las interesantes puntualizaciones que me ha hecho y al Prof. Cubas, director del centro de cálculo de la facultad, sin cuya ayuda parte de este trabajo no se hubiera podido concluir. También a los Profs. Narvaiza y Ugarte, que me han ayudado a repasar distintos supuestos.

2-PLANTEAMIENTO BASE

Para efectuar una selección de inversiones podemos partir de distintas variables; así podemos conocer directamente los flujos monetarios previstos para los n años de vida, o bien las variables que los determinan, como ventas, costes, etc. En el modelo con riesgo sucede algo similar y puedo conocer las distribuciones de probabilidad de los primeros o de las segundas, pudiendo así llegar a la distribución del VAN. Como ya hemos comentado Hertz trató este problema mediante simulación, pero en su trabajo el planteamiento de las relaciones entre variables fue un tanto parcial. Nuestro objetivo será dar otro enfoque al problema. Nosotros supondremos la existencia de relaciones entre los flujos monetarios de los distintos años, no siendo difícil su generalización con las variables que los determinan.

Siguiendo la nomenclatura de la fórmula (1), puedo suponer la existencia de una relación entre los flujos de tipo general (2), que normalmente consideraremos lineal:

$$A_t = f\,(A_{t-1}\,,\, A_{t-2}\,,\, \ldots) + \varepsilon \qquad (2)$$

Teóricamente se puede intentar estimar la función aplicando técnicas de análisis de series temporales. Supuesta esa función, no es difícil utilizar procedimientos estadísticos para, partiendo de unas distribuciones iniciales, llegar a la distribución del VAN.

Sin embargo, en la práctica, esto es imposible la mayoría de las veces, dado que se carece de datos históricos que nos permitan estimar la función. Tengamos en cuenta que ante una nueva inversión rara vez se posee esa información. A lo más que se puede aspirar normalmente es a una estimación subjetiva del comportamiento de las variables en el futuro. En ese campo nos moveremos en el próximo punto.

3-MODELOS PRÁCTICOS DE RELACIÓN TEMPORAL

Vamos a intentar construir algunos modelos posibles de relación entre los flujos monetarios de los distintos años. Dado que su estimación ha de ser subjetiva, buscaremos siempre la máxima sencillez, al objeto de que el experto pueda dar valores a los coeficientes y suponer las distribuciones de las variables con la mayor comodidad posible. Partiremos de una relación como la (3), y dentro de ella, estudiaremos algunos modelos "tipo", suponiendo en todo caso que A_0 es un valor dado. Las A_t serán las variables aleatorias que nos permitirán, con la fórmula (1), calcular la distribución del VAN.

$$A_t = f(A_{t-1}) \tag{3}$$

Veamos los distintos modelos:

a) Supongamos que el flujo de un año es igual al del año anterior, más una variable de azar; así, tendremos:

$$A_t = (A_{t-1}) + \varepsilon_t \tag{4}$$

suponiendo, además, que:

$$\varepsilon_t \rightarrow N(0 ; \sigma^2_{\varepsilon_t})$$
$$\varepsilon_i \text{ y } \varepsilon_j \text{ son independientes}$$

en estas condiciones es fácil demostrar que:

$$E(A_t) = A_0$$
$$VAR(A_t) = \sum_{i=1}^{i=t} \sigma^2_{\varepsilon i}$$
$$\text{para } N<M \rightarrow COV(A_N , A_M) = \sum_{i=1}^{i=N} \sigma^2_{\varepsilon i}$$
$$\rho^2_{NM} = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} \sigma^2_{\varepsilon i}}{\sum_{i=1}^{i=M} \sigma^2_{\varepsilon i}} \tag{5}$$

y aplicando la fórmula (1), se puede deducir que:

$$VAN \rightarrow N\left(-D + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{A_0}{(1+k)^t} \; ; \; \sum_{i=1}^{i=n} \left(\sum_{t=i}^{t=n} \frac{1}{(1+k)^t} \right)^2 \cdot \sigma^2_{\varepsilon i} \right) \tag{6}$$

Si las ε_t no fueran normales el conjunto de las fórmulas (5) quedaría igual y el VAN de la fórmula (6) mantendría el mismo promedio y varianza, pero sería asintóticamente normal. En algunos casos puede ser interesante simular, pero será bastante inusual.

Este modelo, a pesar de su sencillez, puede resultar bastante realista. Los coeficientes de correlación de un año con el siguiente van creciendo normalmente, cosa bastante lógica visto desde hoy, pues su parte común también crece. Sin embargo, una primera crítica que se nos ocurre es que la magnitud del azar debiera ser proporcional al flujo monetario al que se suma; esto lo veremos en el siguiente modelo.

b) Supongamos que el flujo de un año es igual al del año anterior, más una proporción aleatoria del mismo:

$$A_t = A_{t-1} + A_{t-1} \cdot \varepsilon_t = A_{t-1}\,(1 + \varepsilon_t) \tag{7}$$

suponiendo, además, que:

$$E\,(\varepsilon_i) = 0$$
$$\varepsilon_i \text{ y } \varepsilon_j \text{ son independientes}$$

en estas condiciones se puede demostrar que:

$$E\,(A_t) = A_0$$
$$VAR\,(A_t) = A_0^2 \cdot VAR\left[\prod_{i=1}^{i=t}(1+\varepsilon_i)\right] = A_0^2 \cdot \left[\prod_{i=1}^{i=t}(1+\sigma_{\varepsilon i}^2) - 1\right]$$
$$\text{para } N<M \;\rightarrow\; COV\,(A_N, A_M) = A_0^2 \cdot VAR\left[\prod_{i=1}^{i=N}(1+\varepsilon_i)\right] = VAR\,(A_N)$$
$$\rho_{NM}^2 = \frac{VAR\,(A_N)}{VAR\,(A_M)} \tag{8}$$

Y aplicando la fórmula (1) vemos que el VAN será asintóticamente normal y podemos deducir que:

$$E\,(VAN) = -D + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{A_0}{(1+k)^t}$$
$$VAR\,(VAN) = A_0^2 \sum_{t=1}^{t=n} \frac{\prod_{i=1}^{t}(1+\sigma_{\varepsilon i}^2) - 1}{(1+k)^t} \left[\frac{1}{(1+k)^t} + 2\sum_{l=t+1}^{l=n}\frac{1}{(1+k)^l}\right] \tag{9}$$

Una posible ampliación a este modelo sería considerar el azar como descomponible en dos factores aditivos, por un lado, un azar controlado y previsto por la dirección, X_t, y por otro el azar imprevisible ε_t. Esto daría lugar al siguiente modelo.

c) Supongamos que el flujo de un año es igual al del año anterior, más dos proporciones aleatorias del mismo:

$$A_t = A_{t-1} \cdot (1 + X_t + \varepsilon_t) \tag{10}$$

Podemos suponer además:

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

ε y X son todas variables independientes

En estas condiciones el modelo se complica bastante en cuanto a sus fórmulas. Evidentemente, tanto este modelo como otros más complicados que se pueden plantear pueden ser resueltos mediante simulación por el método de Montecarlo, por lo que comentaremos en el punto siguiente la forma de plantearlo en el ordenador.

4-APLICACIÓN EN EL ORDENADOR

Dado que para distintas situaciones pueden ser aplicados distintos modelos prácticos de flujos con relación temporal, hemos considerado interesante desarrollar un programa de ordenador que pueda resolver cualquier tipo de modelo. Para ello, en centro de cálculo de nuestra facultad se ha desarrollado un programa principal en el cual se puede definir cualquier modelo matemático dentro del tipo de los descritos en este trabajo, con sus variables y relaciones.

El programa genera las tablas de las variables aleatorias definidas y pasamos a la explotación del modelo, repitiendo las veces que el usuario desee el siguiente proceso: mediante subrutinas se generan los valores aleatorios de las variables y se aplican al modelo matemático, reservando los valores que el usuario desee. Al acabar el proceso se presentan las variables reservadas en forma de histograma con sus estadísticos característicos.

El programa ha sido desarrollado en Fortran IV en un ordenador Secoinsa S-40.

Este programa lo hemos aplicado a una gran diversidad de supuestos prácticos y en concreto vamos a dar aquí los resultados de un ejemplo.

Una empresa dedicada a la fabricación de pequeños aparatos electrodomésticos está pensando en preparar una de sus líneas para la producción de una cafetera doméstica de interesantes cualidades. El desembolso inicial será de 1.000.000 de pesetas, esperándose en principio unos flujos incrementales cada año de 500.000 pesetas. La vida comercial del aparato será de tres años, momento en el que será sustituido por otro más moderno. Sobre el flujo incremental base, la dirección estima que el primer año se conseguirán unos incrementos:

Mínimo	Moda	Máximo	
-0,2	0,10	0,25	$-X_1-$

para el resto de los años, se esperan los siguientes incrementos sobre los resultados del año anterior:

	Mínimo	Moda	Máximo	
Año 2	-0,15	0,20	0,40	$-X_2-$
Año 3	-0,20	0,05	0,20	$-X_3-$

Supondremos que este planteamiento se adapta a distribuciones β incompleta del tipo (3+α), (3-α).

Por otro lado, existen una serie de hechos incontrolables que se supone influirán como una proporción del flujo del año anterior. Esa variable, ε_i, vamos a suponerla normal, de promedio uno y con varianzas crecientes en un 5%:

$$\sigma^2_{\varepsilon 1} = 0{,}02$$
$$\sigma^2_{\varepsilon 2} = 0{,}021$$
$$\sigma^2_{\varepsilon 3} = 0{,}02205$$

En estas condiciones, el modelo sería:

$$A_t = A_{t-1}\,(1 + X_t + \varepsilon_t) \qquad (11)$$

Los resultados, para K=0,1, tras veinte mil simulaciones fueron:

E (VAN) = 505,508
VAR (VAN) = 83.614,08392

Aparte de otros valores y gráficos que no reproducimos aquí.

5- LA PROGRAMACIÓN

Para valorar una inversión en una situación de riesgo hemos comentado el interés de conocer su VAN medio y su varianza. Evidentemente, es mejor si conocemos toda la distribución del VAN, cosa que algunas veces es posible conseguir por procedimientos analíticos, pero que en la mayoría de las ocasiones se aproximan mediante simulación. Para valorar esa inversión, lo ideal sería razonar en todo momento en unidades útiles, pero eso suele ser enormemente teórico. Por ello, se utilizan aproximaciones, que supuesta una aversión al riesgo, valoran la inversión según su promedio de VAN, con una determinada penalización por su varianza.

Cuando me encuentro ante un conjunto de inversiones y quiero seleccionar las más interesantes, supuestas unas limitaciones presupuestarias, muchos autores, partiendo de Lorie y Savage, Weingartner, etc., han planteado la posibilidad de utilizar la programación lineal, o en

general, cualquier tipo de programación matemática. Ante la existencia de riesgo pudiera utilizarse la programación con unidades útiles. Una aproximación interesante puede ser, como antes comentábamos, penalizar los promedios de VAN en función de sus varianzas. Existen, por supuesto, distintos modelos posibles; propondremos algunos:

$$Z = \mu_{VAN} - t \cdot \sigma_{VAN} \tag{12}$$

$$Z = \mu_{VAN} - \sigma_{VAN}^{t} \tag{13}$$

Los modelos de las fórmulas 12 y 13 dan lugar a las figuras 2 y 3, respectivamente, con sus correspondientes curvas de indiferencia.

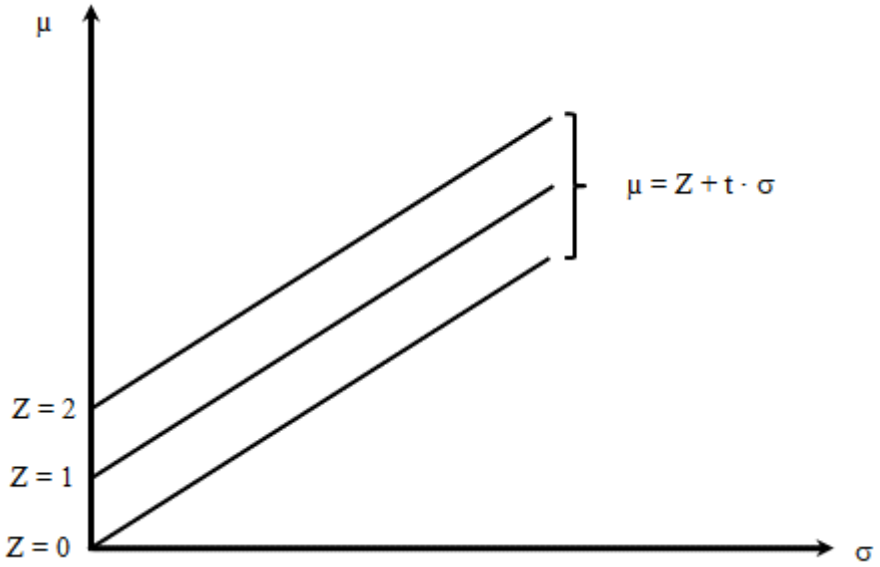


Figura 2

El decisor optará por el modelo más apropiado según sus preferencias, valorando subjetivamente la t. Entre los muchos modelos posibles, también están:

$$Z = \mu - t\frac{\sigma}{\mu} \tag{14}$$

$$Z = \mu - \frac{\sigma^{t}}{\mu} \tag{15}$$

Una vez que se ha optado por el modelo más apropiado, podemos valorar todas nuestras inversiones y seleccionarlas por programación matemática. Supongamos que para valorar nuestras inversiones hemos optado por el modelo de la fórmula (13), figura 3, y que tenemos diversas inversiones a seleccionar, con unas restricciones presupuestarias. El modelo será:

$$\text{Max } Z = \left(\mu_1 - \sigma_1^{t}\right) + \left(\mu_2 - \sigma_2^{t}\right) + \ldots + \left(\mu_n - \sigma_n^{t}\right) \tag{16}$$

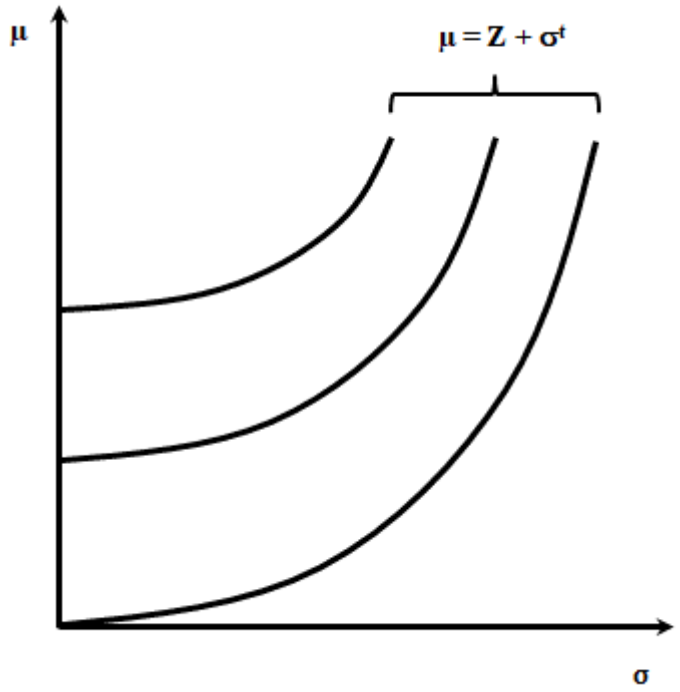


Figura 3

Con las correspondientes restricciones. Como vemos, se trata de un planteamiento multicriterio que este trabajo sólo pretende apuntar.

Una posibilidad interesante es que los distintos proyectos estén relacionados. Este caso no ha pretendido ser estudiado aquí. Sin embargo, la metodología propuesta abre un camino para su análisis introduciendo modelos de relación entre las variables que afectan a los distintos proyectos. Una posibilidad concreta sería introducir en los modelos que determinan los flujos de los proyectos una o varias variables comunes.

6-CONCLUSIÓN

Para la valoración de inversiones con riesgo, existen distintos procedimientos que pueden consultarse, por ejemplo, en cualquiera de los libros de finanzas citados en la Bibliografía. En este trabajo hemos propugnado valorar cada proyecto en función de su VAN esperado y su correspondiente desviación típica.

Para conseguir esos valores es preciso hacer unos supuestos sobre el comportamiento de las variables relevantes en el futuro. Considero que, en la mayoría de las ocasiones, han de hacerse estimaciones subjetivas sobre el mismo y en esta línea se ha movido el trabajo. En concreto, hemos dedicado especial atención al caso en que los flujos monetarios de los distintos años están relacionados entre sí. Para ello hemos propuesto una línea de modelos sencillos que, evidentemente, se puede ampliar para casos concretos.

La utilización de sencillos modelos subjetivos, tanto para obtener el VAN (μ y σ), como para valorarlo posteriormente, puede ser criticado desde un punto de vista formal, pero en las situaciones prácticas creo que puede ser un modo de proceder que supone un avance con respecto a lo que hoy se está haciendo.

APÉNDICE MATEMÁTICO

Vamos a resumir las demostraciones de las fórmulas aparecidas:

5)
$$A_t = A_0 + \sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i$$
$$E(A_t) = A_0$$
$$VAR\,(A_t) = \sum_{i=1}^{t} \sigma_{\varepsilon i}^2$$
$$COV\ (A_N, A_M) = E\ (A_N, A_M) \cdot E\,(A_N) \cdot E\,(A_M) = A_0^2 + \sum_{I=1}^{N} E\,(\varepsilon_i^2) + 0 - A_0^2 = \sum_{i=1}^{N} \sigma_{\varepsilon i}^2$$

6)
$$VAN = -D + \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{(1+k)^t}$$
$$E\,(VAN) = -D + \sum_{t=1}^{n} \frac{A_0}{(1+k)^t}$$
$$VAR\,(VAN) = \sum_{t=1}^{n} \frac{VAR\,(A_t)}{(1+k)^{2t}} + 2\sum_{t=1}^{n} \sum_{l=t+1}^{n} \frac{VAR\,(A_t)}{(1+k)^{l+t}} = \sum_{t=1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{t} \sigma_{\varepsilon i}^2}{(1+k)^{2t}} + 2\sum_{t=1}^{n} \sum_{l=t+1}^{n} \frac{\sum_{i=1}^{t} \sigma_{\varepsilon i}^2}{(1+k)^{l+t}}$$
$$\text{operando: } = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{\varepsilon i}^2 \left[\sum_{t=i}^{n} \frac{1}{(1+k)^{2t}} + 2\sum_{t=i}^{n} \sum_{l=t+1}^{n} \frac{1}{(1+k)^{l+t}} \right] = \sum_{i=1}^{n} \sigma_{\varepsilon i}^2 \left(\sum_{t=i}^{n} \frac{1}{(1+k)^t} \right)^2$$

8)
$$A_t = A_0 \prod_{i=1}^{t} (1 + \varepsilon_i)$$
$$E\,(A_t) = A_0$$
$$VAR\,(A_t) = A_0^2 \cdot VAR \left[\prod_{i=1}^{t} (1+\varepsilon_i) \right]; \text{ desarrollando: } VAR\,(A_t) = A_0^2 \cdot \left[\prod_{i=1}^{t} (1+\sigma_{\varepsilon i}^2) - 1 \right]$$
$$COV\,(A_N, A_M) = A_0^2 \cdot E \left[\prod_{i=N+1}^{M} (1+\varepsilon_i) \left(\prod_{i=1}^{N} (1+\varepsilon_i) \right)^2 \right] - A_0^2 = A_0^2 \left[E \left(\prod_{i=1}^{N} (1+\varepsilon_i) \right)^2 - 1 \right] =$$
$$= A_0^2 \cdot VAR \left[\prod_{i=1}^{N} (1+\varepsilon_i) \right] = VAR\,(A_N)$$

9)
$$VAN = -D + \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{(1+k)^t}$$

$$E(VAN) = -D + \sum_{t=1}^{n} \frac{A_0}{(1+k)^t}$$

$$VAR(VAN) = \sum_{t=1}^{n} \frac{VAR(A_t)}{(1+k)^{2t}} + 2\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=t+1}^{n} \frac{VAR(A_t)}{(1+k)^{t+l}} =$$

$$= A_0^2 \sum_{t=1}^{n} \frac{\prod_{i=1}^{t}(1+\sigma_{\varepsilon i}^2) - 1}{(1+k)^t} \left[\frac{1}{(1+k)^t} + 2\sum_{l=t+1}^{n} \frac{1}{(1+k)^l} \right]$$

BIBLIOGRAFÍA

BOX, G.E.P. y G.M. JENKINS (1976). *Time series analysis*. Holden-day. San Francisco.

CHACÓN, E. (1973). *Teoría de los grafos*. Ibérico-Europea. Madrid.

GARCÍA PÉREZ, G. y J.M. BUENO LIDÓN (1982). "Aplicación de la simulación al análisis de inversiones en presencia de riesgo". *Actas XIII Jornadas de la S.E.I.O.E.I.* vol. I. Sec. II. pp. 100-109. Valladolid.

HERTZ, D.B. (1964). "Risk analysis in capital investment". *Harvard Business Review*. Enero-Febrero. pp. 95-106.

HILLIER, F.S. (1963). "The derivation of probabilistic information for the evaluation of risky investments". *Management Science*. 9. Abril. pp. 443-457.

LORIE, J.H. y L.J. SAVAGE (1955). "Three problems in rationing capital". *Journal of Business*. Octubre. pp. 229-239.

MAO, J.C.T. (1974). *Análisis financiero*. El Ateneo. Buenos Aires.

MARKOWITZ, H. (1959). Portfolio selection: Efficient diversification of investments. Wiley. New York.

SUÁREZ SUÁREZ, A. (1980). Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa. Pirámide. Madrid.

VAN HORNE, J.C. (1980). *Financial Management and Policy*. Prentice-Hall. New Jersey.

WEINGARTNER, A.M. (1966). "Capital Budgeting of interrelated projects: Survey and synthesis". *Management Science*. XII. 7. Marzo. pp. 485-516.

WESTON, J.F. y E.F. BRIGHAM (1977). *Finanzas en administración*. Interamericana. Mexico.

LA INVERSIÓN EN CONDICIONES DE RIESGO

por Fernando Gómez-Bezares
Es una parte del capítulo 6 del libro *Las Decisiones Financieras en la Práctica*,
Desclée de Brouwer, 1986, págs. 282-291 (por lo que algunas referencias están incompletas);
se trata de una versión que contiene algunas actualizaciones menores

6.4. Los criterios de decisión con riesgo

A la hora de decidir, y en base a los datos que poseamos, podemos adoptar distintos criterios, desde los más sofisticados a los más sencillos. Desde un punto de vista teórico, supuesta la normalidad de las variables VAN y razonando según sus medias y sus desviaciones típicas, supuesto que las curvas de indiferencia son como las de la figura, y tal como comentábamos anteriormente, la decisión se hará buscando la máxima utilidad posible. Así en la figura 6–4–1 primero se hará el proyecto A, luego el B, etc.

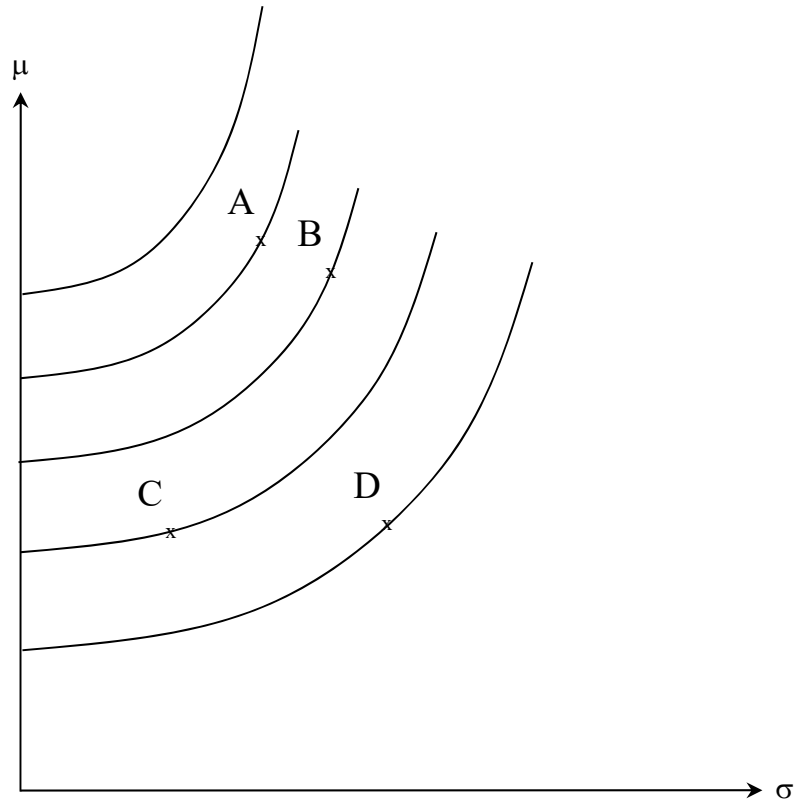


FIGURA 6–4–1

El cálculo de las utilidades no es fácil a nivel individual, pues están cargadas de elementos subjetivos. En las decisiones financieras, que son sobre las que versa nuestro estudio, tenemos una guía de actuación que es el objetivo financiero: «maximizar el valor de la empresa para sus accionistas», esto se consigue aumentando el VAN esperado y disminuyendo el riesgo. Evidentemente actuando en la línea de la figura 6–4–1 vamos por el buen camino, pero no es fácil llevar estos principios a la realidad práctica, donde a la hora de decidir entre dos proyectos, hay que ver cuál de los dos produce mayor utilidad; o lo que es lo mismo, cuál aumenta más el valor de la empresa para nuestros accionistas.

Actualmente, y desde hace ya bastantes años, se está trabajando en conseguir unos criterios de decisión que reflejen lo más fielmente posible lo que cada proyecto aporta a la consecución del objetivo financiero. En el próximo punto de este capítulo y en el apéndice 6–C, avanzaremos por este camino, pero en la realidad práctica, y más aún en el caso de mercados imperfectos, es interesante, en muchas ocasiones, utilizar métodos más sencillos. A continuación veremos algunos que, aunque imperfectos, pueden ayudamos a valorar, al menos de forma aproximada, los proyectos arriesgados[1].

A) *Ajuste del tipo de descuento*

El método más sencillo, más intuitivo y en muchas ocasiones más práctico de introducir el riesgo, es el de ajustar el tipo de descuento.

Cuando operábamos con decisiones «sin riesgo», en condiciones de certeza, aplicábamos para el cálculo del VAN un tipo de descuento «K». Ahora, en condiciones de riesgo, las generaciones de fondos no son ya cantidades ciertas, sino variables aleatorias. Si representamos cada generación de fondos por su valor medio tendremos:

$$E(\widetilde{GF_1}), E(\widetilde{GF_2}), ..., E(\widetilde{GF_n})$$

Aplicando el tipo de descuento *K* tendremos –por (6.8)–:

$$-D + \frac{E(\widetilde{GF_1})}{(1+K)} + \frac{E(\widetilde{GF_2})}{(1+K)^2} + ... + \frac{E(\widetilde{GF_n})}{(1+K)^n} = E(\widetilde{VAN})$$

Si el decisor fuera neutro ante el riesgo (por tratarse de una cantidad pequeña respecto a su patrimonio o por cualquier otra circunstancia) esta operación sería válida, la esperanza matemática del VAN sería un buen criterio de decisión. Sin embargo, como ya hemos comentado, lo normal es que no sea así, debiendo matizar la esperanza matemática con información sobre el riesgo que nosotros damos con la desviación típica (recuerde el lector que suponemos condiciones de normalidad).

[1] Puede ampliarse bastante de lo que sigue en Gómez-Bezares F., Madariaga J. y Santibáñez J. *«La decisión de inversión en entornos de riesgo»*. Estudios empresariales. 107. Tercer Cuatrimestre 2001, págs. 22–37.

Al ser el decisor enemigo del riesgo, la solución más inmediata es exigir a las inversiones arriesgadas una rentabilidad mínima superior a la *K*; tanto mayor cuanto mayor sea su riesgo. De esta manera, se obtiene un nuevo tipo de descuento «R», igual a *K* más una prima por riesgo «P»:

$$R = K + P$$

En base a este sistema, la generación de fondos de cada año (GF_i) se toma como un valor fijo[2] y se descuenta al tipo *R*:

$$\text{VAN (corregido)} = -D + \frac{GF_1}{(1+R)} + \frac{GF_2}{(1+R)^2} + ... + \frac{GF_n}{(1+R)^n} \tag{6.24}$$

El problema de este método es, sobre todo, su subjetividad, al no establecerse un sistema para el cálculo de la prima *P*. Por otro lado, este sistema «penaliza» de forma creciente las generaciones de fondos, a causa de que conforme se alejan en el tiempo se utilizan exponentes más elevados en el denominador de la fórmula (6.24). Ante esta última objeción, puede replicarse que es bastante normal que el riesgo sea creciente con el tiempo, lo que justificaría una penalización creciente, pero también es cierto que esto no sucede siempre así.

B) *Equivalente de certeza*

A causa de los problemas del método del ajuste del tipo de descuento y quizá también por su excesiva simplicidad, algunos autores propugnan un método alternativo, conocido como «método del equivalente de certeza». Basándose en los conceptos de la teoría de la utilidad, si bien utilizándola de forma muy simplificada, se convierte la generación de fondos con riesgo[3] en un valor que, para el decisor, es el equivalente cierto; es decir, en una cantidad tal que resulte indiferente dicha cantidad segura o la generación de fondos real con su riesgo correspondiente. Para eso lo que se hace es multiplicar la generación de fondos con riesgo por un valor α entre 0 y 1, según el riesgo y las preferencias del decisor. Ese valor α puede, y normalmente así sucederá, ser diferente cada uno de los años que dura la inversión, hablando en ese caso de α_i. El equivalente cierto de GF_i con riesgo será:

$$GF_i \cdot \alpha_i$$

Para el cálculo de α_i puede preguntársele al decisor lo siguiente:

– Dada una cantidad GF_i con su correspondiente riesgo

– ¿Cuál es la cantidad equivalente sin riesgo GF'_i?

---

[2] Lo más normal es utilizar como generación de fondos la esperanza matemática de esta variable, pero en ocasiones se usan otras medidas de posición (así, en distribuciones asimétricas pueden usarse la moda o la mediana, pero en general es más recomendable la media aritmética).

[3] Medida normalmente por su esperanza matemática, pero pudiendo hacerse similares consideraciones a las comentadas en la nota anterior.

O lo que es lo mismo: ¿Cuál es la cantidad segura que resulta indiferente recibir? Cuantificado GF'_i, tendremos:

$$\alpha_i = \frac{GF'_i}{GF_i} \tag{6.25}$$

Una vez calculados los α_i, actualizaremos los equivalentes ciertos al tipo *K* «que era el tipo para inversiones sin riesgo». Así tendremos:

$$\text{VAN (corregido)} = -D + \frac{\alpha_1 \, GF_1}{(1+K)} + \frac{\alpha_2 \, GF_2}{(1+K)^2} + ... + \frac{\alpha_n \, GF_n}{(1+K)^n} \tag{6.26}$$

Este segundo método mantiene la subjetividad, que ahora se producirá en el cálculo de las «α». No puede ser de otra manera a no ser que acudamos a modelos más sofisticados, de los que algo comentaremos en el apéndice 6–C. Tiene sobre el método anterior la indudable ventaja de poder «penalizar» de forma diferente en los diferentes años según su distinto riesgo, si bien esto trae como inconveniente el que es preciso estimar n valores de α, frente a un solo valor (P) en el método anterior; esta característica de posible discriminación en las penalizaciones, lo hace interesante para determinados problemas, entendiendo algunos autores que por ello es teóricamente superior al método que veíamos anteriormente.

Existe con todo un aspecto, tal como apunta Andrés Suárez[4], que hace que el método del ajuste del tipo de descuento sea superior y es que toma el proyecto como un todo; así por ejemplo las generaciones de fondos de los distintos años pueden estar correlacionadas, lo que avala esta última postura. Además el método del ajuste del tipo de descuento resulta más intuitivo y fácil de aplicar, lo que hace que goce de la preferencia de los profesionales, asumiendo indudablemente su subjetividad[5].

Los modernos métodos de selección de inversiones pueden aplicarse con facilidad al «ajuste del tipo de descuento» y también al «equivalente de certeza»; algo de esto comentaremos en el apéndice 6–C.

C) *Penalización directa del VAN*

Como complemento de un trabajo ya citado[6], aparece un método con diferentes variantes, consistente en penalizar el VAN medio en función de su desviación típica[7]. Así, por ejemplo, podemos hacer:

---

[4] Suárez Suárez A.S. «*Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa*». Pirámide. Madrid. 1980. 3ª edición, págs. 130–132.

[5] Una forma de resolver esto es usar como tipo de descuento ajustado el «coste medio ponderado del capital», tal como veremos en el capítulo 7.

[6] Gómez–Bezares F. «*Algunos modelos básicos para la selección de inversiones con flujos relacionados*». Obra citada.

[7] Lo que dio lugar al Valor Actualizado Penalizado (VAP). Véase Gómez-Bezares F. «*Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions*». Publicado en Aggarwal, ed. «*Capital budgeting under uncertainty*». Prentice–Hall. Englewood Cliffs. Nueva Jersey. 1993, págs. 91–102.

$$Z = E(VAN) - t \cdot \sigma(VAN) \tag{6.27}$$

Prefiriéndose, lógicamente, aquellos proyectos con *Z* más alto. En la fórmula, *Z* sería una medida de utilidad, E(VAN) la esperanza matemática del valor actualizado neto y σ(VAN) su desviación típica. El valor *t*, obviamente, es un dato que ha de dar el decisor subjetivamente, pero para cuya valoración se pueden dar algunas pautas[8]. No pretendo dar una justificación teórica al método, pues sólo quiere ser una simplificación de métodos teóricamente más potentes, sino fundamentalmente resaltar su practicidad al sólo tener que estimar un valor *t* y ser éste de alguna forma, como veremos, justificable.

Sin embargo, el lector puede observar que utilizar un criterio de decisión como el anterior, equivale a suponer que actuamos sobre un mapa de μ y σ de VAN, con «rectas de indiferencia» (aquí reside la principal simplificación) de pendiente «t». En efecto, despejando E(VAN) en la fórmula anterior (6.27) tendremos:

$$E(VAN) = Z + t \cdot \sigma(VAN) \tag{6.28}$$

y dibujando en la figura 6–4–2 podemos ver la familia de rectas que representa.

En la figura tenemos que el proyecto A aparece en la recta de Z_6 lo que lo hace aparentemente preferible a los demás (B, C y D). En efecto:

$$E(VAN_A) - t \cdot \sigma(VAN_A) = Z_6$$

no habiendo valores superiores *Z* en el resto de los proyectos. Por otro lado, si suponemos que el VAN es una variable normal como la de la figura 6–4–3, es fácil ver la relación entre el valor de *X* en la figura y la fórmula de penalización (6.27).

En efecto, tipificando *X* –por (6.20)– tendremos:

$$\frac{X - E(VAN)}{\sigma(VAN)} = t \tag{6.29}$$

Dado que α es menor de 0,5, *X* será menor que la media y la *t* de la fórmula (6.29) será negativa. Dicha *t* deja a su derecha «1–α», por lo que podríamos poner:

$$t_{(1-\alpha)} = \frac{X - E(VAN)}{\sigma(VAN)} \tag{6.30}$$

[8] Véase también Gómez-Bezares F., Madariaga J. y Santibáñez J. «*Medidas de performance: algunos índices clásicos y relación de la TRIP con la teoría de cartera*». Publicado en Gómez-Bezares F., Madariaga J. y Santibáñez J., ed. «*Lecturas sobre gestión de carteras*». Biblioteca virtual de Derecho, Economía y Ciencias Sociales, EMVI. 2004, págs. 253–303.

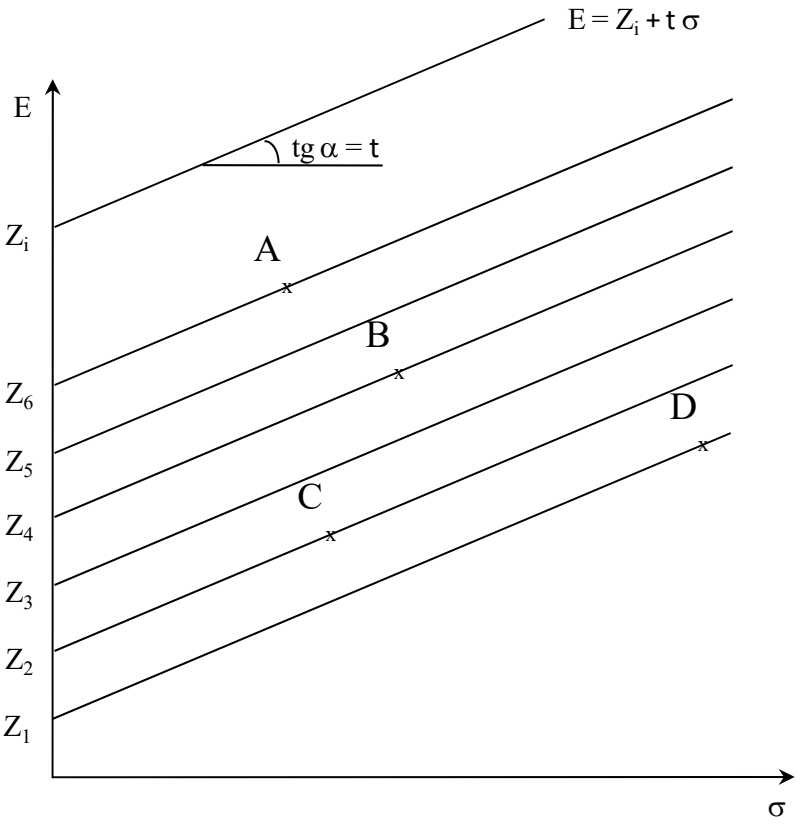


FIGURA 6–4–2

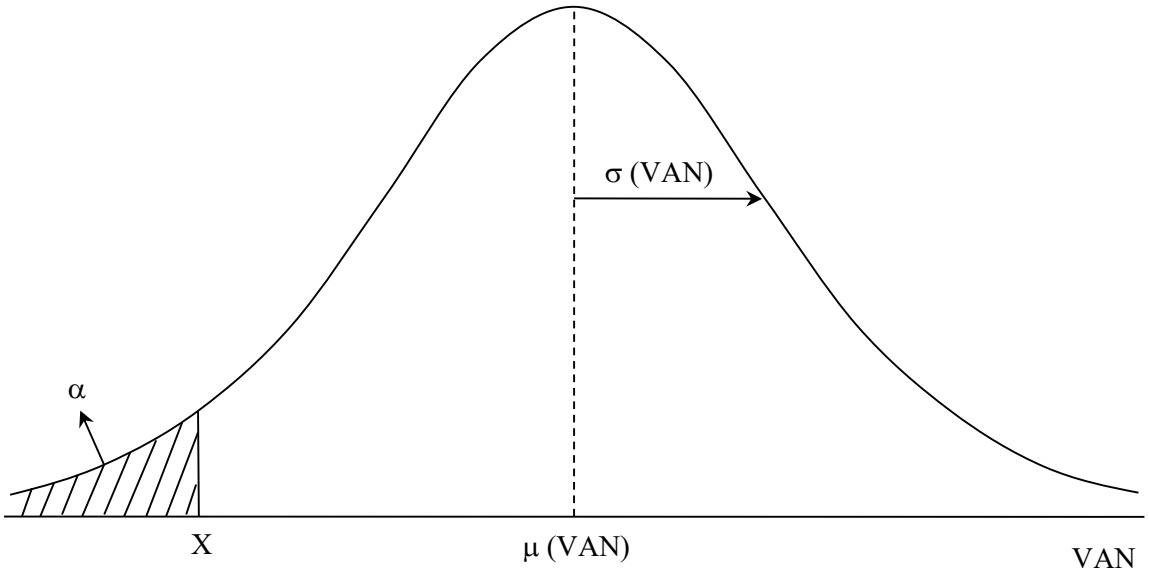


FIGURA 6–4–3

Al ser simétrica la normal, la *t* que deja a su derecha $1-\alpha$ es igual, pero con signo cambiado, a la *t* que deja a su derecha α, luego podemos poner:

$$-t_{\alpha} = \frac{X - E(VAN)}{\sigma(VAN)} \tag{6.31}$$

Operaremos con esta última *t*, que es la que nos dan directamente las tablas, sobre todo porque será positiva (al revés que la anterior) y suele ser más cómodo operar con valores positivos.

Demos a α un valor, por ejemplo $\alpha = 0{,}00135$, lo que da un valor de $1-\alpha = 0{,}99865$. Tendremos, buscando en las tablas, que:

$$t_{0{,}00135} = 3$$

Despejando *X* de la última fórmula (6.31):

$$X = E(VAN) - t \cdot \sigma(VAN)$$

Aplicando el valor de *t*:

$$X = E(VAN) - 3\,\sigma(VAN)$$

fórmula obviamente similar a la de penalización (6.27), con la sola diferencia de que a la *Z* la hemos llamado *X* y que a *t* le hemos dado el valor 3. ¿Qué significa este último valor de *X*? El lector habrá comprendido fácilmente que es el *mínimo garantizado* con una probabilidad del 99,865%.

En consecuencia, si yo utilizo este procedimiento de penalizaciones, tal como aparece en la fórmula (6.27), voy a valorar los proyectos en función del «mínimo garantizado», que es lo que significa *Z*, con una determinada probabilidad, que dará lugar al valor de *t*. Veamos algunos valores de *t* y sus correspondientes probabilidades en el cuadro de la figura 6–4–4 (que se obtienen de la tabla de la distribución normal).

Valor de t	Z = mínimo garantizado con una probabilidad de:
1,5	1 – 0,06681 = 0,93319 → 93,319%
2	1 – 0,02275 = 0,97725 → 97,725%
2,5	1 – 0,00621 = 0,99379 → 99,379%
3	1 – 0,00135 = 0,99865 → 99,865%

FIGURA 6–4–4

En conclusión, aceptado el procedimiento, decidiremos cuál es la probabilidad que deseamos para darlo como «valor garantizado». Así tendremos la *t*. Cuanto mayor sea la probabilidad deseada, mayor será la *t* correspondiente y más exigentes seremos con los proyectos arriesgados[9].

Un sistema de evaluación similar a éste consistirá en clasificar los proyectos según su probabilidad de dar un VAN negativo. Si en el razonamiento anterior (6.31) damos a *X* el valor 0, cuanto mayor sea *t*, menor será α (menos probabilidades habrá de que el VAN sea negativo):

$$-\mathrm{t} = \frac{\mathrm{X} - \mathrm{E(VAN)}}{\sigma(\mathrm{VAN})} \Rightarrow \frac{0 - \mathrm{E(VAN)}}{\sigma(\mathrm{VAN})} = -\mathrm{t}$$

o lo que es lo mismo:

$$\mathrm{t} = \frac{\mathrm{E(VAN)}}{\sigma(\mathrm{VAN})} \tag{6.32}$$

Llamando *Z* a *t*:

$$\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{E(VAN)}}{\sigma(\mathrm{VAN})} \tag{6.33}$$

luego:

$$\mathrm{E(VAN)} = \mathrm{Z} \cdot \sigma(\mathrm{VAN}) \tag{6.34}$$

gráficamente, podemos verlo en la figura 6–4–5.

El proyecto E es el preferido (sobre F y G) por tener la máxima Z_i; es decir, la mínima probabilidad de dar un VAN negativo. Luego, en conclusión, este sistema de penalización consiste en dividir la esperanza matemática por la desviación típica (6.33) y escoger los proyectos con mayor cociente (con mayor *Z*). El valor de *Z*, buscado en la normal, nos dará la probabilidad de que el VAN sea menor que cero en ese proyecto, así:

$$\text{si } \mathrm{Z} = 3 \rightarrow \text{prob.} = 0{,}00135 \rightarrow 0{,}135\%$$

Este sistema puede ser útil para valores bajos de *Z*, pero si *Z* es alto, por ejemplo por encima de 3, las probabilidades son tan bajas que sus diferencias no son relevantes a efectos prácticos; me es prácticamente igual que la probabilidad de tener un VAN negativo sea uno entre un millón que uno entre dos millones, por este motivo no he de considerar superior el segundo proyecto.

[9] Una forma similar de entender el Valor Actualizado Penalizado (VAP) es interpretarlo como un «equivalente cierto». La *Z* es el equivalente cierto, como puede verse en la figura 6–4–2.

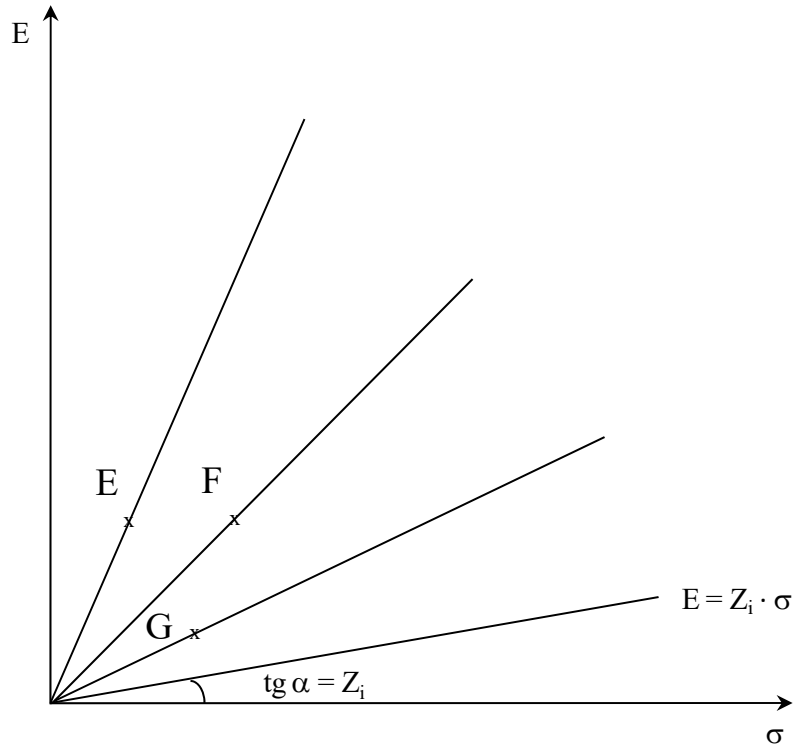


FIGURA 6–4–5

Otros sistemas de penalización serán:

$$Z = E(VAN) - [\sigma(VAN)]^t \tag{6.35}$$

$$Z = E(VAN) - t \cdot \frac{\sigma(VAN)}{E(VAN)} \tag{6.36}$$

$$Z = E(VAN) - \left[\frac{\sigma(VAN)}{E(VAN)}\right]^t \tag{6.37}$$

el lector puede sugerir otros. En el primero de estos últimos (6.35) si por ejemplo $t = 2$, tendremos las curvas de la figura 6–4–6.

Por la forma de las curvas podemos ver la lógica del primero (6.35) de los tres últimos procedimientos citados. Los dos siguientes (6.36) y (6.37) parece que, en principio, tendrán una utilidad más limitada.

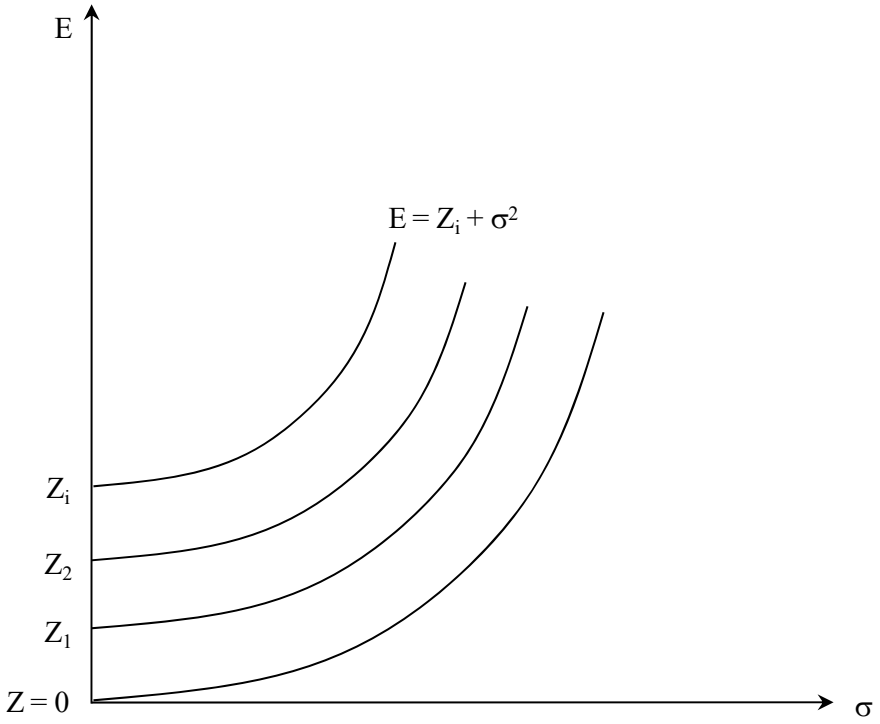


FIGURA 6–4–6

PENALIZACIÓN DE LAS DECISIONES DE INVERSIÓN EN FUNCIÓN DEL RIESGO

por Fernando Gómez-Bezares
Publicado en las Actas del *2º Congreso de economía y economistas de España*, Bilbao, 28 de Noviembre de 1986

INTRODUCCIÓN

En condiciones de certeza el valor actualizado neto (VAN) debe considerarse como criterio más adecuado en las decisiones de inversión. Llamando A_t al flujo de caja incremental del año t, k al coste de los fondos y n al número de períodos de tiempo (normalmente años), recordemos que el VAN se define como:

$$VAN = \sum_{t=0}^{n} \frac{A_t}{(1+k)^t} \qquad (1)$$

El VAN lo podemos conceptualizar como el incremento neto del valor de la empresa; escogeremos, en consecuencia, aquellos proyectos que tengan un mayor VAN. Esto puede ampliarse en distintos sitios y no me extenderé en ello por ser suficientemente conocido (véase por ejemplo Gómez Bezares, 1986, capítulo V).

Si suponemos ahora que los valores de la fórmula del VAN (1) son variables aleatorias, el problema se complica. En efecto, en estas condiciones, el VAN se convierte en una variable aleatoria, con lo que su significado a efectos de tomar decisiones se hace más oscuro. En la figura l aparecen las distribuciones de probabilidad de los VAN de dos decisiones (la A y la B). La esperanza matemática de la A es mayor, pero su desviación típica, su riesgo, también lo es. No es fácil optar por una o por otra.

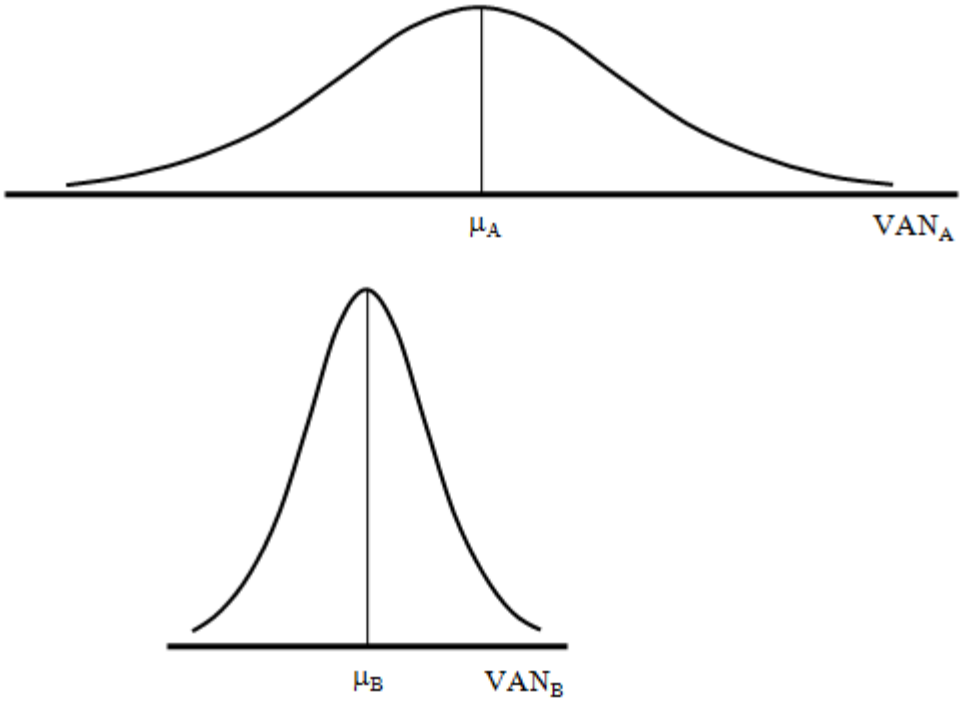


Figura 1

EL PROBLEMA DEL RIESGO

Partiendo del supuesto de que las distribuciones del VAN son normales (o cercanas a la normalidad, lo que suele ser bastante sostenible en muchas ocasiones en virtud del teorema central del límite), tales distribuciones de probabilidad se definen en función de dos parámetros: la esperanza matemática "μ" y la desviación típica "σ". Según el criterio de la esperanza matemática nos guiaríamos por el VAN medio a la hora de tomar las decisiones, pero tal criterio es criticable en muchas ocasiones (véase Gómez Bezares, 1985, capítulo VII y 1986, capítulo VI). Lo más general es evaluar una decisión en función de la distribución de su VAN, y siendo ésta normal, según su esperanza matemática y su desviación típica; es decir, según su resultado medio (medido con el promedio del VAN) y su riesgo (medido con la desviación típica).

El hecho de medir el riesgo con la desviación típica tiene una justificación de tipo estadístico (en caso de distribuciones normales, junto con el parámetro μ, queda definida la distribución) y también de tipo lógico. Correr un riesgo es (así entiendo yo que debe definirse) exponerse a ganar o a perder; alrededor del resultado medio (la μ), tenemos resultados mejores y peores, más o menos dispersos; a mayor dispersión (mayor σ) habrá mayores posibilidades de ganar mucho o perder mucho respecto al resultado medio, luego habrá un mayor riesgo.

Supuesto un valor del resultado medio, μ, los individuos pueden preferir que exista riesgo o que no exista. A los primeros se les denomina amigos del riesgo, a los segundos enemigos. No voy a extenderme aquí sobre la lógica de actuar como enemigos del riesgo (puede ampliarse esto

en la bibliografía antes citada), sin embargo, creo que puede resultar ilustrativo el siguiente ejemplo:

Si a uno cualquiera de nosotros nos toca en un juego de azar una cantidad pequeña, pongamos mil pesetas, y el organizador del juego (el casino, el estado, …) nos propone jugarnos a cara o cruz el que nos den doble o nada, no tendríamos excesivo problema en acudir a este nuevo juego que nos proponen. Por el contrario, si nos tocan diez millones, es casi seguro que no aceptaríamos el jugárnoslos a doble o nada. Todavía lo veremos más claro si hablamos de mil millones. En conclusión, para cantidades grandes, es preferible un valor X seguro que poder tener cero o 2X con el 50% de posibilidades; lo que nos indica que en esos casos lo normal es actuar como enemigos del riesgo. Los economistas solemos justificar esto según el decrecimiento de la utilidad marginal (véase figura 2).

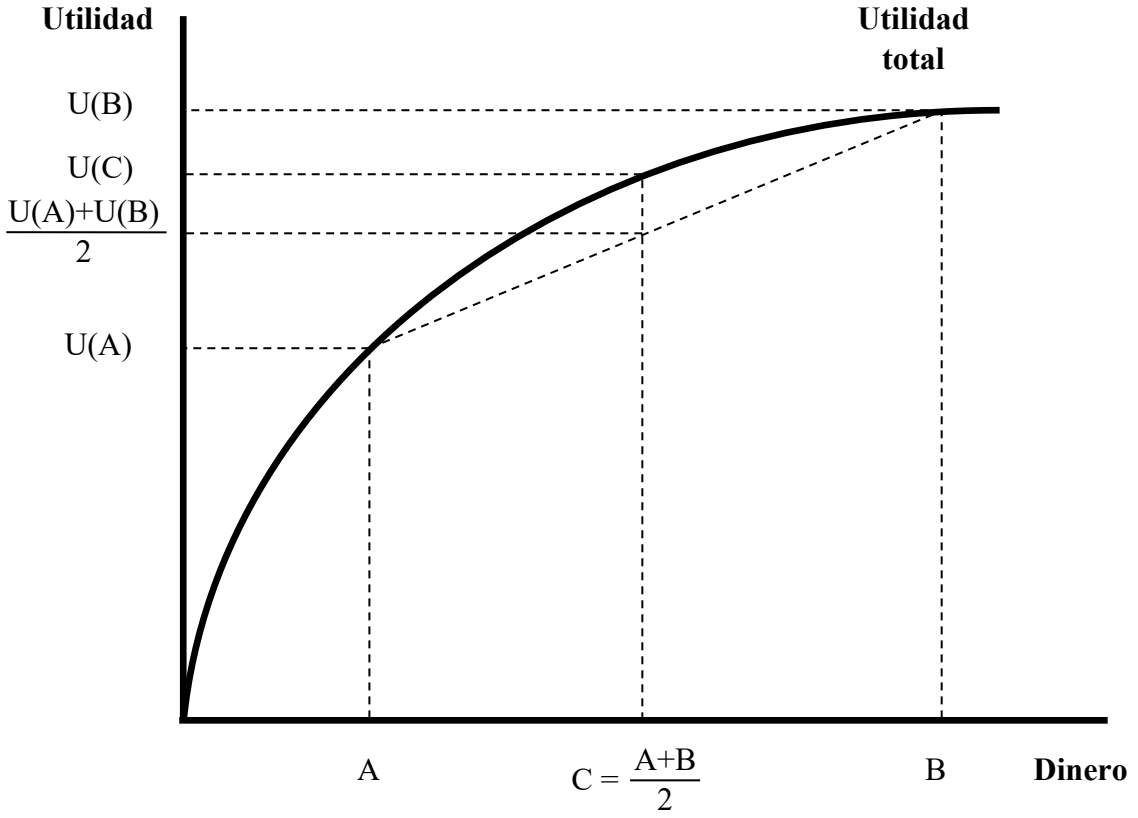


Figura 2

Si nos ofrecen dos cantidades (A y B) con unas probabilidades del 50% o su valor medio (C), tenemos que (en la zona en la que la utilidad marginal es decreciente) la utilidad de C es mayor que la media de las utilidades de A y B.

De todo lo anterior podemos concluir que, para cantidades importantes (lo que suele ser normal en los proyectos de inversión), los individuos actúan como enemigos del riesgo. En consecuencia dado un resultado medio "μ" (que recordemos que es el valor medio del VAN), preferiremos que su riesgo (σ) sea cuanto más pequeño mejor . Dicho de otra forma, para mantener el mismo nivel de interés por una inversión, para que nos produzca la misma utilidad,

es preciso que ante aumentos de σ, se den paralelamente aumentos de μ. En definitiva, podemos construir un mapa de curvas de indiferencia como el de la figura 3 -que se inspira en los propuestos por Markowitz (1952 y 1959); véase también Sharpe (1976), Dobbins y Witt (1986), etc.-.

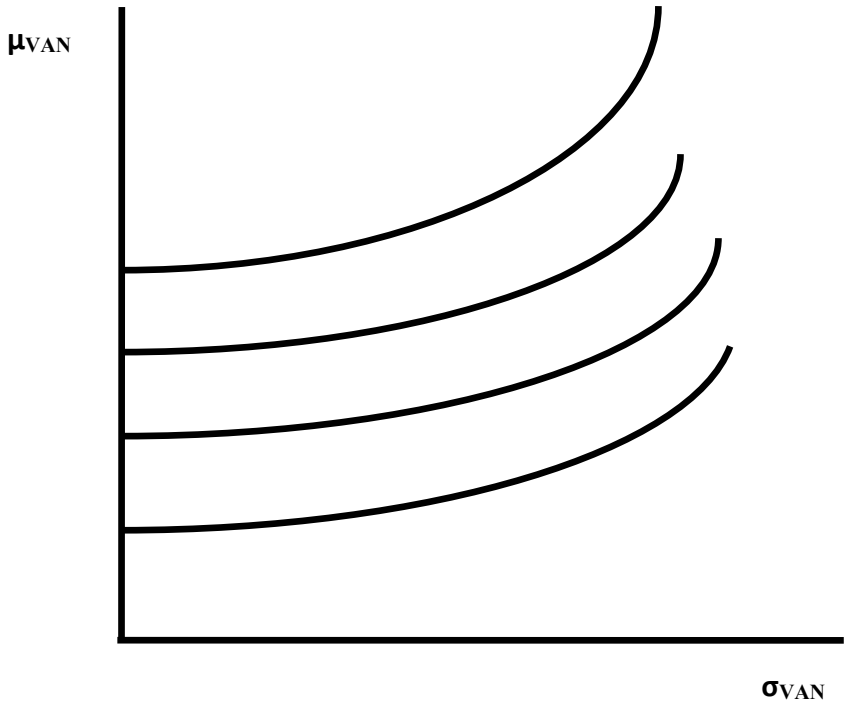


Figura 3

Un proyecto de inversión tendrá un nivel de utilidad que vendrá determinado por la curva de indiferencia en la que se encuentre. Cada decisor tendrá su propio sistema de preferencias, si éste es conocido, parece que en principio la decisión de inversión aparecería resuelta. Sin embargo, en empresas de cierta dimensión, no parece muy lógico el dejarnos guiar por el criterio subjetivo de un solo decisor; además, incluso cuando esto se puede hacer (normalmente en pequeñas empresas), es difícil que el decisor establezca su escala de preferencias. Por todo ello creo que puede ser interesante, tal como ya he comentado en trabajos anteriores (Gómez Bezares,1984 y 1986) establecer unos *métodos de penalización*, que una vez aprobados por los responsables de la compañía, serán utilizados como criterio objetivo en la selección de inversiones.

Lo que se pretende con esto es establecer una pauta de actuación ante el riesgo, que sistematice la toma de decisiones. Existen otros procedimientos, sobradamente conocidos, como son el ajuste del tipo de descuento o el equivalente de certeza (véase por ejemplo Weston y Brigham, 1984, o Gómez Bezares, 1986) -sin entrar en el CAPM, pues su aplicabilidad al caso español es limitada-. Creo que, como luego veremos, los métodos de penalización tienen una serie de ventajas, pero lo que ahora me interesa recalcar es que es importante el que exista un método.

En efecto, la existencia de un sistema de uso general en la compañía dará una coherencia a sus decisiones y, a la larga, si el procedimiento elegido para la selección de inversiones es el

adecuado, contribuirá a la consecución de los objetivos de la empresa. Pero, en segundo lugar, la concreción de un método, nos ayudará a estudiar el riesgo de una manera algo más objetiva, previniéndonos de dos extremos peligrosos, la *riesgomanía* (deseo desordenado por el riesgo) y la *riesgofobia* (apasionada aversión por el riesgo) -permítaseme el uso de estos neologismos-.

RIESGOMANÍA Y RIESGOFOBIA

El amor al riesgo sólo es teóricamente justificable en la zona (si ésta existe) de utilidades marginales crecientes que se situaría en su caso sobre cantidades pequeñas, y cuya relevancia a nivel empresarial puede considerarse despreciable. La riesgomanía consistiría en tener afición por el riesgo, cuando ésta no es justificable. En general podemos decir que la afición por el riesgo en decisiones de inversión, aun siendo éstas pequeñas, puede calificarse de riesgomanía. Sin embargo, este problema resulta más teórico que práctico, pues el amor al riesgo no es una característica que destaque en nuestro mundo actual. Con todo, si se diera, un sistema correcto de tratamiento del riesgo prevendría tal vicio.

Más preocupante es, a mi entender, la aversión injustificadamente grande que en ocasiones se siente por el riesgo. Hemos comentado cómo es teóricamente justificable un cierto grado de aversión, pero ésta no puede ser absoluta, y una inversión más arriesgada puede ser preferible cuando el incremento de resultado medio compensa el mayor riesgo. Este enunciado, lógico en su planteamiento, suele ser difícil de llevar a la práctica, por lo subjetivos y difícilmente mensurables de los elementos que lo componen. No es fácil, a nivel individual, evaluar cuál es el incremento de resultado medio que me compensa de un incremento de riesgo. Esto es posible en base a las curvas de indiferencia, como es el caso de las que aparecen en la figura 3, pero éstas son de difícil estimación. Por otro lado la obtención de los valores de μ y σ, solo es posible, en la mayoría de las ocasiones, en base a un proceso de estimación estadística, cuyos resultados no son seguros. Con todo, el procedimiento es teóricamente válido y el empresario-decisor no tiene por qué caer en la riesgofobia. Puede equivocarse, pero igual lo puede hacer en un sentido o en otro.

Pero en el mundo actual, en las grandes compañías, la propiedad y la gestión están cada vez más separadas, lo que ha hecho desaparecer en muchos casos el *empresario-decisor*, sustituyéndolo por el *empleado-decisor*. Este último suele tener una intachable preparación técnica, pero puede incurrir con bastante lógica en una fobia hacia el riesgo. En efecto, el empresario-decisor pide una compensación (en términos de mayor resultado medio) para asumir un mayor riesgo (lo que puede dar lugar a unas ganancias mucho mayores o mucho menores que el citado resultado medio). Por el contrario, el empleado-decisor ve tal inversión de manera diferente: los resultados mucho mayores se convierten para él, muchas veces, en unos pequeños incentivos; los mucho menores pueden acarrearle un desprestigio profesional, incluso un despido. Es lógico el que tenga una tendencia a penalizar mucho más el riesgo que lo que sería admisible desde la óptica del empresario-decisor y, desde su punto de vista, caería en la "riesgofobia".

Evitar esto es importante, pues de lo contrario nuestras grandes empresas se irán haciendo cada vez más conservadoras, perdiéndose el dinamismo característico de la economía de mercado. No es casualidad que los nuevos empresarios, pequeños en su inmensa mayoría, estén obteniendo importantes éxitos, en limpia competencia con las "empresas monstruo", cuyos resultados, en ocasiones, vienen explicados por elementos ajenos al mercado.

Para disminuir la aversión al riesgo pueden idearse diferentes procedimientos, siendo el más obvio que los empleados-decisores, los denominados ejecutivos, sufran el riesgo (para bien o para mal) de forma similar al empresario. Con todo, un primer paso es controlar sus decisiones, estableciendo un criterio claro para el tratamiento del riesgo.

LOS MÉTODOS DE PENALIZACIÓN

La penalización consiste en obtener una función del resultado medio y del riesgo del VAN, que nos dé un valor de utilidad que sirva como criterio de decisión.

$$Z = f(\mu, \sigma)$$
$$Z \rightarrow \text{Valor de utilidad} \qquad (2)$$

Denominamos a estos métodos "de penalización" porque "penalizan" el resultado medio, la esperanza matemática del VAN, dando lugar a un valor más pequeño, la Z, que utilizamos como medida de utilidad. Un caso particular de estos métodos es el criterio de la esperanza matemática:

$$Z = \mu \rightarrow E(VAN) \qquad (3)$$

donde la penalización es nula. Este procedimiento de no aplicar penalizaciones ya ha sido criticado con anterioridad.

La primera forma de penalización puede ser la penalización lineal:

$$Z = a\mu + b\sigma \qquad (4)$$

donde "b" ha de ser lógicamente negativo, por lo que es más fácil poner:

$$Z = \mu - t\sigma \qquad (5)$$

donde $t = - b/a$ y Z ha cambiado de escala.

Si utilizamos Z como criterio de decisión entendiendo que es una medida de la utilidad de cada decisión (o al menos una aproximación suficiente a ella), esto implica que para cada valor de Z existe un nivel de utilidad y podemos construir las correspondientes curvas (rectas en este caso) de indiferencia. En efecto, despejando de la fórmula (5) tenemos que, siendo Z_i un determinado nivel de utilidad:

$$\mu = Z_i + t\sigma \tag{6}$$

Para cada valor de Z_i existirá una "recta de indiferencia" (Véase la figura 4).

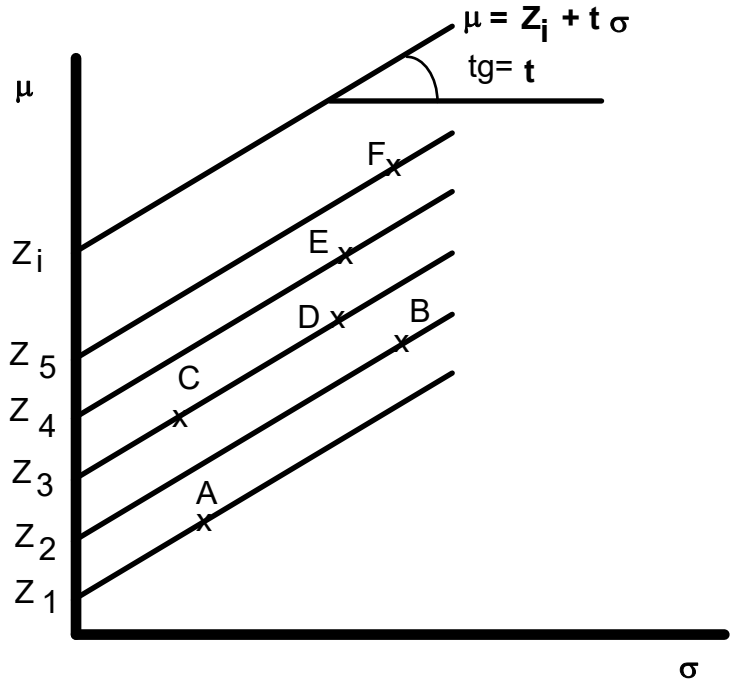


Figura 4

El proyecto A es peor que el B, el B peor que el C o el D, etc. Evidentemente, se cumple que:

$$Z_1 = \mu_A - t\sigma_A < Z_2 = \mu_B - t\sigma_B \tag{7}$$

Luego si se acepta el mapa de la figura 4, constituido por rectas de indiferencia de pendiente "t", la utilización de Z, tal como viene expresada en la fórmula (5), es un criterio correcto de decisión. Es evidente que suponer que se trata de rectas en vez de curvas de indiferencia es una simplificación, pero en la práctica tal sistema puede dar buenos resultados dada su sencillez. A esto hay que añadir que, en condiciones habitualmente aceptables, la cuantitativización de t es bastante sencilla.

En efecto, suponemos que el VAN sigue una distribución normal con esperanza matemática μ y desviación típica σ, despejando t de la fórmula (6) llegamos a una expresión bastante familiar:

$$t = \frac{\mu - Z_i}{\sigma} \tag{8}$$

Cambiando de signo tendremos:

$$\frac{Z_i - \mu}{\sigma} = -t \tag{9}$$

donde "-t" es el valor tipificado de Z_i en la distribución citada. Buscando el área que deja t en las tablas de la normal tipificada a su derecha, tendremos la probabilidad de que el VAN sea menor que Z_i. Por ejemplo, cuando t vale 3, el área a la derecha de 3 (o a la izquierda de -3) es 0,00135; luego cuando aplicamos valor de t=3 en la fórmula (5), la Z obtenida es el "*mínimo garantizado*" con una probabilidad del 0,99865 (1-0,00135).

Este método puede denominarse del "mínimo garantizado", y basta con buscar una probabilidad suficientemente alta (aquí se evaluará la afición al riesgo del decisor), y con la t correspondiente, aplicaremos la fórmula (5). En principio parece lógico que la t se mueva en un intervalo de 0 a 3 (todo esto puede ampliarse en un reciente trabajo mío, Gómez Bezares,1986).

Si penalizamos en forma de cociente, la fórmula (2) puede quedar:

$$Z = \frac{\mu}{\sigma} \tag{10}$$

Despejando μ, tendremos:

$$\mu = Z \cdot \sigma \tag{11}$$

lo que da lugar a un sistema de rectas de indiferencia como el de la figura 5.

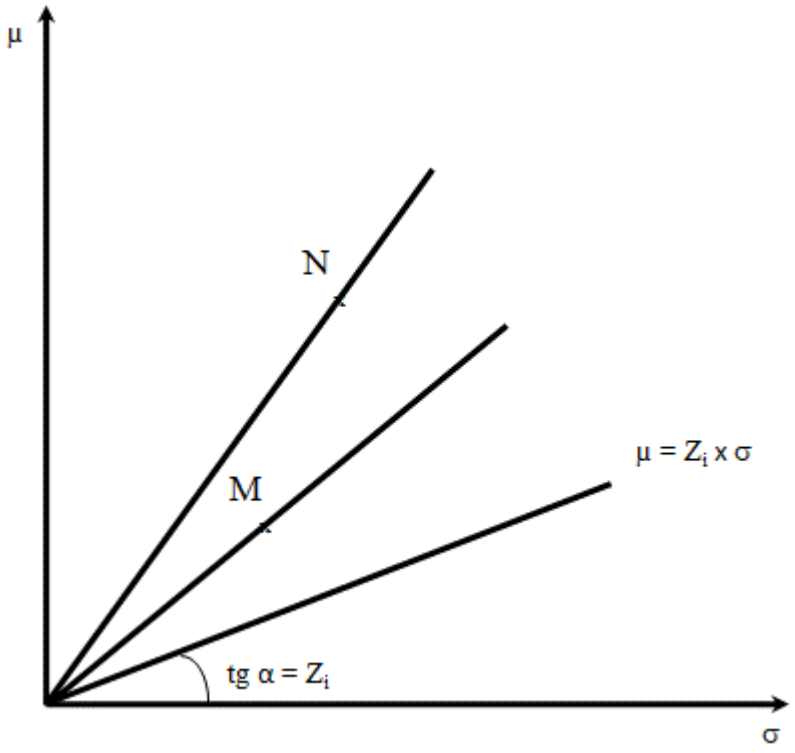


Figura 5

La fórmula (10) la podemos poner como:

$$\frac{0-\mu}{\sigma} = -Z \tag{12}$$

donde "-Z" es el valor tipificado de "0". Buscando Z en tablas nos dará a su derecha un área que representa la probabilidad de que el VAN sea negativo.

Este sistema creo que es más discutible que el anterior, sobre todo para proyectos con probabilidades muy bajas de dar resultados negativos, pues en ese caso el criterio de clasificación resulta poco relevante. Podemos denominar a este sistema de "*mínima probabilidad de pérdida*" y creo que podemos concluir que será útil si dicha probabilidad tiene un valor relevante.

Un tercer sistema, que se deriva del primero, consiste en pedir probabilidades crecientes para considerar un valor garantizado, según aumenta el riesgo. Si en la fórmula 5, sustituyo t por σ, tendré:

$$Z = \mu - \sigma^2 \tag{13}$$

que, despejando μ, da lugar a:

$$\mu = Z + \sigma^2 \tag{14}$$

lo que corresponde a unas "curvas" de indiferencia mucho más familiares, como las de la figura 6.

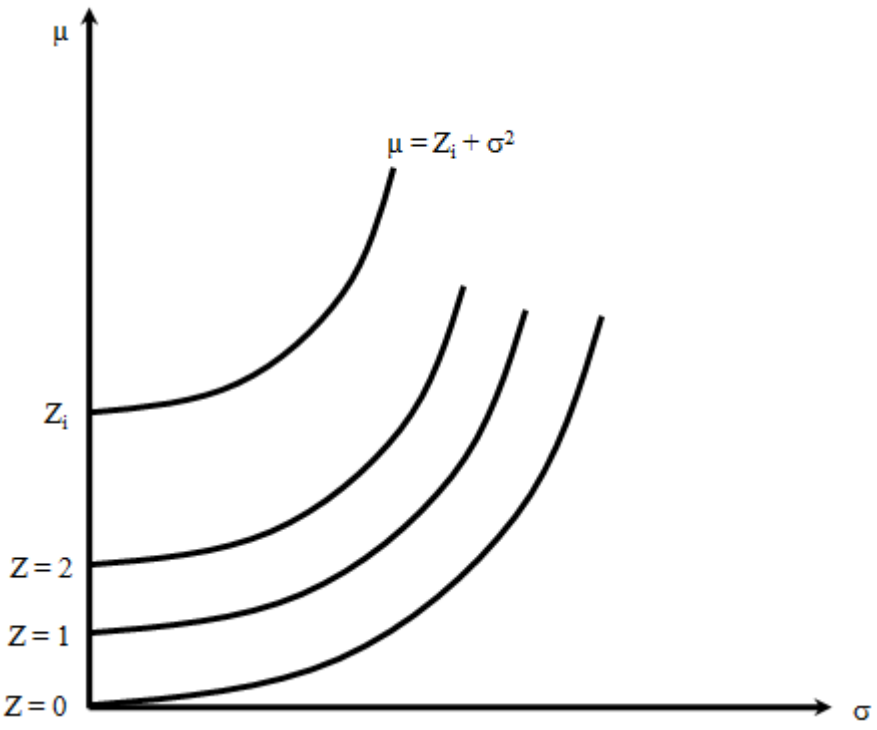


Figura 6

Tomando ahora la fórmula (9) vemos que, el valor que ahí era t, ahora es σ, con lo que el área que antes quedaba a la izquierda de "-t", será ahora decreciente al aumentar σ. Podemos denominar a este método de "*penalización cuadrática*" y parece que resulta de gran dureza con las inversiones arriesgadas. Por otro lado existe un *problema de escala* pues si σ se mide en pesetas, el riesgo está tratado con más dureza que si se mide en millones.

Un cuarto sistema consistiría en una transformación del de "mínimo garantizado", igual que el anterior, sustituyendo en la fórmula (5) t por σ/μ. De esta manera evitamos los "problemas de escala" del método de "penalización cuadrática" y pedimos probabilidades crecientes para considerar un valor garantizado según aumenta el riesgo relativo, medido por σ/μ, que es el coeficiente de variación, y no según el riesgo absoluto. La fórmula (5) quedará:

$$Z = \mu - \sigma^2 / \mu \tag{15}$$

operando:

$$\mu = \frac{1}{2}\left(Z \pm \sqrt{Z^2 + 4\sigma^2}\right) \tag{16}$$

tomando la rama creciente tenemos la figura 7.

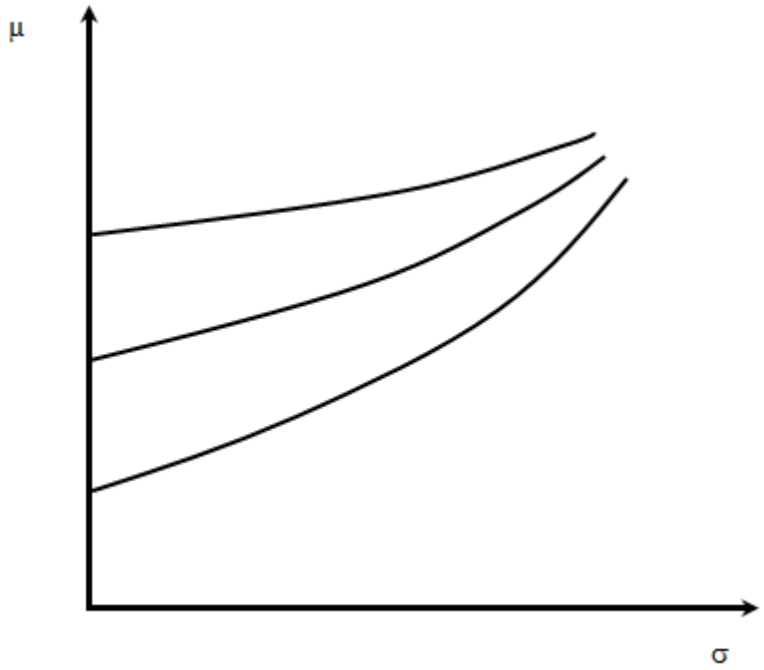


Figura 7

Este método de "*penalización cuadrática corregida*" puede resultar de interés, pudiendo hacerse consideraciones similares, por lo que se refiere a las probabilidades, que en métodos anteriores, por lo que no insistiremos en ellas.

Un quinto sistema podría ser la ampliación del anterior, añadiendo la posibilidad de introducir un parámetro m, que mida, de alguna manera, la aversión al riesgo del decisor.

$$Z = \mu - m \cdot \frac{\sigma^2}{\mu} \tag{17}$$

donde la t de la fórmula (5) ha sido sustituida por $m \cdot \sigma/\mu$. Operando:

$$\mu = \frac{1}{2}\left(Z \pm \sqrt{Z^2 + 4\,m\,\sigma^2}\right) \tag{18}$$

Tomando la rama creciente, tenemos la figura 8.

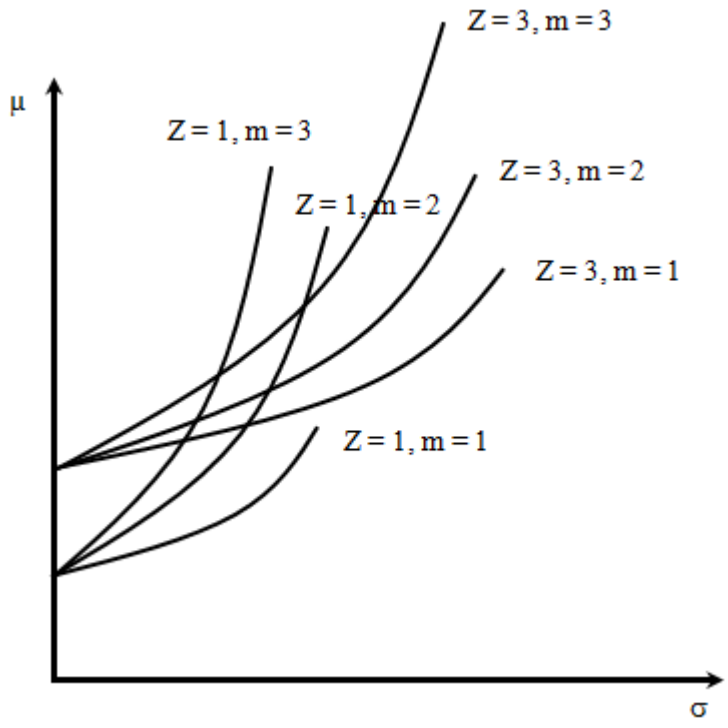


Figura 8

Este método de "*penalización cuadrática ampliada*" puede también resultar útil.

En resumen, creo que los métodos de "mínimo garantizado" (por su claridad y sencillez) y el de "penalización cuadrática ampliada" (el más elaborado) pueden resultar de interés. Sin olvidar que el lector puede razonar otros nuevos sistemas de penalización. (También puede ser interesante comentar que el segundo método propuesto, el de "mínima probabilidad de pérdida", puede utilizarse como requisito a cumplir, no aceptando proyectos con una probabilidad de pérdida mayor que x).

Para terminar, quiero resaltar dos ideas:

- Que los métodos expuestos (y los que, similares a éstos, pueden desarrollarse) tienen en común el que se penaliza la esperanza matemática del VAN (resultado medio) en función del riesgo y que tal penalización se hace por una fórmula sencilla. Para elegir la más conveniente, habrá que armonizar la deseable sencillez con el realismo en la forma de penalización (a ello nos puede ayudar el ver las curvas de indiferencia que corresponden a dicho sistema y ver si se ajustan o no a lo que pensamos).

- Que la existencia de un método, aprobado por las más altas instancias de la empresa, permite controlar algo más el quehacer de los decisores, ayudando a evitar la fobia al riesgo que antes comentábamos.

CONSIDERACIONES FINALES

A estos métodos de penalización se les puede criticar por su simplicidad. Así, los dos primeros hablan de "rectas" en vez de curvas de indiferencia. Un simple análisis gráfico sobre una curva de utilidad como la de la figura 2, nos indica que las curvas de indiferencia deben ser del tipo de las de la figura 3, es decir con pendiente creciente, pues los aumentos de riesgo exigirán aumentos crecientes en el resultado medio. El considerarlas como rectas es una simplificación, que puede ser justificable en algunos casos; otras veces pueden utilizarse dada su sencillez, aun conscientes de sus deficiencias teóricas.

Los restantes métodos, aun basándose ya en curvas de indiferencia, recogen la aversión al riesgo de forma sencilla. Se puede tratar de contrastar empíricamente si alguna de estas formas se adapta mejor a determinadas situaciones, pero entre tanto habrá que dejarse guiar por la intuición.

Los "métodos de penalización", tal como han sido expuestos en este trabajo, tienen antecedentes en varias publicaciones, algunos de ellos casi olvidados. Lo que yo he pretendido aquí es darles un nuevo enfoque y así tratar de despertar el interés por unos métodos que entiendo pueden resultar de utilidad (Un buen resumen sobre alguno de los citados antecedentes puede verse en Mao, 1975).

REFERENCIAS

DOBBINS, R. y S.F. WITT (1986): *Portfolio theory and investment management*. Basil Blackwell, Nueva York.

FERGUSON, C.E. y J.P. GOULD (1983): *Teoría microeconómica*. Fondo de cultura económica, Mexico, 2ª ed.

GOMEZ-BEZARES, F. (1983): *Cómo utilizar e interpretar la estadística*. Ibérico-Europea, Madrid.

GOMEZ-BEZARES, F. (1984): "Algunos modelos básicos para la selección de inversiones con flujos relacionados". *XIV Congreso de la SEIO*, Caja de Ahorros de Granada, Granada, vol. l, págs. 40-51.

GOMEZ-BEZARES, F. (1985): *Métodos cuantitativos de gestión*. Ibérico-Europea, Madrid.

GOMEZ-BEZARES, F. (1986): *Las decisiones financieras en la práctica*. Desclée de Brouwer, Bilbao.

MAO, J.C.T. (1975): *Análisis financiero*. El Ateneo, Buenos Aires, 2ª ed.

MARKOWITZ, H. (1952): "Portfolio selection". *Journal of finance*, 7, Marzo, págs.77-91.

MARKOWITZ, H. (1959): Portfolio selection: efficient diversification of investments. Wiley, Nueva York.

SHARPE, W.F. (1976): Teoría de cartera y del mercado de capitales. Deusto, Bilbao.

SUAREZ SUAREZ, A.S. (1985): Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa. Pirámide, Madrid, 7ª ed.

VAN HORNE, J.C. (1986): *Financial management and policy*. Prentice-Hall, Nueva Jersey, 7ª ed.

WESTON, J.F. y E.F. BRIGHAM, (1984): *Finanzas en administración*. Interamericana, Mexico, 7ª ed., 2 vols.

CRITERIOS DE SELECCIÓN DE INVERSIONES CON RIESGO[*] (Un análisis parcial)

por Fernando Gómez-Bezares
Publicado en el *Boletín de Estudios Económicos*, vol. XLII, nº 131, Agosto, 1987, págs. 287-321

INTRODUCCIÓN

El tratamiento del riesgo en las decisiones del área financiera de la empresa y, en general, en todas las decisiones de gestión, es un tema que todavía no está perfectamente resuelto. Sin embargo, los responsables de las decisiones saben muy bien que éstas se toman casi siempre sin tener certeza de los resultados que se obtendrán de los diferentes cursos de acción.

En el área financiera tenemos dos tipos fundamentales de decisiones, las de inversión y las de financiación. En este trabajo nos centraremos en las primeras, si bien mucho de lo que aquí vamos a decir puede utilizarse en multitud de decisiones empresariales, aunque no sean específicamente de inversión.

Las inversiones se evalúan según las generaciones de fondos que van a producir en el futuro. El criterio idóneo para tomar este tipo de decisiones es el del *Valor Actualizado Neto "VAN"* Supuesto un coste de los fondos k, que será el rendimiento mínimo que debo obtener a los fondos que yo invierto en mi empresa, habré de descontar los fondos generados (*GF*) por la inversión a ese tipo *K* y restar el desembolso inicial *D*; el resultado de esta operación es lo que yo me enriquezco o empobrezco por el hecho de llevar a cabo la inversión. Matemáticamente tenemos que este razonamiento da lugar a la conocida fórmula del *VAN*:

$$\mathrm{VAN} = \sum_{t=1}^{n} -\mathrm{D} + \frac{\mathrm{GF}_t}{(1+\mathrm{K})^t}$$

Esta fórmula presupone, en principio, que los datos necesarios para aplicarla son seguros. En tales condiciones el criterio VAN es superior a los demás[1].

[*] Deseo agradecer al P. Chacón su tarea, primero como profesor, después como director de mis investigaciones (entre ellas mi tesis doctoral) y, finalmente, estimulándome a colaborar con él. Mi formación en las técnicas cuantitativas, y mi método de investigación, están muy influenciados por esa relación.

Muy frecuentemente se opta por suponer que los datos son seguros, aunque esto no sea verdad en un sentido estricto, tomando como resultados ciertos los que no son más que los más probables[2]. Veremos en las páginas que siguen que tal proceder puede ser peligroso si no se conocen las deficiencias del método y cómo resolver de forma práctica y rigurosa el problema.

En otras ocasiones no se sabe prácticamente nada sobre cuáles serán los resultados de nuestras decisiones, es la denominada "incertidumbre total" o simplemente "incertidumbre". Veremos cómo afrontar esta situación.

Para tratar todas estas cuestiones la teoría financiera se apoya en la estadística y en la teoría de la decisión, disciplinas que muchas veces resultan difíciles para los hombres de empresa, por no estar habituados a su utilización. Trataré de prescindir en lo posible de los formalismos, centrándome en las aplicaciones. Es cierto que todavía no tenemos soluciones definitivas para el tratamiento del riesgo, pero lo que actualmente sabemos nos permite ya dar unas pautas de comportamiento racional, que permita hacer más coherente y eficaz el proceso de toma de decisiones en estas condiciones.

EL RIESGO

El resultado de una decisión depende, en muchos casos, de lo que ocurra con variables que escapan al control del decisor. Una inversión en una planta industrial puede ser más o menos interesante según lo que suceda con unos determinados contratos o, simplemente, con los gustos del público. Según el grado de conocimiento que tengamos sobre las variables que van a afectar a nuestra inversión, nuestro proceso decisorio será más o menos complicado.

A la hora de tomar una decisión caben distintas situaciones posibles, que denominaremos *ambientes*. Lo más sencillo es suponer que conocemos, con toda seguridad, lo que va a suceder; es el denominado ambiente de certeza. En la práctica esta situación no se da casi nunca (al menos en las decisiones empresariales que son las que aquí nos ocupan). Cuando se supone· que hay ambiente de *certeza*, la decisión de inversión se toma en base al Valor Actualizado Neto; si éste es positivo la decisión es interesante; cuando varias decisiones son mutuamente excluyentes, tomaremos aquella que dé un mayor VAN.

Una segunda posibilidad consiste en que, no teniendo certeza sobre lo que va a suceder, sí sabemos las probabilidades de que se dé cada hecho. Es el denominado ambiente de *riesgo*. Así, en nuestra inversión, podemos conocer cuáles son las probabilidades de que vendamos más o

---

[1] Puede consultarse cualquier texto sobre finanzas, especialmente elocuentes pueden resultar entre otros: Brealey y Myers (1981) y Copeland y Weston (1983).

[2] Estadísticamente hablando, habría que distinguir entre distribuciones de variable continua y de variable discreta. En las últimas el dato más probable coincide con la "moda", en las primeras no se puede hablar con propiedad de valor más probable, en realidad lo que existe es un valor (la moda) que hace máxima la función de densidad, sin embargo nosotros le llamaremos a ese también "valor más probable" En lugar de la moda puede utilizarse la media aritmética (más raramente la mediana), luego volveremos sobre esto. Para completar estos conceptos estadísticos básicos puede acudirse a Gómez Bezares (1983). Para una mayor profundización, Chacón (1955).

menos, de que los costes sean éstos o aquéllos, etc. En cada caso tendremos un VAN con su correspondiente probabilidad. Llegaremos, en definitiva, a una distribución del VAN, que puede ser como la de la figura l.

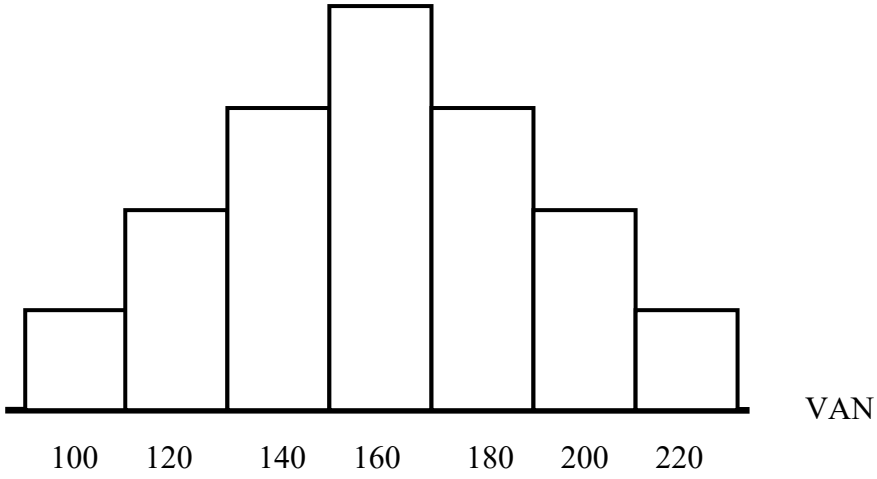


Figura 1

Es claro que el VAN más probable es 160, siendo los más improbables los extremos, 100 y 220. En estos casos es bastante frecuente razonar en base al VAN más probable de cada inversión (o a la media, que en este caso coincide) como si se tratara de hechos ciertos, tal manera de proceder es errónea desde un punto de vista teórico, y, además, peligrosa en muchas ocasiones. Más adelante volveremos sobre esto.

La tercera posibilidad se presenta cuando no sabemos nada sobre las probabilidades de que suceda una cosa u otra. Es el denominado ambiente de *incertidumbre*. Pensemos, en un caso muy simple, que voy a invertir en el desarrollo de un fármaco, sin saber si éste va a ser o no eficaz para combatir una determinada enfermedad. Es difícil, en un caso como éste, tener información histórica, o de otro tipo, que me permita conocer las probabilidades de éxito de mi inversión. En esta situación se encuentran casi todas las inversiones de innovación. La Teoría de la Decisión ha tratado de dar respuesta a este tipo de situaciones, estableciendo diferentes criterios (véase, p. ej., Gómez Bezares, 1986a). Sin embargo, ninguno de ellos resulta satisfactorio, quizá porque la incertidumbre, tal como la presentan los citados criterios, no se da en las decisiones empresariales.

En efecto, tal como yo entiendo la incertidumbre, ésta consiste en tener un completo desconocimiento sobre las probabilidades de que ocurra uno u otro hecho. Pero ante una decisión de inversión, lo normal es que el decisor, que habitualmente es una persona conocedora del problema o, al menos, suficientemente asesorada, tenga una información mejor que la total incertidumbre. En el caso del desarrollo del fármaco que comentábamos un poco más arriba, es fácil que el decisor cuente con algunos datos: seguramente conocerá la solvencia científica del director técnico del proyecto y de sus colaboradores, también tendrá una idea de las líneas de investigación que siguen otros laboratorios, podrá, en fin, hacerse asesorar por especialistas en el tema, que le saquen de su incertidumbre inicial. Será, en definitiva, capaz de inclinarse más o menos en una dirección, atribuyendo más probabilidades al éxito o al fracaso.

En este punto creo que nos puede ser de utilidad el concepto de *probabilidad subjetiva*. Cada vez son más los autores que dedican atención preferente a este tema (véase, p. ej., Fz. de Trocóniz, 1980). La teoría clásica de las probabilidades asignaba éstas en base a hechos objetivos, así tenemos:

- Por las cualidades físicas de un dado (si éste no está trucado) podemos deducir que cada una de las seis caras tendrá un sexto de probabilidades de salir.

- Por nuestra experiencia histórica, reflejada en unos datos, podemos conocer las probabilidades de que nieve en Bilbao en el mes de Marzo.

Podríamos poner otros ejemplos, pero no me alargaré en esta cuestión, pues creo que está suficientemente clara.

En casos como el del desarrollo del fármaco, tal como comentábamos, carecemos de probabilidades del tipo de las arriba enunciadas. No hay un modelo físico que nos permita atribuirlas, ni experiencia histórica sobre hechos suficientemente similares, que justifique tomar las probabilidades de lo sucedido en el pasado. Sin embargo, intuitivamente, sabemos que el decisor no está en una situación de total incertidumbre. Es capaz de considerar más creíble un hecho que otro, éste es el concepto de probabilidad subjetiva, la probabilidad es el *grado de creencia*. Así el decisor, o sus asesores, establecerán las probabilidades de los distintos hechos; en nuestro caso podemos suponer que se atribuye una probabilidad (grado de creencia) del 30% al fracaso y del 70% al éxito.

En estas condiciones hemos conseguido pasar de una situación de incertidumbre a una de riesgo. En las decisiones de inversión, y, en general, en la práctica totalidad de las decisiones empresariales, creo que no es procedente plantear los problemas en un ambiente de incertidumbre, pues habitualmente es posible transformar dicho ambiente en uno de riesgo. En mi opinión esto es lo que normalmente se puede y se debe hacer. Algunos consideran que la subjetividad, que es un peligro a la hora de evaluar las decisiones, se introduce de lleno en el proceso decisorio al atribuir los grados de creencia. Esto es cierto, pero no podemos desaprovechar una información, que por ser difícilmente mensurable, sólo puede dar lugar a una atribución subjetiva de probabilidades. Esto es todavía más patente cuando carecemos de otro tipo de información.

En definitiva, vemos que en las decisiones empresariales, como en tantos otros campos de la actividad humana, los distintos cursos de acción rara vez tienen un resultado unívoco; el decisor sabe que la opción que tome puede dar lugar a diferentes resultados. Cuando las decisiones son repetitivas, es fácil poseer información del pasado, que nos permita atribuir probabilidades a los diferentes resultados, y así suele suceder con las decisiones del día a día. Si yo tomo la decisión de comprar a un proveedor conocido, puedo saber las probabilidades de que me mande buen material o malo, de que me sirva pronto o tarde, etc., con sólo haberme tomado el cuidado de apuntar en el pasado su comportamiento. Pero en muchas decisiones empresariales, es difícil, por no decir imposible, el contar con tal información. Ante una inversión importante, lo normal es que la empresa carezca de suficiente experiencia sobre sus resultados; es posible que en el pasado se haya hecho alguna inversión similar, incluso idéntica, pero no las suficientes veces como para contar con información estadísticamente significativa; de todas formas, cuando se

cuenta con tal información se tiene un apoyo importante para la toma de decisiones. Este problema se agrava cuando el cambio se hace protagonista, tal como sucede en nuestro mundo actual. Es evidente que hemos asistido y seguiremos asistiendo a una importante revolución tecnológica, pero también cambian las costumbres y los gustos de los consumidores, cambian las relaciones de precios entre los productos, etc.

Con todo esto, la información histórica, rara vez es una base suficientemente sólida para establecer las probabilidades de éxito de una nueva inversión, pues ésta suele ser diferente y se desenvolverá en un entorno diferente al de sus predecesoras. Pero no sería justo suponer que no sabemos absolutamente nada, el decisor es capaz de atribuir un grado de creencia a los diferentes resultados, una probabilidad subjetiva. En realidad, lo que se produce es un proceso de *acumulación de información* que da lugar, finalmente, a la probabilidad citada. En efecto, la información histórica puede ser un punto de partida, pero ésta se matiza y completa con otro tipo de informaciones internas y externas a la empresa; llegamos así a poseer la mejor información posible y a partir de ella atribuimos la probabilidad. Este proceso puede ir desde la simple asignación de probabilidad a un hecho, diciendo, por ejemplo, mi grado de creencia de que el producto X triunfe es del 80%, hasta procesos más complejos donde se acumulan informaciones objetivas y subjetivas mediante la aplicación del teorema de Bayes.

Como *primera conclusión* de este trabajo tendríamos, en consecuencia, que el ambiente más habitual en la toma de decisiones empresariales, es el de riesgo; la certeza absoluta casi nunca existe y la total incertidumbre tampoco, pudiendo transformar esta última en una situación de riesgo mediante la asignación de algún tipo de probabilidades. En este campo juega un papel importante la probabilidad subjetiva y el proceso de acumulación de la información.

El problema aquí planteado resulta de especial actualidad. La innovación parece ser uno de los retos fundamentales de nuestro momento económico. Se discute sobre cómo estudiar las inversiones en innovación o simplemente las inversiones innovadoras; esto produce serios problemas, no siendo el menos importante la dificultad en la asignación de las probabilidades a los diferentes resultados posibles. No se pueden pretender soluciones milagrosas a un problema tan complejo, pero el conocimiento y la práctica en la utilización de la probabilidad subjetiva, pueden ayudamos a avanzar en la solución de ese problema.

LA DECISIÓN CON RIESGO

Supongamos que nos encontramos en un ambiente de riesgo, tenemos en consecuencia que cada una de las opciones posibles puede dar diferentes resultados, según los valores que tomen determinadas variables, conociendo además las probabilidades de que se den dichos valores. Pongamos un ejemplo sencillo, pensemos que nuestra empresa puede acudir a un concurso para conseguir que le adjudiquen la construcción de un puente. El presentarnos a dicho concurso conlleva una serie de gastos perfectamente conocidos, pero resulta mucho más difícil tratar de predecir el resultado. Supongamos que éste sólo depende de que nuestra única competidora oferte un precio más barato que el nuestro, para llevar a cabo la citada obra. Vemos que el resultado que obtendremos si nos presentamos al concurso, dependerá de una variable (que la

competencia vaya más cara o más barata que nosotros), y según el valor que tome dicha variable el resultado será uno u otro. Como hemos supuesto que estamos en ambiente de riesgo, hemos de ser capaces de asignar probabilidades a los dos estados posibles, así podemos decir que el que la competencia vaya más barato que nosotros (con el consiguiente fracaso de nuestra propuesta) tiene una probabilidad del 40% y el caso contrario un 60%. Para nuestro razonamiento posterior serán necesarios otros datos: para presentarse al concurso el coste es de 15.000.000 (por proyectos, trámites administrativos, etc.), en el caso de perderlo el dinero así invertido no tendría ninguna utilidad; si se ganara, los resultados actualizados de la ejecución del proyecto serían (sin descontar el coste de presentarse) de 30.000.000.

Ya hemos comentado con anterioridad, que en situación de riesgo, se comete con frecuencia el error de decidir en base a un determinado valor. En ocasiones se usa el más probable (la moda), en este caso tal postura nos llevaría a decidirnos, sin duda, por presentamos al concurso. Lo más probable es que lo ganemos (probabilidad del 60%) y en ese caso el resultado neto será:

30.000.000 - 15.000.000 = 15.000.000

La utilización del valor más probable plantea varios problemas, y en este caso concreto no es defendible, pues prescinde completamente de los resultados de la otra posibilidad (perder el concurso), cuyo valor neto será:

0 - 15.000.000 = -15.000.000

Para superar esta dificultad tenemos un procedimiento algo más elaborado: el criterio del *valor esperado*. Este criterio (también denominado de la Esperanza Matemática) calcula el valor medio de las diferentes posibilidades, según sus probabilidades, decidiendo en base a tal valor, que es el denominado valor esperado. En nuestro caso su cálculo será:

15.000.000 x 60% - 15.000.000 x 40% = 3.000.000

Dado que el valor esperado es positivo, la decisión correcta en base a este criterio sería presentamos al concurso. La lógica de decidir en base al valor esperado es sencilla; si nosotros repitiéramos, infinidad de veces, el hecho de presentarnos a un concurso de las mismas características que el que aquí estamos analizando, a la larga, de cada 100 veces, como promedio, en 60 ganaría y en 40 perdería; el resultado neto esperado de las 100 veces sería:

15.000.000 x 60 - 15.000.000 x 40 = 300.000.000

Para una vez, el valor esperado será:

300.000.000 / 100 = 3.000.000

Es evidente que la utilización del valor esperado es más justificable que la de la moda, pues el primero tiene en cuenta todos los resultados posibles, con sus correspondientes probabilidades; la segunda, por el contrario, sólo se fija en el resultado del valor más probable. Sin embargo, muchos decisores, cuando piensan en los resultados de las diferentes decisiones, a menudo se fijan, sobre todo, en el valor más probable. Esto se justifica en parte, por tratarse de un concepto más intuitivo; todo el mundo entiende qué quiere decir "lo más probable", pero algunos tienen dificultad en captar lo que se quiere decir cuando se habla de "valor esperado" Además, frecuentemente no existe gran diferencia en utilizar uno u otro concepto. Cuando las distribuciones son simétricas (iguales a la derecha y a la izquierda), no existe diferencia entre hablar de moda o de media (valor esperado). Puede verse esto en la figura 2.

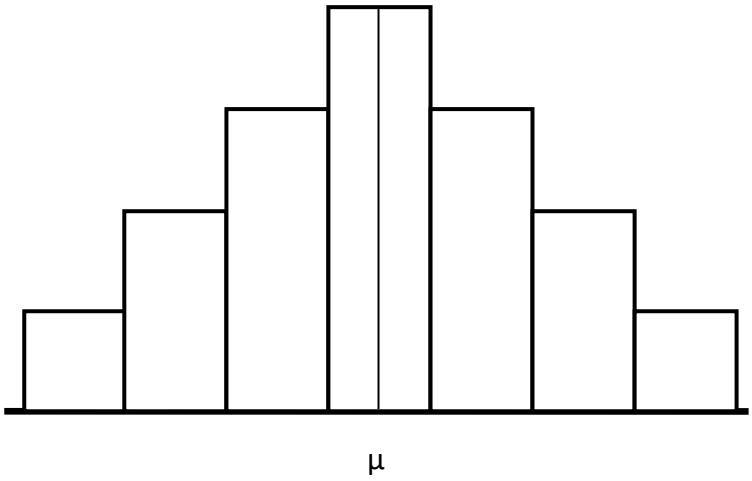


Figura 2

La media μ (valor esperado), coincide con la moda[3]. Esto no ocurre con distribuciones asimétricas, como es el caso antes comentado, con probabilidades del 40% y del 60%.

Desafortunadamente, el criterio del valor esperado tampoco es un buen criterio de toma de decisiones en condiciones de riesgo. El razonamiento que hacíamos antes para justificar su utilización, puede servirnos para comenzar a ver sus limitaciones. Decíamos que los tres millones (valor esperado de la decisión de presentarse al concurso) sería la media que yo obtendría como resultado si yo me presentase infinidad de veces al mismo. En consecuencia, dejándonos guiar por el criterio del valor esperado, eligiendo aquellas opciones que proporcionan unos resultados medios más altos, garantizamos el mejor resultado a largo plazo "siempre que podamos seguir repitiendo ese tipo de decisiones". En este último entrecomillado está el quid de la cuestión. En las decisiones de gran envergadura, como suelen ser las grandes decisiones de inversión a largo plazo, no suele ser posible el plantearse su repetición, mucho menos un número de veces suficientemente grande como para justificar el guiarnos en base al resultado medio. En este tipo de situaciones de poco me sirve que me garanticen un buen resultado "a la larga" si repito muchas veces la decisión, pues sé que no la voy a repetir. Diferente es el caso de las decisiones repetitivas, como puede ser el caso de las aceptaciones o rechazos que se producen diariamente en el control de calidad, es éste un caso en el que la

[3] También coincide con la mediana.

utilización del· valor esperado está plenamente justificado, y de hecho se usa como criterio de decisión en este tipo de problemas.

Quizá volviendo a nuestro ejemplo anterior, la decisión de presentamos o no al concurso, podamos aclarar todavía más estas ideas. Si la empresa que desea presentarse al concurso es de pequeña dimensión, probablemente veremos el tema bastante oscuro; si gana nuestro competidor la pérdida de quince millones puede resultar insuperable para nosotros y llevar la empresa a bancarrota; si esto sucede, de nada nos servirá el que el valor esperado sea positivo, no tendremos ningún consuelo por el hecho de que, si pudiéramos haber repetido muchas veces la decisión, a la larga nos hubiéramos beneficiado. Es lógico pensar que ante el peligro de fracaso (40% de probabilidades) una empresa pequeña no se arriesgue a presentarse al concurso.

Si, por el contrario, la empresa es grande, y suponemos que puede presentarse casi continuamente a muchos concursos como el arriba mencionado, la situación será sustancialmente diferente.

Los directivos de dicha empresa pensarán, con toda lógica, que lo normal no es que ganen todos los concursos ni que los pierdan todos, sino por el contrario lo correcto es pensar que unos los ganarán y otros los perderán; como media ganarán el 60% y perderán el 40%, y tiene sentido decir que, a la larga, ganarán una media de tres millones por cada concurso como éste al que decidan presentarse.

Podemos ver con claridad que el criterio del valor esperado tiene sentido en las decisiones repetitivas, pero no en las decisiones de gran envergadura y no repetitivas. En realidad, la diferencia fundamental consiste en el *tamaño relativo de la decisión*; así, en las pequeñas decisiones, aunque no sean todas iguales, la utilización del criterio del valor esperado en todas ellas, nos dará, a la larga, un óptimo resultado; unas nos saldrán mejor, otras peor, pero el conjunto de todas ellas nos dará una media muy cercana al valor esperado. En las grandes decisiones, aquéllas de las que la empresa puede tomar pocas, incluso en un período largo de tiempo, el valor esperado es un elemento a tener en cuenta, pero no como único criterio de decisión. En cualquier caso, el concepto de "grande" o "pequeña" es siempre relativo, y dependerá del tamaño de la empresa y del de sus decisiones habituales.

Existe un ejemplo que creo que es muy aclaratorio de lo que he comentado anteriormente: piense el lector que en un sorteo organizado por el Estado resulta agraciado con 5.000 pesetas y que existe la posibilidad, según las bases de dicho sorteo, de retirar tal cantidad o jugarla a cara o cruz, recibiendo doble si sale cara o nada si sale cruz (en consecuencia, con probabilidades del 50%). A nadie nos resultaría difícil el comprender que el afortunado jugador optase por probar suerte, quedándose al final con 10.000 o con nada. Si, por el contrario, la fortuna le hubiese deparado un premio de cinco millones, a muchos nos parecería una locura el jugárselos a doble o nada; la unanimidad, en esta opinión, sería probablemente absoluta si el premio hubiera sido de mil millones.

Técnicamente a esto se le denomina *aversión al riesgo*. Es lógico suponer, como puede deducirse de los párrafos anteriores, que los decisores actúan con aversión al riesgo, al menos en las grandes decisiones. La teoría económica justifica esto por medio del concepto de utilidad; suele suponerse que la utilidad marginal es decreciente, cuanto más tenemos, la utilidad de una

unidad adicional es cada vez menos interesante para nosotros. Con el dinero sucede algo parecido, si no tenemos nada y nos regalan un millón de pesetas, nuestra satisfacción por el regalo será mayor que si nos hacen ese mismo regalo cuando tenemos un capital de cien millones. Podemos suponer que es mejor tener más dinero que menos (utilidad creciente) y que las unidades adicionales cada vez dan menos utilidad (utilidad marginal decreciente). En tales condiciones, la utilidad tendrá una forma como la de la figura 3.

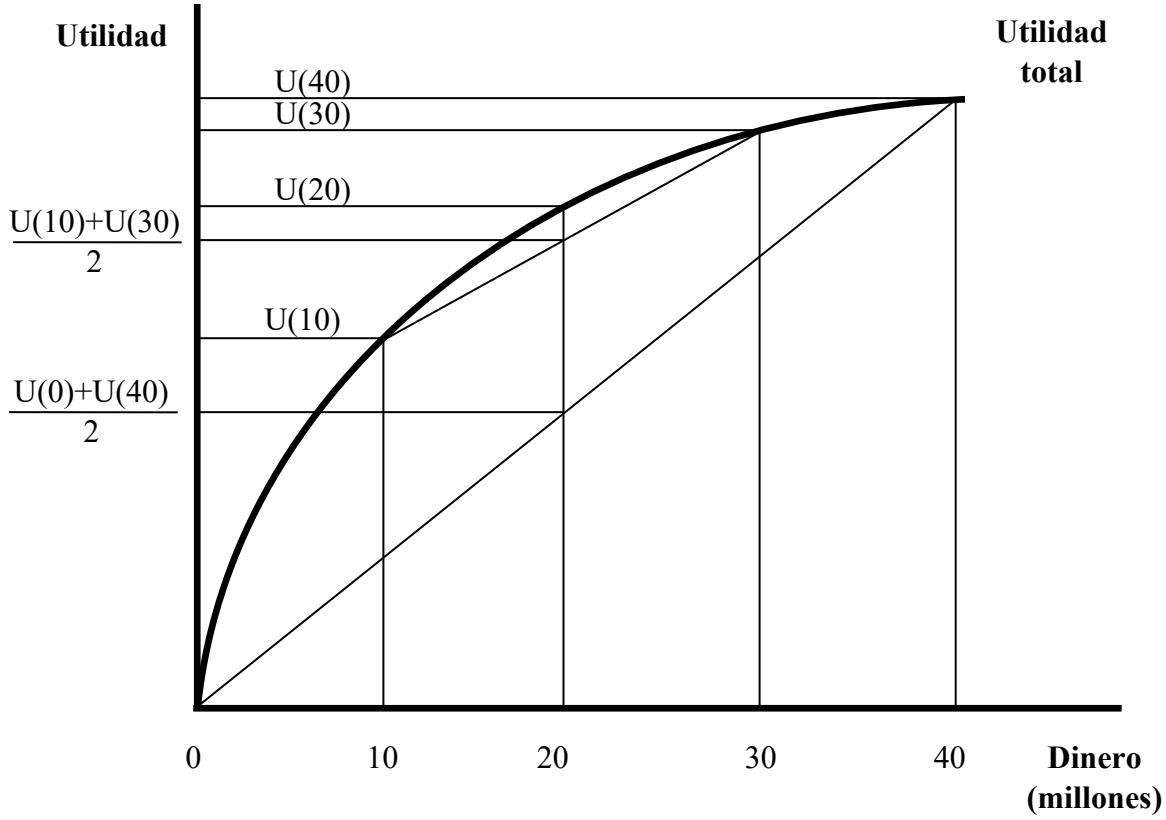


Figura 3

Supongamos (aceptando como buena la función de utilidad de dicha figura) que nos ofrecen tres posibles juegos[4]:

- Obtener, seguros, 20 millones.
- Obtener 30 con una probabilidad del 50% o 10 con otra probabilidad del 50%.
- Obtener 40 con una probabilidad del 50% o nada el otro 50% de las veces.

El valor esperado en las tres ocasiones es el mismo:

- En el primero, 20.

[4] Suponemos que la utilidad es una medida de intervalos (tal como se entiende en Gómez Bezares, 1983, pág. 23) según postularon Von Neumann y Morgenstern (1947).

- En el segundo: 30 x 50% + 10 x 50% = 20.
- En el tercero: 40 x 50% + 0 x 50% = 20.

Pero el riesgo es diferente, el tercer juego es más arriesgado que el segundo, y, este último, más que el primero. En efecto, en el tercer juego nos "arriesgamos" a ganar más y a perder más, hay más *dispersión*, y eso es el riesgo, la dispersión de los resultados. Estadísticamente, el riesgo se mide con las denominadas medidas de dispersión. Las más populares son la desviación típica (σ) y, su cuadrado, la varianza[5]. Parece claro que el tercer juego es el más arriesgado y el primero el menos; dado que los tres dan el mismo resultado medio, y ya hemos comentado que lo normal es actuar como enemigos del riesgo, el primer juego será el preferido y el último el menos interesante.

Estos resultados, a los que hemos llegado intuitivamente, se confirman gráficamente sobre la figura tres. La utilidad de 20 millones seguros queda por encima de la media de 30 y 10 (utilidad del segundo juego) y esta última por encima de la media de 40 y 0 (utilidad del tercer juego). En consecuencia, los enemigos del riesgo utilizarán a la hora de tomar sus decisiones el valor esperado, pero no como único criterio, sino matizado con la cantidad de riesgo que se asuma (medido éste por la desviación típica).

Junto a los enemigos del riesgo, la literatura sobre teoría de la decisión habla de los *indiferentes* y de los *amigos del riesgo*. Los primeros serían aquellos que no valoran el riesgo negativamente (tal como hacen los enemigos del riesgo) pero tampoco positivamente; en consecuencia, se dejarían guiar por el criterio del valor esperado, sin preocuparse para nada del riesgo. Este es el caso en el que nos encontramos todos, habitualmente, para las decisiones repetitivas y, en general, para las que hemos denominado "pequeñas decisiones". Menos interesante, desde el punto de vista de la práctica corriente en las empresas, es el caso de los "amigos del riesgo" Con esta expresión queremos denominar a aquellas personas que valoran positivamente el riesgo. Así, un jugador de lotería sabe que su valor esperado es negativo; a la larga, si sigue jugando tenderá a perder más que a ganar, de otra manera el organizador del juego (normalmente el Estado) perdería dinero, y eso no sucede. Sin embargo, no es una rareza en nuestra sociedad el que se participe en este tipo de juegos y habrá que convenir que determinadas personas, y para determinas cantidades (normalmente pequeñas), actúan como amigos del riesgo[6]. Sin embargo, tal comportamiento creo que no es muy justificable en las decisiones empresariales, donde en principio caben dos tipos de decisiones (desde este punto de vista) y, en consecuencia, dos comportamientos racionales.

- Decisiones pequeñas e indiferencia ante el riesgo[7].

---

[5] La utilización de la desviación típica (o de su cuadrado, la varianza) se justifica, además, porque si suponemos que las variables siguen la distribución normal (hecho bastante habitual en virtud del teorema central del límite), este parámetro y la media (valor esperado) definen perfectamente la distribución. En consecuencia, dicha distribución quedará perfectamente determinada por el resultado medio (valor esperado) y su riesgo (desviación típica). Para completar estos conceptos puede acudirse a Chacón (1955) y a Gómez Bezares (1983). Ver también Anexo II.

[6] Teóricamente esto puede justificarse suponiendo un tramo de utilidad marginal creciente en la parte izquierda del eje de abscisas, véase, por ejemplo, Gómez Bezares (l986b, pág. 270). Ver Anexo I.

[7] Provocada por la existencia de una zona lineal en la primera parte de la función de utilidad. Ver Anexo I.

- Decisiones grandes y aversión al riesgo[8].

Algunos autores denominan riesgo, únicamente, a la posibilidad de perder (o de ganar menos de lo previsto); personalmente no me parece acertada esa limitación del concepto de riesgo, y esto por una razón fundamental: cuando una persona se arriesga, entiende que puede ganar más o menos, existe una parte positiva del riesgo y una parte negativa del mismo. Por otro lado, aunque lo normal es considerar que los decisores actúan como enemigos del riesgo, por las razones antes comentadas, lo cierto es que para cantidades pequeñas algunos actúan como "amigos del riesgo" Este término no tendría ningún sentido si limitáramos el concepto de riesgo a las pérdidas. Y, además, estadísticamente, el riesgo viene asociado a dispersión (en más o en menos) y medido por la desviación típica[9].

De lo anterior podemos extraer una *segunda conclusión*, el valor esperado no es un buen criterio para la toma de decisiones en un ambiente de riesgo, y sólo es justificable cuando se actúa con indiferencia ante el riesgo; hemos visto que esto sucede con decisiones de escasa cuantía, o que al menos sean repetitivas, pero no es justificable para las grandes decisiones de inversión. En este último caso es preciso tener en cuenta el riesgo, por lo que puede ser interesante utilizar el citado criterio combinado con una medida del riesgo, como puede ser la desviación típica. En cualquier caso, el valor esperado parece más interesante que el valor más probable; con esto habrá que tener especial cuidado, pues, sin querer, muchas veces se tiende a identificar el segundo con el primero, sobre todo cuando no se tiene costumbre de manejar conceptos estadísticos.

PECULIARIDADES DE LA INVERSIÓN EMPRESARIAL

Establecido que en las grandes decisiones lo normal es actuar con aversión al riesgo, trataremos de ajustar todo esto a la práctica de la decisión de inversión. Establezcamos, en primer lugar, que nos vamos a referir exclusivamente a decisiones de inversión que resulten de cierta trascendencia para la empresa, luego nos centraremos en las grandes decisiones de inversión. En tales condiciones, ya hemos concretado que lo habitual es actuar como enemigo del riesgo. ¿Sucederá lo mismo cuando la decisión es tomada por ejecutivos, ajenos a la propiedad de la empresa?

La economía de mercado ha ido evolucionando en distintos aspectos, siendo, para nosotros, especialmente interesante en este momento, el cambio que se ha ido produciendo en la figura del *decisor*. Como tal entendemos, lógicamente, aquella persona sobre la que recae la responsabilidad de la toma de decisiones. En los primeros tiempos del capitalismo, fue el empresario, el propietario, el que las tomaba. Con el aumento del tamaño de las empresas, se ha ido produciendo una progresiva atomización del accionariado, que ha llevado la responsabilidad de la toma de decisiones a un grupo reducido de personas, cuya participación en la sociedad representa un porcentaje muy pequeño (a pesar de que la controlen). En muchos casos, ni siquiera los Consejos de Administración son los que toman las decisiones; dada la complejidad

[8] Provocada por la forma clásica de la función de utilidad, tal como se ve en la figura 3.

[9] Esto es perfectamente válido en el caso de la distribución normal, ver Anexo II, y, en principio, supondremos normalidad.

que éstas han alcanzado, son los ejecutivos los que las toman, rindiendo cuentas, de manera en ocasiones formal, a sus respectivos Consejos de Administración. Parece lógico que nos preguntemos cómo actuará este moderno tipo de decisores, que deciden sobre lo que no es suyo, asumiendo de manera peculiar el riesgo de sus determinaciones.

En una apreciación apresurada, tal vez tengamos la tentación de suponer que como "juegan" con el dinero ajeno, fácilmente asumirán riesgos que en otro caso no hubieran estado dispuestos a correr. Pero esto creo que es erróneo, hemos de pensar que los *Empleados-Decisores "ED"* (ejecutivos), a diferencia de los *Propietarios-Decisores "PD"* (empresarios), corren más el riesgo de perder que el de ganar, luego parece que serán más enemigos del riesgo los primeros que los segundos. En efecto, los PD recibirán más si las cosas van bien y menos si van mal, cuando asumen el riesgo, lo hacen de una manera completa, con su parte positiva y su parte negativa. Los ED, por el contrario, recibirán poco o nada más si las cosas van bien y pueden verse muy perjudicados si van mal; supongamos una situación bastante corriente: un ejecutivo (ED) debe enfrentarse a una inversión arriesgada, si ésta va bien podrá aumentar de forma considerable el dividendo que pueden recibir los accionistas, además de aumentar moderadamente su sueldo vía participación en beneficios. Si las cosas salen peor de lo previsto, los accionistas verán reducido su dividendo y él puede llegar incluso a ser despedido, con un grave perjuicio para su prestigio profesional. Existe, lógicamente, una salida diferente que consiste en olvidarse de la citada inversión y mantenerse en la situación actual. Es probable que los ED –"tecnoestructura" según la terminología de Galbraith (1972)- opten en la mayoría de las ocasiones por no acometer la inversión a la que nos referíamos anteriormente. ¿Qué interés le va a mover a beneficiar a un desconocido accionista con el riesgo de destrozar su carrera profesional?

Para Fama (1980) los gestores se verán incentivados a cumplir el objetivo financiero (maximizar la riqueza del accionista) por el propio mercado, aquellos ED que sean eficaces de acuerdo con los intereses de los accionistas. serán más valorados: otros autores consideran que además deberán ser convenientemente incentivados y vigilados (Jensen y Meckling, 1976).

Aplicando esto a nuestro caso, la discusión consistiría en saber si el mercado recompensará adecuadamente a los ED que se arriesguen según los intereses de los accionistas, castigando a los que actúen de otra manera. Personalmente estoy convencido de que no; la trasparencia de nuestros mercados deja mucho que desear y creo que el mercado de ED tiene problemas que lo hacen todavía menos trasparente, debido al necesario sigilo que ha de mantenerse sobre muchas cuestiones. Consideremos, simplemente, lo difícil que es saber qué parte del fracaso de una empresa se debe al azar y qué parte a cada uno de sus ED, juzgando desde fuera de la empresa, desde el mercado. Pero aun en el mercado más trasparente, tal juicio sería en muchas ocasiones poco riguroso; las grandes decisiones de inversión suelen tomarse en base a previsiones más o menos creíbles, y aunque éstas estuvieran llenas de rigor, hemos de reconocer que la teoría financiera está todavía lejos de dar una respuesta definitiva al tratamiento del riesgo.

Sin embargo, existen algunas soluciones que ya pueden ser aplicadas, desde las muy complejas hasta las más prácticas, no me detendré en las primeras, pues superan el nivel y el espacio de este trabajo[10], pero sí hablaremos en seguida de las segundas.

[10] Puede consultarse por ejemplo Copeland y Weston (1983).

De todas formas, es importante que tengamos en cuenta esa previsible actitud negativa de los ED ante el riesgo, aversión mayor de lo que sería justificable[11]. Si unimos a esto la importancia de que la creatividad y la innovación, que normalmente conllevan decisiones arriesgadas, sean protagonistas en las empresas (Toledo, 1986), parece evidente que es preciso idear sistemas de incentivación y control de las actitudes de los ED ante el riesgo.

Sin entrar en profundidad en el tema de la incentivación, sí apuntaré sin embargo dos ideas: la primera, que es preciso que el decisor que ha tomado correctamente una decisión arriesgada, si los resultados de ésta son malos (en el hecho de que pueden ser buenos o malos consiste el riesgo), pueda utilizar para su descargo la metodología en la que basó la decisión. A un ingeniero, al que se le cae un puente, no se le puede censurar si sus cálculos se ajustan a lo establecido; incluso en esas actividades, tan fundamentadas en el cálculo matemático, existe una parcela para el azar. Parece lógico que las compañías establezcan también sus normas de decisión y se justifique al que decida según las mismas. Pero, además, dado que las predicciones son subjetivas, será preciso también dar un incentivo suficiente, que haga que el ED participe de los resultados de su decisión. Sin olvidar la importancia de que la "cultura de la empresa" estimule el riesgo.

La *tercera conclusión* sería doble: los gestores tienden a ser demasiado enemigos del riesgo y como esto no es bueno han de ser incentivados y controlados.

TRATAMIENTO DEL RIESGO

Aceptado que el riesgo puede y debe medirse con la desviación típica y que los decisores actuarán normalmente con aversión al riesgo, nos encontramos en este momento preparados para afrontar el tratamiento de este problema, de manera que tengamos unos criterios que nos ayuden a decidir correctamente. No nos centraremos en planteamientos demasiado complejos, que a menudo resultan inaplicables, prefiriendo una visión que, manteniendo el suficiente rigor, ponga su acento en posibilitar su aplicación. Con todo, hemos de ser conscientes de que el tratamiento del riesgo, incluso en sus versiones más elementales, exige un grado de abstracción teórico, superior al que hasta ahora ha sido corriente en las decisiones empresariales.

Dado que en condiciones de certeza existe acuerdo sobre la supremacía del VAN para la toma de decisiones de inversión, puesto que nos indica el nivel de aumento del valor de la empresa provocado por la toma de la decisión, intentaremos adaptar el VAN como criterio de decisión en situación de riesgo. Tradicionalmente lo más popular ha sido aplicar el denominado *ajuste del tipo de descuento* (ver, p. ej., Gómez Bezares, 1986b), éste consistía en exigir un tipo k más alto a las inversiones con más riesgo. Se trata de una solución altamente intuitiva, que debe a esta característica gran parte de su éxito. Su dificultad más acusada reside precisamente en la determinación de ese tipo *k*.

[11] En un reciente estudio que he dirigido se confirma claramente la mayor aversión al riesgo de los ED que de los PD. Ver Anexo III.

Emparentadas con este método están las modernas teorías basadas en el riesgo sistemático, medido con las famosas β. Así, según el *CAPM*, cada activo, y en consecuencia cada inversión, tiene un riesgo sistemático, no diversificable, y en función de ese riesgo deberemos exigir el tipo de descuento correspondiente (ver, p. ej., Van Horne, 1986). Sin embargo, la validez del CAPM está muy cuestionada, pues cuando ha sido contrastado en el mercado, sus resultados han de calificarse, en muchas ocasiones, de decepcionantes. En España concretamente tenemos, entre otros, el trabajo de Bergés (1984) que nos lleva a poner seriamente en duda su validez en nuestro mercado[12]; y si esos problemas aparecen en el mercado bursátil, fácil es imaginar que en mercados mucho menos eficientes (que es lo que afecta a la gran mayoría de los activos por no cotizarse en bolsa) la situación será peor[13].

En la práctica, el "ajuste del tipo de descuento" suele hacerse estimando el tipo *k* de forma bastante arbitraria; así, por ejemplo, es normal añadir al tipo de interés libre de riesgo (utilizando, verbigracia, el tipo de las obligaciones del Estado) una prima por riesgo (establecida subjetivamente)[14], obteniendo así el citado tipo *k*[15].

Un segundo método de tratamiento del riesgo es el que yo denomino de *penalización directa del VAN*, y que he expuesto en diferentes trabajos (recientemente en Gómez Bezares, 1986 b y c), veamos su fundamento teórico y su aplicabilidad.

Hemos dicho que riesgo es variabilidad, y, utilizando el VAN será la desviación típica de la distribución del VAN, en la figura 4 podemos ver dos distribuciones del VAN, la 4-a y la 4-b.

Estas distribuciones nos indican las diferentes probabilidades de obtener los distintos valores posibles del VAN. En la primera los resultados están más concentrados alrededor del valor esperado "130", en términos estadísticos diríamos que la desviación típica es menor, y, en términos de decisión, que hay un menor riesgo. En la segunda, los valores están más dispersos, la desviación típica es mayor, también lo es el riesgo.

---

[12] En la actualidad estoy dirigiendo un trabajo de estimación del riesgo sistemático de las acciones más importantes que cotizan en la bolsa de Bilbao, y, aunque todavía no tenemos los resultados definitivos, parece que se va dando una cierta adaptación del CAPM a la realidad bursátil, si bien estamos lejos de un resultado suficientemente satisfactorio. Quizá en el futuro, con un mercado más desarrollado, el modelo sea más aplicable, al menos para activos bursátiles, tal como ya sucede, si bien con cuestiones discutibles, en la bolsa de Nueva York.

[13] Entre los modelos alternativos al CAPM, yo destacaría el APT, al que suele concedérsele prioridad sobre el primero (Ross, 1976, y Roll y Ross, 1980). Pero personalmente se me plantean algunas dudas, sobre las que actualmente estoy trabajando. Sin cuestionar el armazón teórico del modelo, que como sabemos da lugar a un análisis factorial, lo cierto es que cuando se tratan de obtener los factores en el mercado, resultan complejos y, en alguna ocasión, más parecen reflejar las propias ineficiencias del mercado que un comportamiento coherente.

[14] Para el establecimiento de esa prima de riesgo podría ser interesante la utilización del CAPM, pero, dado que es algo complicado y criticable teóricamente, su uso es muy reducido en nuestro país.

[15] Como alternativa al ajuste del tipo de descuento, tenemos el equivalente de certeza. Las ventajas y desventajas de ambos métodos han sido discutidas en distintos lugares (véase, por ejemplo, Gómez Bezares, 1986b, págs. 283 y ss.). En base al CAPM, ambos métodos pueden resultar indiferentes (puede consultarse Copeland y Weston, 1983, pág. 196, ver también cap. 11)

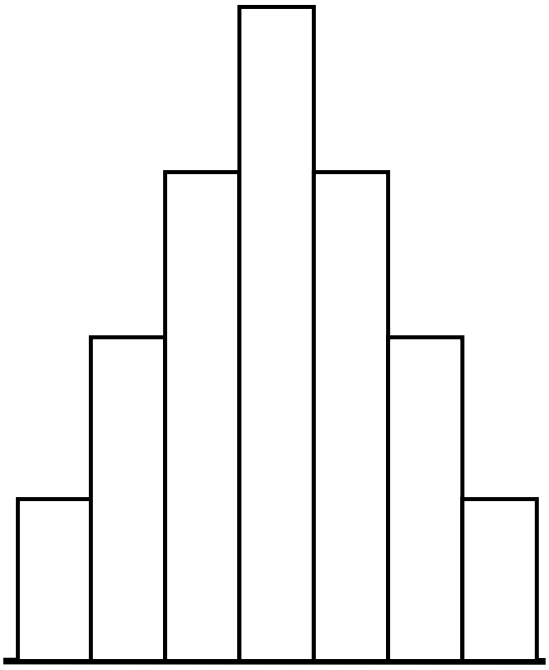


Figura 4a

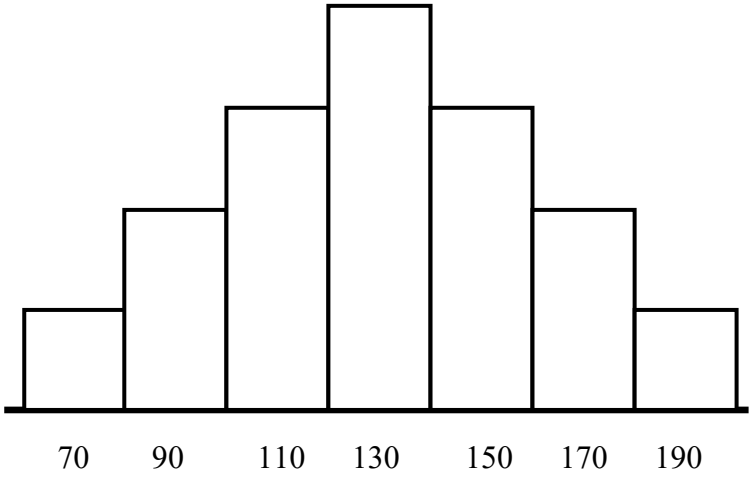


Figura 4b

Aunque en ambas distribuciones tenemos un valor esperado idéntico “130”, el riesgo en la segunda es mayor que en la primera, luego actuando como enemigos del riesgo deberíamos preferir la representada en la figura 4-a. En general, los decisores, para igual valor esperado, preferirán aquella alternativa con menor riesgo, y para asumir un mayor riesgo pedirán un mayor valor esperado. Gráficamente esto puede dar lugar a unas curvas de indiferencia como las de la figura 5.

Cada una de las curvas de esta figura representa un nivel determinado de utilidad; es decir, a lo largo de una curva se mantiene una situación de indiferencia. El decisor que se sienta identificado con la forma de estas curvas, será indiferente ante las decisiones que den lugar a

combinaciones de valor esperado y riesgo, que se mantengan a lo largo de una misma curva. Prefiriendo siempre las decisiones que den lugar a combinaciones que nos lleven a una curva superior.

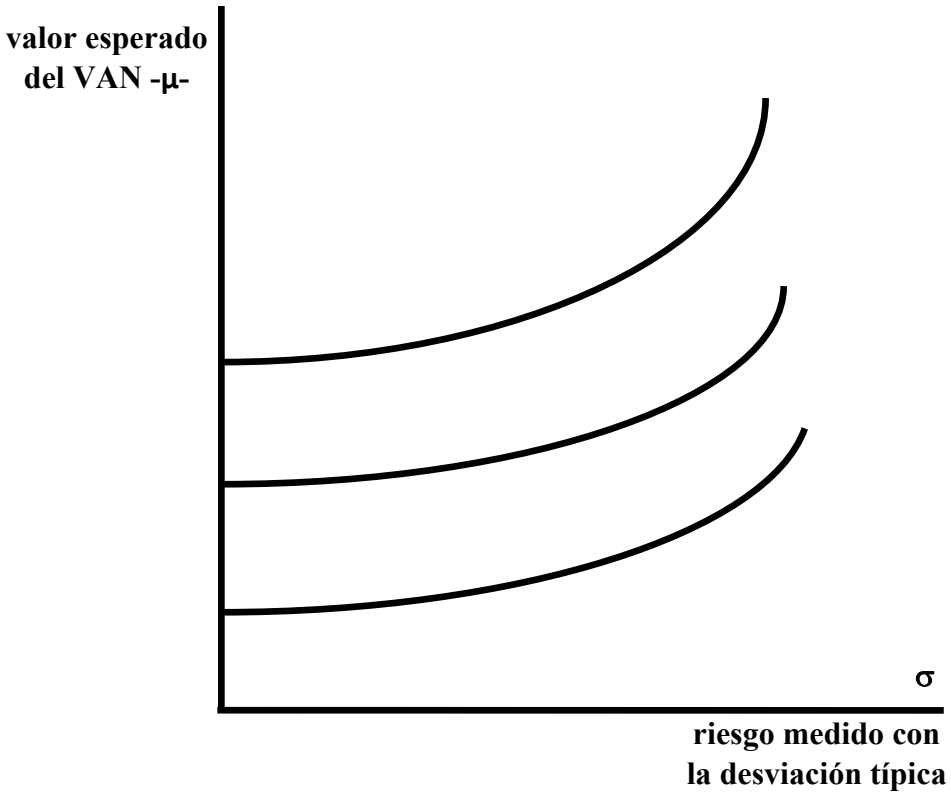


Figura 5

De aquí no es difícil colegir que el decisor "penaliza" las decisiones en función de su riesgo. Supongamos dos decisiones:

- La "a", con valor esperado 1.000 y desviación típica 400.
- La "b", con valor esperado 600 y desviación típica 200.

Representaremos a la primera como (1.000,400) y a la segunda como (600,200). No es evidente que todo decisor prefiera (1.000,400) a (600,200), pues, aunque la primera da un mayor valor esperado del VAN, también soporta un mayor riesgo. Imaginemos un decisor para el que las dos decisiones antedichas resultaran indiferentes, habría que concluir que:

$$(1.000,400) \sim (600,200)$$

donde ~ significa equivalente o indiferente. En tal situación el valor esperado del VAN, o VAN medio, sería penalizado por el decisor en función de su riesgo, de tal manera que dos decisiones aparentemente diferentes, pueden resultar indiferentes para un determinado decisor.

(Lógicamente, dado que el riesgo aparece de forma explícita para penalizar al valor esperado, los VAN a los que aquí nos estamos refiriendo, se calculan descontando al tipo libre de riesgo).

En general, podemos suponer que, ante las grandes decisiones de inversión, lo normal es tener un sistema de preferencias entre el VAN esperado y el riesgo, que dé, más o menos, un conjunto de curvas de indiferencia similar al de la figura 5. En tal situación el riesgo se penaliza de forma "creciente", dando así lugar a unas curvas de pendiente también creciente.

Si suponemos que el sistema de penalización es lineal, proporcional, tendremos unas rectas de indiferencia, en consecuencia, con pendiente constante, como las de la figura 6.

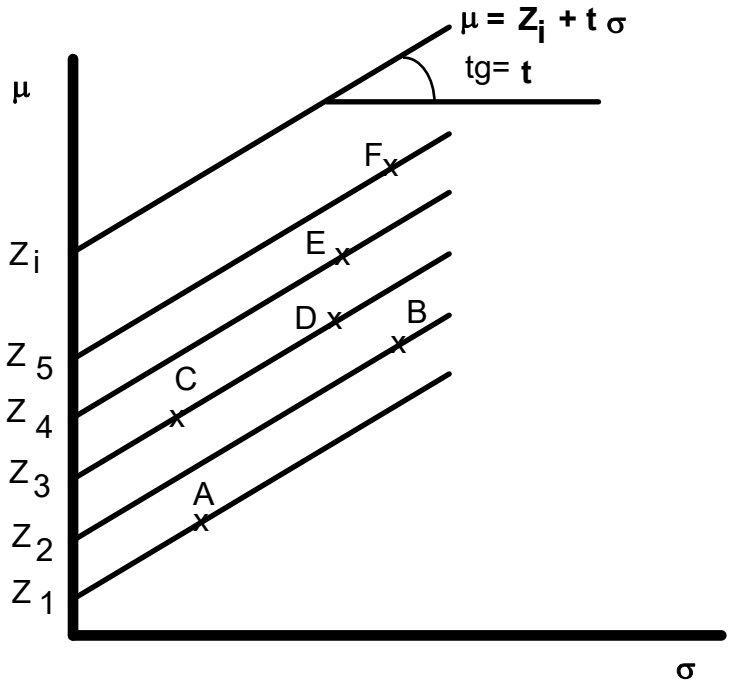


Figura 6

En este sistema de rectas se ve claro, por ejemplo, que las decisiones C y D resultan indiferentes, mientras que la E es superior a ellas, y la B inferior. Utilizar estas rectas es equivalente a mantener un sistema de penalización lineal; en efecto, si penalizamos linealmente y llamamos Z al valor una vez penalizado, tendremos:

$$Z = \mu - t\,\sigma$$

luego:

$$\mu = Z + t\,\sigma$$

donde *t* es la pendiente de cualquiera de las rectas, y representa el factor constante de penalización. Cada valor de Z en la figura, representa un nivel distinto de utilidad y, a lo largo de cada recta, la utilidad es constante. Es evidente que el considerar "rectas" de indiferencia, es una

simplificación importante que, desde un punto de vista teórico, puede justificar discrepancias con el análisis; sin embargo, creo que tal simplificación, puede quedar justificada por las ventajas prácticas de su utilización.

Supongamos que, en el ejemplo anterior, donde se daba la indiferencia entre dos decisiones: (1.000,400) ~ (600,200), el sistema de penalización es lineal, tendremos:

$$Z = 1.000 - t\ 400$$

$$Z = 600 - t\ 200$$

dado que son decisiones indiferentes, el nivel de utilidad Z será idéntico, en consecuencia:

$$1.000 - t\ 400 = 600 - t\ 200 \rightarrow t = 2$$

Gráficamente tendremos la recta de la figura 7. El valor de Z de ambas decisiones es 200, y tal valor representa la utilidad de las mismas. En la figura es el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas.

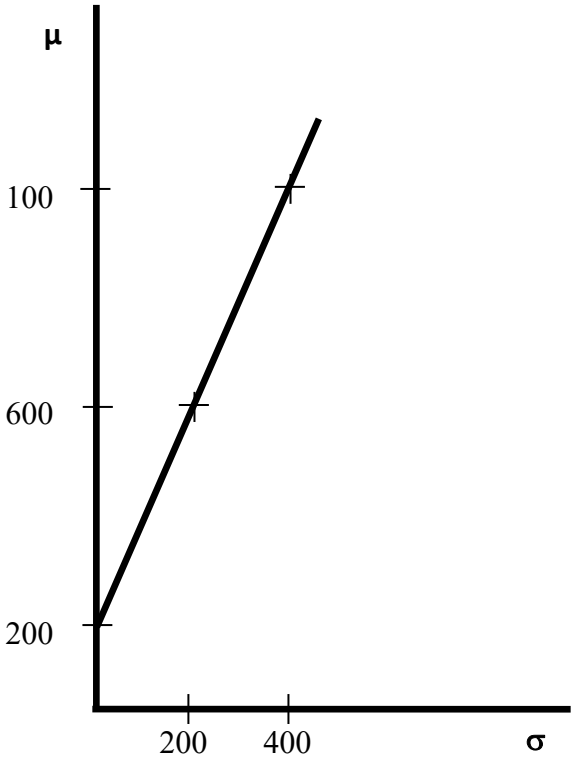


Figura 7

Si aceptamos como válido este sistema de penalización, una vez conocidas la μ y la σ[16], basta con determinar el valor de *t*. Es fácil demostrar que, si el VAN sigue la distribución normal, la *t* indica la probabilidad de que la realidad sea peor que el valor indicado por *Z*[17]. Utilizando las tablas de la distribución normal, podemos calcular unos valores de t y sus correspondientes probabilidades de que el VAN real sea inferior a *Z*.

Valor de t	Probabilidad de que el VAN real sea inferior a Z	
1,5	1-0,06681 = 0,93319	93,319%
2	1-0,02275 = 0,97725	97,725%
2,5	1-0,00621 = 0,99379	99,379%
3	1-0,00135 = 0,99865	99,865%

Los últimos responsables de la decisión, por ejemplo, el Consejo de Administración, deberán establecer cuál es la probabilidad que consideran suficientemente alta como para decidir con suficiente confianza[18]; si concluyen que el 97,725% es una probabilidad suficientemente alta como para estar tranquilos, es fácil colegir que se está pidiendo una $t = 2$. Con ese valor de t se calcularán las *Z* de los proyectos de inversión, decidiéndose en función de esos valores *Z*; serán preferibles aquellos proyectos con *Z* más alta, pues en este valor se tiene en cuenta *el valor esperado (μ), el riesgo (σ) y el grado de aversión al riesgo (t)*.

Existen multitud de posibilidades a la hora de penalizar, en general más complejas que la lineal, algunas de ellas ya comentadas en trabajos anteriores[19]; la idea que preside todas ellas es conseguir un valor *Z* que, partiendo del VAN, recoja la información disponible sobre valor esperado, riesgo y actitud ante el mismo.

Volviendo a nuestro valor *Z* de antes, éste representa el "mínimo garantizado de VAN", con una determinada probabilidad; por eso podemos llamar a este sistema de penalización "*método del mínimo garantizado*" (en adelante, cuando hablemos de penalización, nos referiremos a este sistema).

La *Z* obtenida tras la penalización es una trasformación del VAN, y como tal, trata de indicar el enriquecimiento producido por la toma de la decisión. Además, dicha transformación viene matizada en función del riesgo. En consecuencia, parece perfectamente lícito decidir en función del citado valor *Z*, que es un *Valor Actualizado* (se sobrentiende que neto) *y Penalizado*;

---

[16] Para su cálculo véase Anexo IV.

[17] Véase Gómez Bezares (1986b, pág. 288).

[18] Téngase en cuenta que, pidiendo una probabilidad muy alta para decidir con tranquilidad, se penalizarán excesivamente las decisiones con más riesgo.

[19] Tenemos así $Z = \mu/\sigma$, que ordena los proyectos en función de su probabilidad de tener un VAN > 0; pero este sistema parece mejor como un mínimo a cumplir (que todos los proyectos superen una determinada probabilidad de VAN positivo), que como un sistema de clasificación. En general existen diferentes maneras de penalizar la μ con funciones no lineales de σ, pero en este trabajo nos hemos centrado en el método más sencillo, la penalización lineal; que creo que, por su sencillez, puede resultar el sistema más aplicable. Esto puede completarse con $Z = \mu/\sigma$, como criterio complementario. Todo esto puede ampliarse en Gómez Bezares (1986 c y b, págs. 286 y ss.).

propongo que en adelante lo denominemos por sus siglas: "*VAP*" Parece claro que el VAP es una medida de utilidad.

Podemos establecer una *cuarta conclusión*: entre el "ajuste del tipo de descuento" y la "penalización del VAN", "VAP", parece que el segundo puede ser más aplicable, siempre que seamos capaces de estimar μ y σ.

EL VAP Y SUS PROPIEDADES

Para terminar, vamos a hacer algunas consideraciones teóricas, que, por superar el nivel medio de lo expuesto hasta el momento, pueden resultar algo áridas para el lector, si no está muy introducido en la moderna teoría financiera.

El VAN tiene una propiedad que últimamente suele destacarse, su *aditividad*. Entendemos como tal, que los VAN de diferentes inversiones independientes, pueden sumarse para obtener el VAN de la inversión total. En condiciones de certeza, tal propiedad es prácticamente inmediata. En el caso de riesgo, el problema se complica. En este caso es difícil hablar con propiedad de inversiones independientes, dado que es preciso que sus covarianzas sean nulas[20]. Este problema suele resolverse diciendo que sólo ha de considerarse el riesgo sistemático. Ajustando el tipo k para tal riesgo, y calculando el correspondiente VAN, éste sigue siendo aditivo; pero ya hemos comentado que la diferenciación entre riesgo sistemático y diversificable tiene discutible validez práctica, entre otras cosas por suponer que los accionistas son capaces de diversificar todo el riesgo diversificable.

La otra posibilidad es la utilización del concepto de inversión total. Según esto no podemos analizar las inversiones aisladamente, sino conjuntamente unas con otras, incluidas las inversiones en funcionamiento y en curso. De esta manera, hablaríamos de distintos paquetes o carteras de inversiones posibles, cada una con su VAN (descontado a un tipo *k* en función del riesgo total), eligiendo la cartera más interesante. Pero esto tampoco es, teóricamente, demasiado convincente, pues supone que los accionistas no son, en absoluto, capaces de diversificar, lo que tampoco es absolutamente cierto.

Esto nos lleva a una situación realmente compleja, sobre la que la teoría financiera no tiene, todavía, una respuesta unánime. La solución más lógica parece ser la utilización de ambas aproximaciones simultáneamente, optando, cualitativamente, por un intermedio entre ambas. En la práctica, dependiendo de la perfección del mercado, será más sostenible inclinarse hacia un lado o hacia otro. Dado que nuestros mercados son bastante imperfectos[21], habría que optar, básicamente, por el riesgo total, procedimiento altamente laborioso.

Basándonos en el VAP, podemos actuar de forma similar; penalizando en función del riesgo sistemático o del total. Por lo ya visto, nos inclinaremos por el total; sin embargo, suele ser poco

[20] Por simplificar el problema, hasta este momento prácticamente hemos prescindido de los problemas que plantea la correlación entre proyectos, suponiendo, implícitamente, que ésta era nula. Pero ahora hemos de abordar esta cuestión.

[21] Sobre todo si pensamos en las empresas que no cotizan en bolsa, que son la mayoría.

práctico, calcular la μ y la σ de los VAN de todas las posibles carteras, paso previo para el cálculo de los VAP. Tratemos de idear un procedimiento viable, aun prescindiendo de algunos perfeccionismos teóricos. Lo importante es el riesgo aportado por los nuevos proyectos al total de la empresa; si suponemos riesgos de similares características, lo fundamental será el tamaño relativo de dichos proyectos (respecto a la empresa en cuestión). Los pequeños serán diversificados por la propia empresa, al acometer casi simultáneamente varios parecidos; los grandes no tendrán esta cualidad y aportarán en consecuencia riesgo a la empresa. En consecuencia, los primeros no deben ser penalizados y los segundos sí (variando, por lo tanto, la *t*, según el tamaño de la inversión)[22].

En el punto anterior suponíamos que no existía correlación entre las inversiones. Pero también puede tener importancia (si bien es mucho más difícil de calcular), la covarianza del nuevo proyecto con los preexistentes y, en consecuencia, su correlación. Si ésta es alta y positiva, la penalización debe ser también alta; si la correlación es cero, la penalización será menor, pudiéndose dar situaciones, incluso, de penalización negativa para casos de correlaciones fuertemente negativas.

También es posible graduar la penalización en función de las posibilidades de diversificación de los accionistas, pues aun no aceptando el CAPM al 100%, hay que suponer que alguna validez sí tiene.

En consecuencia, el VAP dará lugar en su utilización práctica a que decisores con igual actitud ante el riesgo, e incluso en la misma empresa, penalicen de forma distinta las diferentes decisiones[23]. Así considerado, el VAP sirve para analizar la inversión individual, manteniendo, si bien con ciertas reservas, el principio de aditividad.

Creo, *en conclusión*, que el VAP puede ser una alternativa al VAN, calculado éste con una *k* ajustada. En mercados perfectos, no discuto la supremacía de la utilización de una *k* estimada (usando CAPM, etc.)[24], pero creo que un sistema como el VAP propuesto puede resultar muy útil en mercados como los nuestros. Esto resulta todavía más claro cuando pensamos en empresas que no cotizan en bolsa. Por otro lado, el VAP se presta a un control por parte de los Consejos de Administración sobre los ejecutivos ED, pues los valores de la penalización son fáciles de establecer.

Para terminar, quisiera hacer algún comentario sobre la *Tasa de Rentabilidad Interna "TRI"*. Ya hemos comentado que, en condiciones de certeza, el VAN es superior por diferentes razones (véase, por ejemplo, Gómez Bezares, 1986b, cap. 5). En condiciones de riesgo la superioridad del VAN se mantiene, pudiendo hacerse consideraciones paralelas a las vistas, respecto la

---

[22] Aparece así una penalización creciente, al crecer el riesgo: lo mismo que sucedía en la figura 5.

[23] Utilizando estos conceptos (y con la colaboración de Susana Rodríguez) preparé un estudio sobre ahorros energéticos compartidos para el Ente Vasco de Energía -EVE-, que aparece recogido en Alvarado (1987, págs. 53 y ss.). En ese caso están aplicados al TRI, que en el planteamiento propuesto no plantea problemas.

[24] Una consideración teórica adicional es que el ajuste de la *k* puede causar problemas en el caso de inversiones multiperiodo; esto puede constatarse en Van Horne (1986, pág. 204). Para un análisis más extenso Copeland y Weston (1983, cap. 11). Pero estos problemas parecen excesivamente teóricos y en el caso del VAP, al tratarse de un modelo simplificado, creo que es mejor prescindir de ellos. Quizá trabajos posteriores puedan profundizar en el tema.

posibilidad de hacer análisis globales o individuales de las inversiones. También puede plantearse un TRI penalizado (ver nota 23). Si se tiene cuidado no suele haber problemas en la utilización del TRI, que suele resultar más intuitivo para las personas no expertas en finanzas.

Un problema que se puede dar al usar el TRI y que se puede agravar en el caso del riesgo, es el de la diferente dimensión de las inversiones. En efecto, no tiene el mismo significado una determinada desviación típica en una inversión de 1.000 pesetas que en una de 1.000 millones (entendida ésta en términos de TRI). Supongamos:

- Media de la TRI = 0,20.
- Desviación típica de la TRI = 0,20.

Si no nos dan el tamaño de la inversión no podremos decidir. Si este caso lo planteamos por el VAN, la inversión mayor dará mayor desviación y vemos en la figura 5 que se justifica una mayor penalización.

En mercados perfectos esta dificultad no existe, pues ya hemos comentado que lo importante es el riesgo sistemático, pero si no es así la TRI puede llevarnos a error. La solución consiste en calcular la TRI de la "riqueza inicial total", que nos lleva a la "riqueza final total". En tales condiciones el problema desaparece, pero esto suele ser poco práctico.

ANEXO I
(Funciones de utilidad, algunos comentarios)

La figura 3 representa una típica función de utilidad, con utilidades marginales decrecientes. Sin embargo, en los primeros tramos de la curva pueden darse también utilidades marginales constantes e incluso crecientes.

Estas utilidades marginales crecientes pueden explicarse con algún ejemplo: supongamos un indigente que carece de dinero para alimentarse viviendo en un lugar donde la comida más barata cuesta 500 ptas.; pidiendo limosna logra reunir, en una mañana, 250 ptas., con las que sólo puede tomarse un café con leche y dos bollos; probablemente decida no gastarse ese dinero y esperar a ver si por la tarde consigue otras 250, con lo que podrá cenar por la noche. Nuestro hombre, probablemente, valora más del doble la cena que el café con leche y los bollos. En esa situación, si le ofrecen jugarse las 250 ptas. a doble o nada con probabilidades del 50%, probablemente aceptará pues U (500) x 0,5 > U (250), lo que es otra prueba de utilidades marginales crecientes.

Siguiendo en la primera parte de la curva, habrá situaciones en las que sea más lógico suponer utilidades marginales constantes. Es el caso ya mencionado de la zona de operaciones habituales; lo racional es que, si esta zona se extiende hasta los 5 millones, sean indiferentes 2 millones con una probabilidad del 50%, que un millón seguro; luego U (2.000.000) = U (1.000.000) x 2. Dado

que este tipo de operaciones se repiten constantemente, otro modo de proceder no tendría sentido, el criterio del valor esperado es aquí válido[25].

Desde el punto de vista de la gestión empresarial la zona lineal para las pequeñas decisiones y la zona decreciente (véase figura 3) para las grandes decisiones, son las relevantes[26].

Todo este análisis puede verse claro considerando las nuevas decisiones en función de la utilidad incremental que aportan, que será la esperanza matemática de las utilidades (puede verse Gómez Bezares, 1985, cap. 7). Cuando tales decisiones estén correlacionadas con otras, habrá que tratar el problema de forma conjunta, bien comparando distintas carteras, bien dejándonos guiar por el riesgo sistemático.

ANEXO II
(Justificación del uso de μ y σ)

La utilidad de una decisión en situación de riesgo depende de la distribución de sus resultados y ésta de los parámetros que la definen. Podemos distinguir entre parámetros de posición y de dispersión (entendiendo aquí esta última en un sentido amplio, incluyendo así la asimetría y la curtosis). En bastantes casos es suficiente con utilizar sólo la μ (parámetro de posición) y la σ (como parámetro de dispersión), prescindiendo de otros parámetros como la asimetría o la curtosis.

Si la función de utilidad es cuadrática (hecho bastante restrictivo), con conocer μ y σ, sería suficiente. Sea $U(X) = a + b X + c X^2$; $E(U(X)) = a + b E(X) + c E(X^2)$, que pueden ponerse en función de μ y σ[27].

Si la función de utilidad es de órdenes superiores, se han de cumplir condiciones adicionales. Si es cúbica, será suficiente con que el momento tercero de las distribuciones sea una función de μ y σ (hecho no muy raro, pues basta con que todas sean simétricas). En ese caso $E(X - E(X))^3 = f(\mu, \sigma) \rightarrow E(X^3) = f(\mu,\sigma)$.

Si es de orden cuarto, tendremos, además, la misma condición para el momento cuarto. $E(X - E(X))^4 = f(\mu, \sigma) \rightarrow E(X^4) = f(\mu, \sigma)$. Hecho más difícil de justificar. Y así sucesivamente.

Pero en el caso de que las variables vengan todas definidas por un tipo de distribución, que quede completamente especificada por μ y σ, las condiciones anteriores quedarán cumplidas. Este es el caso de que todas la distribuciones sean normales, éstas quedan perfectamente definidas por su media y su desviación típica, en consecuencia, en tal caso, la utilidad dependería sólo de μ y σ.

---

[25] Considero que el riesgo incremental de la nueva decisión puede despreciarse, al no estar correlacionada con el resto de decisiones (ver Anexo IV), cuando esto no se da, ya no puede hablarse con propiedad de decisiones pequeñas, pues sus consecuencias pueden ser grandes.

[26] En Gómez Bezares (1986b, págs. 266-271) se estudian las tres formas comentadas de la función de utilidad.

[27] "E" es el operador "esperanza matemática", o valor esperado.

En conclusión, bien en el caso de que la función de utilidad sea cuadrática, bien por ser cúbica, pero con distribuciones simétricas, bien por ser de otros órdenes pero con distribuciones normales o siguiendo todas las variables otro tipo de distribución definido con μ y σ, aparte de otras posibilidades más improbables, se justifica el definir una decisión en función de μ y σ.

ANEXO III
(Contraste empírico del problema de los ED)

Para comprobar la realidad de mis apreciaciones teóricas sobre la aversión al riesgo de los ED, pensé en la conveniencia de contrastar empíricamente el problema. Se trataba de corroborar o refutar la idea de que el ED es más enemigo del riesgo que el PD.

Casualmente, cuando hace unos meses yo estaba pensando en tal posibilidad un alumno mío de 5º curso, Íñigo Fernández Leyva, me planteó la posibilidad de hacer un trabajo para comprobar empíricamente algunos aspectos de la aversión al riesgo. Pensamos que el sistema más a nuestro alcance era diseñar un cuestionario y pasárselo a alumnos de ese curso de nuestra Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. A primera vista parece que el procedimiento tiene escaso valor estadístico, dado que la muestra no es aleatoria, pero creo que no es una mala muestra de los que van a ser decisores en las empresas. Si es cierto que sería mejor contar con decisores en ejercicio, pero dada la complejidad de un cuestionario de este estilo, probablemente hubiera sido difícil conseguir un suficiente número de respuestas. Con todo, puede ser interesante hacer futuros contrastes con otros grupos y creo que, básicamente, confirmarán los resultados que ahora expondré.

En el cuestionario se dan una serie de datos que el encuestado debe asumir (situación económica, social; etc.) tanto en el papel de PD como en el de ED, y una serie de situaciones sobre las que debe decidir. El grupo escogido para la encuesta es, dados sus conocimientos, especialmente apropiado para razonar con los elementos que el cuestionario proporciona, puesto que tales decisiones se basan en resultados y probabilidades. Obtuvimos 68 respuestas (los asistentes a mi clase de Dirección Financiera), siendo las dos conclusiones fundamentales las siguientes:

- Más del 75% son más arriesgados como propietarios que como gestores (y esto a pesar de existir un incentivo para el gestor en forma de un 0,5% de participación en beneficios).

- Tanto para ganancias como para pérdidas se da, en todo caso, una clara aversión al riesgo.

Esto confirma lo mantenido en la teoría[28]. Para terminar, una breve reflexión: si es cierto que el gestor actúa de forma diferente que el propietario, cuando para defender correctamente los intereses de este último debería hacerlo de forma similar, se confirma la necesidad de vigilancia e incentivación de que antes hemos hablado. Pero no sólo en la empresa privada, sino también, y

[28] Quiero dejar constancia de que este trabajo no hubiera sido posible sin la colaboración de los encuestados, que tuvieron que hacer frente a un cuestionario que requería bastante meditación para ser respondido y, sobre todo, de Fernández Leyva.

con más razón, en los entes públicos, donde los propietarios, todos los ciudadanos, estamos muchas veces lejos del decisor. ¿Qué interés puede tener un funcionario para tomar una decisión, en cuanto implique un mínimo riesgo? El problema es importante, si bien se sale de los límites de este trabajo.

ANEXO IV
(Algunos comentarios estadísticos adicionales)

Para el cálculo del valor separado, o esperanza matemática (E), hemos de recordar algunas propiedades (véase, p. ej., Chacón, 1955, I, págs. 181-182):

Si Z es una combinación lineal de variables aleatorias, su esperanza es combinación lineal de las esperanzas.

$$\tilde{Z} = a_1 \tilde{X}_1 + a_2 \tilde{X}_2 + ... + a_n \tilde{X}_n$$

$$E(\tilde{Z}) = a_1 E(\tilde{X}_1) + a_2 E(\tilde{X}_2) + ... + a_n E(\tilde{X}_n)$$

(donde ~ indica que se trata de variables aleatorias).

En el caso del producto de variables aleatorias, para que la esperanza sea producto de las esperanzas es preciso que las variables sean independientes, en tal caso:

$$\tilde{Z} = \tilde{Y}\,\tilde{X}$$

$$E(\tilde{Z}) = E(\tilde{Y})\,E(\tilde{X})$$

Afortunadamente, la restricción de independencia no suele ser necesaria en nuestros cálculos, pues el VAN puede ponerse muchas veces como combinación lineal de variables aleatorias.

Para el cálculo de la desviación típica (o de su cuadrado la varianza), tenemos (véase, p. ej., Chacón, 1955, 1, pág. 183) que, supuesto que Z es una combinación lineal como la vista más arriba, su varianza puede ponerse en función de las desviaciones típicas de las X y sus coeficientes de correlación (primera fórmula), o de sus covarianzas (segunda fórmula).

$$\sigma^2 = \sum_{ij} a_i\, a_j\, \sigma_i\, \sigma_j\, r_{ij}$$

$$\sigma^2 = \sum_{ij} a_i\, a_j\, \sigma_{ij}$$

Así no será difícil calcular la desviación típica del VAN, si tenemos los datos suficientes de los sumandos que la componen.

Podemos aplicar la última fórmula para demostrar que las pequeñas decisiones independientes no aportan riesgo. En tal caso:

$$\sigma^2 = \sum_i a_i^2 \, \sigma_{ii}$$

donde a_i representa la proporción de cada una de estas decisiones, si suponemos que tal proporción tiende a cero, y el número de decisiones de este tipo a infinito vemos que la varianza tiende a cero.

Una técnica que puede dar buenos resultados para el cálculo de la media y de la desviación típica del VAN es la simulación (véase, por ejemplo, Gómez Bezares, 1986b, cap. 6). Esta técnica también es aconsejable cuando no se puede sostener que la distribución del VAN sea normal.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVARADO, C. (1987): *Financiación mediante ahorros energéticos compartidos*, Ente Vasco de Energía, Bilbao.

BERGÉS LOBERA, A. (1984): *El mercado español de capitales en un contexto internacional*, Ministerio de Economía y Hacienda, Madrid.

BREALEY, R. y S. MYERS (1981): *Principles of corporate finance*, McGraw-Hill, Nueva York.

COPELAND, T.E. y J.F. WESTON (1983): *Financial theory and corporate policy*, Adison-Wesley, Reading, Massachusetts, 2.ª ed.

DOBBINS, R. y S.F. WITT (1986): *Portfolio theory and investment management*, Basil Blackwell, Nueva York.

CHACÓN, E. (1955): *Curso de estadística*, Mensajero, Bilbao, 3 tomos.

FAMA, E.F. (1980): "Agency problems and the theory of the firm", *Journal of political economy*, 88, Abril, págs. 288-307.

FERNÁNDEZ DE TROCÓNIZ, A. (1980): *Probabilidades, estadística clásica y bayesiana*, editado por el autor, Bilbao.

GALBRAITH, J.K. (1972): El nuevo estado industrial, Ariel Barcelona, 5.ª ed.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1983): *Cómo utilizar e interpretar la estadística*, Ibérico-Europea, Madrid.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1985): *Métodos cuantitativos de gestión*, Ibérico-Europea, Madrid.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1986a): "Decisión (Teoría de)" En Gómez Dacal, G. *Administración educativa*, Anaya, Madrid.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1986b): *Las decisiones financieras en la práctica*, Desclée de Brouwer, Bilbao.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1986c): "Penalización de las decisiones de inversión en función del riesgo", *2º Congreso de Economía y Economistas de España*, Bilbao.

JENSEN, M.C. y W.H. MECKLING (1976): "Theory of the firm: managerial behavior, agency costs and ownership structure", *Journal of financial economics*, 3, Octubre, págs. 305-360.

ROLL, R. y S.A. ROSS (1980): "An empirical investigation of the arbitrage pricing theory", *The journal of finance*, Diciembre, págs. 1073-1103.

ROSS, S.A. (1976): "The arbitrage theory of capital asset pricing", *Journal of economic theory*, Diciembre, págs. 343-362.

SHARPE, W.F. (1970): *Portfolio theory and capital markets*, McGraw-Hill, Nueva York.

TOLEDO, P. (1986): "La empresa creativa", *Boletín de estudios económicos*, 129, Diciembre, págs. 443-451.

VAN HORNE, J.C. (1986): *Financial management and policy*, Prentice-Hall, Nueva Jersey, 7ª ed.

VON NEUMANN, J. y O. MORGENSTERN (1947): *Theory of games and economic behavior*, Princeton university press, Nueva Jersey.

WESTON, J.F. y E.F. BRIGHAM (1981): *Managerial Finance*, Dryden Press, Hinsdale, Illinois, 7ª ed.

VALOR ACTUALIZADO PENALIZADO

por Fernando Gómez-Bezares
Capítulo 10 del libro *Dirección Financiera (Teoría y Aplicaciones)*, Desclée de Brouwer, 1989, págs. 283-294

0.- INTRODUCCIÓN BIBLIOGRÁFICA

Nos basaremos en los siguientes trabajos:

BAUMOL, W.J. (1963): "An expected gain-confidence limit criterion for portfolio selection", *Management science*, Octubre, págs. 174-182.

CHACON, E. (1973): *Teoría de los grafos*, Ibérico-Europea, Madrid.

ESCUDERO, L.F. (1977): *Asignación óptima de recursos*, Deusto, Bilbao.

GOMEZ-BEZARES, F. (1984): "Algunos modelos básicos para la selección de inversiones con flujos relacionados", *XIV Congreso de la SEIO*, Caja de Ahorros de Granada, Granada, vol. 1, págs. 40-51.

GOMEZ-BEZARES, F. (1986): "Penalización de las decisiones de inversión en función del riesgo", *2º Congreso de economía y economistas de España*, Bilbao.

GOMEZ-BEZARES, F. (1987a): "Criterios de selección de inversiones con riesgo", *Boletín de estudios económicos*, Agosto, págs. 287-321.

GOMEZ-BEZARES, F. (1987b): *Distribución beta y penalización del VAN*, documento interno no publicado, Master en Gestión Avanzada, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, Universidad de Deusto, Bilbao (*).

GOMEZ-BEZARES, F. (1988a): *Las decisiones financieras en la práctica*, Desclée de Brouwer, Bilbao, 2ª ed.

GOMEZ-BEZARES, F. (1988b): "Decisioni di investimento con rischio", *L'Industria*, Octubre - Diciembre, págs. 637-647.

MARKOWITZ, H. (1952): "Portfolio selection", *Journal of finance*, Marzo, págs. 77-91.

MARKOWITZ, H. (1959): *Portfolio selection: efficient diversification of investments*, Wiley, Nueva York.

MARKOWITZ, H. (1987): *Mean-Variance analysis in portfolio choice and capital markets*, Basil Blackwell, Oxford.

(*) Una parte importante de este documento se reproduce en las páginas del presente tema.

1.- PLANTEAMIENTO INICIAL

Hemos visto en temas anteriores cómo el modelo de Markowitz, que da lugar a la teoría de cartera, y de manera más aplicable, el CAPM, tratan de dar solución al problema de la inversión con riesgo. Resumiendo la idea podemos decir que calcularemos el VAN utilizando una tasa ajustada al riesgo, y que este ajuste se hará en función del riesgo sistemático. También comentamos brevemente cómo el Valor Actualizado Penalizado -VAP-, original de este autor, podía resultar una alternativa. Trataremos de desarrollarlo con más detalle en las páginas que siguen.

Partamos de unos activos susceptibles de dar rendimientos no seguros (p.ej. acciones), pero supongamos que sí conocemos la función de distribución conjunta de tales rendimientos. Podemos invertir en un único activo o formar una cartera (conjunto de activos en diferentes proporciones) e invertir en ella. En general hablaremos de inversión en carteras (si invertimos toda nuestra riqueza en un único activo, sería como formar una cartera donde dicho activo representa el 100% y los demás el 0%). El problema que se plantea es seleccionar la cartera idónea.

Markowitz (1952 y 1959) planteaba la decisión en el tema de selección de carteras en base al binomio μ-σ (esperanza matemática y desviación típica del rendimiento de la cartera). Para que una cartera sea eficiente debe cumplirse que no exista otra con su misma μ y una σ menor[1]. Sea un mapa de carteras posibles como el ABCDEF de la figura 1.1; denominábamos frontera eficiente (línea A-B de la figura) al lugar donde se sitúan las carteras eficientes. En principio, cualquier cartera eficiente es susceptible de ser preferida por un inversor, dependiendo de su correspondiente sistema de curvas de indiferencia. En la figura, las curvas 1, 2 y 3, representan posibles curvas de indiferencia; situados en una curva, todos sus puntos reportan igual utilidad, pues lo que se gana en rendimiento medio (μ) se pierde en aumento de riesgo (σ). Desplazándose las curvas hacia la derecha, va disminuyendo la utilidad, así la "3" representa una situación peor que la "2", y ésta peor que la "1". Un inversor que tenga este sistema de curvas de indiferencia, invertirá en aquella cartera que toque la curva más alta de las posibles. En principio cualquier punto de la curva A-B puede ser

[1]Ni que con su misma σ tenga mayor μ, como ya conoce el lector.

preferido por un inversor y el punto concreto dependerá de la forma de sus curvas.

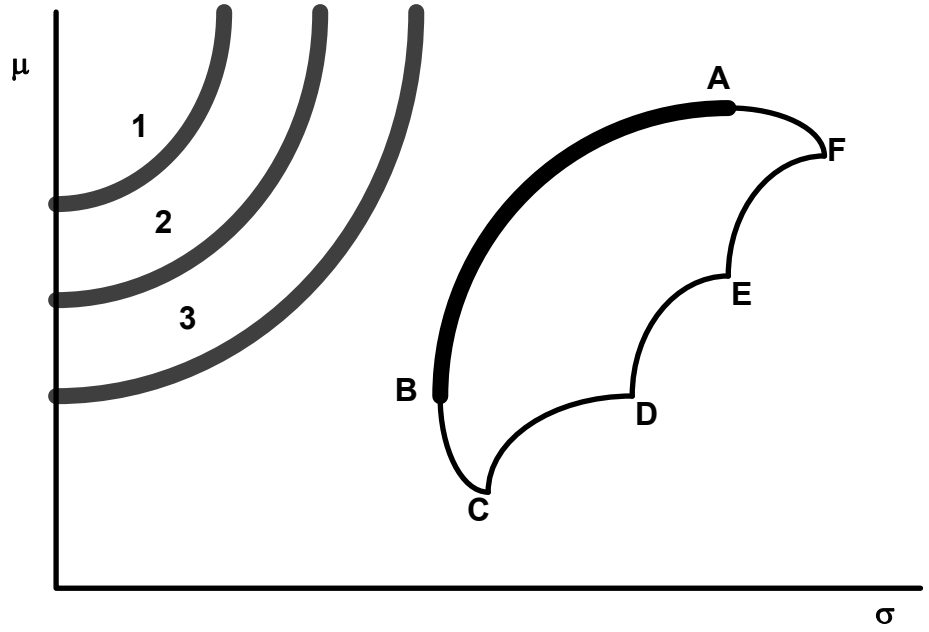


Figura 1.1

En el planteamiento de Markowitz se da por supuesta la idea de que los inversores se comportan como enemigos del riesgo, en consecuencia siempre preferirán, para cada μ, correr el mínimo riesgo posible. También hay implícitas unas condiciones que han de cumplir las distribuciones de los rendimientos y/o las funciones de utilidad (como vimos al comentar la posibilidad de decidir en función del binomio μ-σ); nosotros supondremos, de momento, distribuciones normales en los valores[2], que darán lugar al mismo tipo de distribuciones en las carteras, lo que resuelve el problema. También se suponen condiciones sobre el funcionamiento del mercado, más o menos ideales, pero no entraremos en esto.

Aun aceptando todas las hipótesis implícitas antes comentadas, Baumol (1963) no considera suficientemente ajustada la postura de Markowitz, aduciendo que muchas carteras de las consideradas eficientes por este autor, no son tales, pues ningún inversor lógico las preferiría a todas las demás. Podemos medir el riesgo con el criterio $L=\mu-k\sigma$; en realidad L disminuye al aumentar σ y aumenta con μ, luego sería mejor decir que mide la "capacidad para superar el riesgo". Baumol propone decidir en base al binomio (μ,L); así serían eficientes las carteras que no son superadas de manera simultánea en ambas medidas. De tal forma que hay carteras eficientes en el sentido de Markowitz (dada una μ no hay ninguna cartera con menor σ), que dejan de serlo con este criterio al existir carteras con mayor μ y L. Veamos un ejemplo: Supongamos que sólo existen dos posibles inversiones, definiendo las carteras por (μ,σ), supongamos que la cartera "a" es (50,10) y la "b" (30,5); "a" no es superior a "b" por el criterio de Markowitz, luego ambas son eficientes; pero por el de Baumol, si k=3, L_a=20 y

[2]Concretamente una normal multivariante.

L_b=15, como $\mu_a>\mu_b$, la decisión correcta es tomar antes la cartera "a" que la "b", sea cual sea el sistema de curvas de indiferencia. Luego la frontera eficiente de Baumol es un subconjunto de la de Markowitz.

Es fácil ver la lógica del razonamiento de Baumol, pues aun suponiendo una situación muy desfavorable y que nos alejamos negativamente de la μ en tres desviaciones típicas, μ-3σ, la inversión más arriesgada (la que tiene mayor σ, la "a") da un rendimiento de 20, y la "b" de 15. La probabilidad de que se den situaciones más desfavorables es prácticamente despreciable, luego habrá que concluir que lo lógico es que los inversores prefieran en cualquier caso la primera inversión, con lo que la segunda deja de ser eficiente.

En mi opinión este planteamiento pone de relieve que, entre las carteras eficientes de Markowitz, hay algunas que los inversores rechazarán con facilidad, incluso el propio analista puede hacerlo directamente sin conocer las preferencias del inversor, por deducir que todos las rechazarán, pero es difícil establecer de forma exacta los límites (¿cuál es el valor de k que se debe aplicar?, 2, 3, 4...) y, así visto, no se aporta demasiado a la solución del problema. Se puede constatar en la literatura especializada que el planteamiento de Markowitz es el que ha perdurado y el de Baumol ha quedado prácticamente olvidado.

En varios trabajos (desde Gómez-Bezares, 1984) he propuesto el tomar decisiones sobre el mapa de carteras de Markowitz con un criterio del tipo "μ-tσ", habiéndome encontrado con posterioridad con el trabajo de Baumol. En realidad la idea que me animó a proponer este criterio creo que fue similar a la que lo hizo con Baumol, luchar contra la aversión injustificada al riesgo (Gómez-Bezares, 1988b), demostrando que por muy grande que sea la "t", dentro de unos límites razonables, puede haber inversiones con σ mayor y que, sin embargo, resulten a todas luces superiores. La diferencia consiste en que Baumol, calculada la L (=μ-tσ), decide en función del binomio (μ,L); por el contrario, para mí, penalizada la esperanza matemática μ en función del riesgo σ, haciendo Z=μ-tσ, decido ya en función de Z, serán preferibles las inversiones con mayor Z. Esto es equivalente a suponer que en vez de curvas de indiferencia tenemos rectas de indiferencia. Supongamos rectas de indiferencia, en consecuencia con pendiente constante, como las de la figura 1.2.

En este sistema de rectas se ve claro, por ejemplo, que las decisiones C y D resultan indiferentes, mientras que la E es superior a ellas, y la B inferior. Utilizar estas rectas es equivalente a mantener un sistema de penalización lineal; en efecto, si penalizamos linealmente y llamamos Z al valor una vez penalizado, tendremos:

$$Z = \mu - t\sigma \qquad (1.1)$$

Resultarían así indiferentes las inversiones con igual Z. Despejando tenemos:

$$\mu = Z + t\sigma \qquad (1.2)$$

que es la fórmula de las rectas de la figura, donde t es la pendiente de cualquiera de las rectas, y coincide con el factor constante de penalización. Cada valor de Z en la figura, representa un nivel distinto de utilidad y, a lo largo de cada recta, la utilidad es constante. Las inversiones con igual Z serán indiferentes por estar situadas en la misma recta de indiferencia. Es evidente que el considerar "rectas" de indiferencia, es una simplificación importante que, desde un punto de vista teórico, puede justificar discrepancias con el análisis; sin embargo, creo que tal simplificación, puede quedar compensada con las ventajas prácticas de su utilización; de todas formas luego volveremos sobre esto.

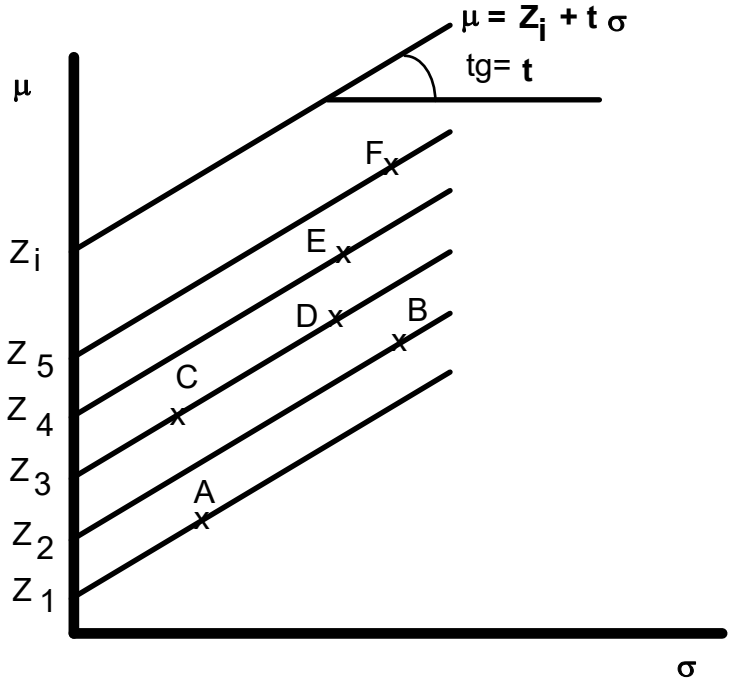


Figura 1.2

2.- EL VAN Y EL VAP

En selección de inversiones se usa como criterio más interesante el Valor Actualizado Neto, VAN, que es el resultado de descontar al coste de los fondos todos los flujos debidos a la inversión (véase p.ej. Gómez-Bezares, 1988a, págs. 201 y ss.). Entiendo que la mejor forma de intuir el concepto de VAN es pensar en que es "el incremento neto de riqueza por tomar una decisión", lo que queda para el empresario después de pagar todo tipo de costes, incluso después de retribuir adecuadamente sus propios fondos invertidos. Los valores μ y σ antes

manejados se referían a rentabilidades de la inversión, en adelante hablaremos de μ y σ del VAN. Todo lo dicho anteriormente puede mantenerse, con la matización de que ahora hablaremos de aumento de riqueza en vez de referirnos a la rentabilidad. Si yo utilizo el criterio:

$$Z = \mu(VAN) - t\sigma(VAN) \tag{2.1}$$

que puedo escribir simplemente, pero recordando que ahora hablamos del VAN, como:

$$Z = \mu - t\sigma \tag{2.2}$$

estoy haciendo una penalización lineal del VAN en función del riesgo, que denomino **Valor Actualizado Penalizado "VAP"**, luego podemos poner:

$$VAP = \mu - t\sigma \tag{2.3}$$

El VAP indica, como el VAN, el incremento de riqueza producido por la toma de la decisión, pero además tiene en cuenta el riesgo que se está corriendo. Creo que, aunque con limitaciones teóricas, puede ser un buen criterio de decisión.

Recapitulemos un poco todo lo anterior. Si calculamos los VANes, descontados a la tasa libre de riesgo, pues el riesgo lo consideraremos más tarde, con sus correspondientes distribuciones, podremos calcular para cada decisión de inversión el VAN medio (μ) y la desviación típica del VAN (σ); de esta manera cada inversión será un punto en el mapa de μ y σ. Aplicando curvas de indiferencia (aquí aparece la consideración de enemigo del riesgo) podemos ver cuál es la decisión óptima. Si simplificamos, utilizando rectas, llegamos a la fórmula (2.3). La decisión óptima será aquélla que dé un mayor VAP.

La alternativa más común en la literatura es calcular el VAN ajustando el tipo de descuento al riesgo. Ya hemos visto que esto no es fácil y que no carece de problemas teóricos, veremos cómo la alternativa del VAP puede llegar a soluciones considerablemente más sencillas.

3.- VAP Y NORMALIDAD

Si suponemos una distribución normal para el VAN, el valor "μ-tσ" deja a su izquierda la misma probabilidad que la t a su derecha en la distribución tipificada, si tomo t=1,5 la probabilidad de que el verdadero VAN sea inferior al VAP será del 6,681% y la de que sea superior del 93,319%; considerar el valor del VAP como suficientemente seguro para tomar decisiones creo que es aceptable. El decisor puede ir a valores más altos de t que acerquen esa probabilidad, ya superior al 90%, más al 100%, pero sería difícil justificar el

decidir con tanta aversión al riesgo; considere el lector que cuanto mayor sea t más pendientes serían las rectas de indiferencia, y más penalizaríamos los proyectos arriesgados.

Con todo lo anterior, dada una distribución normal del VAN y conocidos sus parámetros μ y σ, establecido el valor de t (que entiendo deberá rondar entre el 0 y el 2, pero esto es una apreciación subjetiva), puedo aplicar la fórmula (2.3) y el problema estará resuelto. Es bastante lógico suponer, en principio, la normalidad de la distribución del VAN, basados en el teorema central del límite, y generalmente suele aceptarse como suficientemente ajustada tal distribución.

Pero para llegar a la distribución del VAN lo que hay que hacer normalmente es partir de las distribuciones de las generaciones de fondos debidas a la inversión. Recordemos que la fórmula del VAN es:

$$VAN = -D + GF_1/(1+k) + GF_2/(1+k)^2 + ...+ GF_{n-1}/(1+k)^{n-1} + GF_n/(1+k)^n \quad (3.1)$$

Donde D es el desembolso en el momento inicial, GF_i son las generaciones de fondos debidas a la inversión (lo que consideraremos aleatorio) y k el tipo de descuento (coste de los fondos). Conocidas las distribuciones de las GF (que se calcularían mediante las de sus componentes: ventas, costes, etc.), puedo calcular la distribución del VAN. En la práctica, generalmente, lo más que se pueden hacer son estimaciones más o menos complejas (véase p.ej. Gómez-Bezares, 1984), aquí propondré algunas sencillas y eminentemente prácticas.

Podemos suponer que las GF siguen una distribución normal y que el VAN también es normal. El problema consiste en que el uso de la normal implica el definir sus dos parámetros característicos: μ y σ; muchas personas profanas en estadística tienen dificultades para dar valores a μ, incluso ante un problema conocido. La situación se complica cuando hay que dar valores a σ. Más difícil todavía es estimar la relación entre las GF de los distintos años cuando ésta existe. Una solución muy sencilla, aunque evidentemente criticable desde un punto de vista teórico, es la siguiente: calcular el VAN máximo (que denominaremos b) y el VAN mínimo (que denominaremos a), suponer que entre a y b hay seis desviaciones típicas y actuar como si se tratara de una normal:

$$\mu = (a+b)/2 \quad (3.2)$$
$$\sigma = (b-a)/6 \quad (3.3)$$

para t=1,5; VAP = (a+b)/2 - 1,5[(b-a)/6]

$$VAP = (3a+b)/4 \quad (3.4)$$

Esta fórmula resulta sencilla de aplicar y suficientemente válida desde un punto de vista teórico, pensemos que se cometen muchos más errores en las estimaciones. Además, si cambiamos algunas de las consideraciones básicas, con otras combinaciones podemos llegar al mismo resultado. Por ejemplo, si

σ=(b-a)/4 y t=1, valores que son aceptables, llegamos también a la fórmula (3.4). El lector puede dar otros valores a σ y t, con lo que no obtendrá exactamente los valores de la fórmula (3.4), pero creo que dado lo difícil de estas valoraciones podemos aceptar lo aquí expuesto. (Pensemos que si a y b son los extremos, entre ambos debería haber un 100% de probabilidad, hecho imposible en la normal, el suponer que σ=(b-a)/6 es como decir que al estimar tales extremos he despreciado a izquierda y derecha unas probabilidades del 0,135%, lo que hace un total del 0,270%. Si supongo σ=(b-a)/4, las probabilidades despreciadas a cada lado son 2,275%, con un total de 4,550%. Es difícil saber qué es más correcto. Sobre la valoración de t ya hemos hablado anteriormente).

Lógicamente, lo ideal sería conocer perfectamente las distribuciones de las GF, actuando en consecuencia, pero esto suele ser difícil.

4.- LA DISTRIBUCIÓN BETA INCOMPLETA

Hasta ahora hemos supuesto que el VAN seguía la distribución normal, y en esa hipótesis hemos basado nuestros razonamientos. Podemos relajarla, basados en que en la práctica el VAN se comporta muchas veces con importantes asimetrías. Es frecuente que un director financiero, tras hacer la estimación del VAN máximo y el mínimo, nos diga que los resultados más probables se acercan más al máximo, o en ocasiones al revés, pueden acercarse más al mínimo. Estadísticamente esto es una asimetría. La utilización de un mapa como el de la figura 1.1 presupone, como ya hemos comentado, algunas restricciones teóricas que hay que considerar; en el caso de distribuciones normales esto no era problema, pero sí lo es, como ya vimos en un tema anterior, cuando las distribuciones tienen diferente asimetría. Esto se soluciona suponiendo funciones de utilidad cuadrática, lo que es bastante restrictivo desde un punto de vista teórico, pero útil en la práctica.

Una forma de considerar la asimetría es utilizar la distribución beta incompleta que puede definirse tipificada (Chacón, 1973, págs. 230 y ss.):

$$f(X) = X^{m-1}(1-X)^{n-1}/\beta(m,n) \qquad (4.1)$$

Destipificando para que la variable tome valores entre a y b, y suponiendo m=3+α y n=3-α, donde $\alpha=\pm\sqrt{2}$ (Chacón, 1973, pág. 230, comenta la posibilidad y Escudero,1977, págs. 194 ó 216, habla de su utilización), podemos llegar a:

$$\mu = (a+b+4M)/6 \qquad (4.2)$$
$$\text{Moda} = M = [a(2+\sqrt{2})+b(2-\sqrt{2})]/4 \qquad (4.3)$$
$$\text{ó } M = [a(2-\sqrt{2})+b(2+\sqrt{2})]/4 \qquad (4.4)$$
$$\sigma = (b-a)/6 \qquad (4.5)$$

Si optamos por este sistema, en realidad sólo habrá que dar valores a los parámetros a y b (valores mínimo y máximo del VAN) y luego optar por si la asimetría es a la derecha o a la izquierda, quedando así definida la distribución. En el primer caso (4.3) la asimetría tiene cola a la derecha, en el segundo (4.4) a la izquierda.

Para el caso de simétrica, podemos suponer m=n=4, con lo que sólo habrá que dar valores a los parámetros a y b. En tal caso:

$$\mu = (a+b)/2 \quad (4.6)$$
$$\text{Moda} = \mu \quad (4.7)$$
$$\sigma = (b-a)/6 \quad (4.8)$$

Una justificación y un estudio más detallado de todo lo anterior puede verse en Gómez-Bezares (1987b), siendo posible hacer menos simplificaciones, o simplemente distintas.

Si el VAN sigue la distribución beta incompleta, podemos dar como valor VAP el que deja a su izquierda una probabilidad del 6,681% (la que deja en la normal tipificada t=-1,5). Modelos sencillos pueden ser los tres siguientes (supuestos unos valores de a y b):

1) Asimetría con cola a la derecha, m=3-√2, n=3+√2, la moda sería:

$$M = [a(2+\sqrt{2})+b(2-\sqrt{2})]/4$$

considerando esta moda como suficientemente ajustada, buscamos en las tablas de la correspondiente beta, obteniendo:

$$VAP \approx a + 0{,}05(b-a) = 0{,}95a + 0{,}05b \quad (4.9)$$

2) Asimetría con cola a la izquierda, m=3+√2, n=3-√2, la moda sería:

$$M = [a(2-\sqrt{2})+b(2+\sqrt{2})]/4$$

considerando esta moda como suficientemente ajustada, buscamos en las tablas de la correspondiente beta, obteniendo:

$$VAP \approx a + 0{,}45(b-a) = 0{,}55a + 0{,}45b \quad (4.10)$$

En estos dos casos, tal como hemos visto (4.5), $\sigma=(b-a)/6$. Si m=n=4 teníamos la misma concentración (4.8), pero con distribución simétrica.

3) Simétrica, m=n=4, la moda estaría en el centro, buscamos en las tablas de la correspondiente beta, obteniendo:

$$VAP \approx a + 0{,}25(b-a) = 0{,}75a + 0{,}25b \quad (4.11)$$

que coincide con el caso de la normal (3.4).

Según esto bastaría con establecer al valor mínimo que puede alcanzar el VAN (a), el máximo (b) y decidir si su distribución tiene asimetría a la derecha, lo que me llevaría a utilizar la fórmula (4.9), a la izquierda (4.10) o simétrica (4.11). Obtenido el VAP, tomaría la inversión si el VAP es mayor que cero, o entre varias inversiones, escogería la de mayor VAP. Esto es lógico dado que por su construcción el VAP es como un equivalente de certeza.

5.- COMENTARIOS FINALES

El VAP es el resultado de una penalización lineal (para el caso de penalizaciones no lineales puede verse Gómez-Bezares, 1986 y 1988b), que viene justificada por unas funciones "rectas" de utilidad. Ya hemos comentado que el usar rectas es una limitación teórica importante, sin embargo una curva de utilidad puede verse como una sucesión de pequeños tramos rectos sin que el error sea muy grave, por lo que podemos usar rectas para comparar inversiones con riesgos no muy diferentes.

Otro problema (que enlaza con el anterior) es que el VAP lo hemos estudiado para una inversión individual, sin considerar el resto de las inversiones de la cartera del decisor. Una posibilidad es pensar en el VAP "total" como valor alcanzado por el conjunto de inversiones (tanto nuevas como en curso) de una determinada política, comparando así diferentes políticas según el VAP alcanzado con cada una de ellas. Pero esto es poco práctico, al tener que plantearse para cada inversión el VAP de la totalidad de la cartera con y sin esa inversión; además si lo planteamos, no como un inversor particular, sino desde la perspectiva de una compañía, habría que diferenciar entre el riesgo sistemático y el diversificable, pues ambos no son indiferentes para el accionista.

Cuando no existe riesgo el VAN es aditivo (principio de aditividad de valor), incluso con riesgo puede seguir siendo aditivo si ajustamos la tasa de descuento en función del riesgo sistemático (cfr. CAPM), pero esto ya vimos que tiene asunciones teóricas fuertes y evidentes dificultades prácticas; el VAP trata de superarlas, sobre todo estas últimas. Para que el VAP sea operativo, fuera del caso de la decisión individualmente considerada que veíamos antes, sería bueno que también resultara, de alguna manera, aditivo, para poder juzgar el interés de un nuevo proyecto, sin necesidad de calcular el VAP de toda la cartera.

Para lograr lo anterior, al tomar decisiones, hemos de tener posibilidades de considerar que diferentes proyectos pueden tener diferentes cantidades de riesgo, y diferentes tipos de riesgo. Si relacionamos esto con el problema que planteábamos antes de que las curvas de indiferencia son "como pedacitos de recta unidos" comprenderemos que para comparar proyectos con desviación

grande habremos de utilizar una t (coeficiente de penalización) también grande, al ir creciendo la pendiente con σ (nos referimos al caso -que es el real- de suponer curvas de indiferencia como las de la figura 1.1). Esto nos da la intuición de que variando t podemos estudiar proyectos con diferentes riesgos. Afinando un poco más veremos que lo fundamental no es tanto el tamaño del riesgo sino si está relacionado o no con el resto de las inversiones, para ver cuál es su efecto en el riesgo total, variando la t en función de eso.

Pero esto es más cierto para el inversor particular que para una empresa por acciones, pues en ese caso el efecto en el riesgo de la empresa no es tan importante, sino la posibilidad de diversificación del mismo por parte de los accionistas. Así, parece que la t debería variar según el riesgo sistemático.

Especulando sobre todo lo anterior, habría que estudiar cómo afecta el proyecto a la cartera del accionista medio de nuestra empresa, y ver cuál es la pendiente que utilizaría para comparar la situación con o sin inversión, ésa sería la t y con ella obtendríamos el VAP. Veamos esto en la figura 5.1.

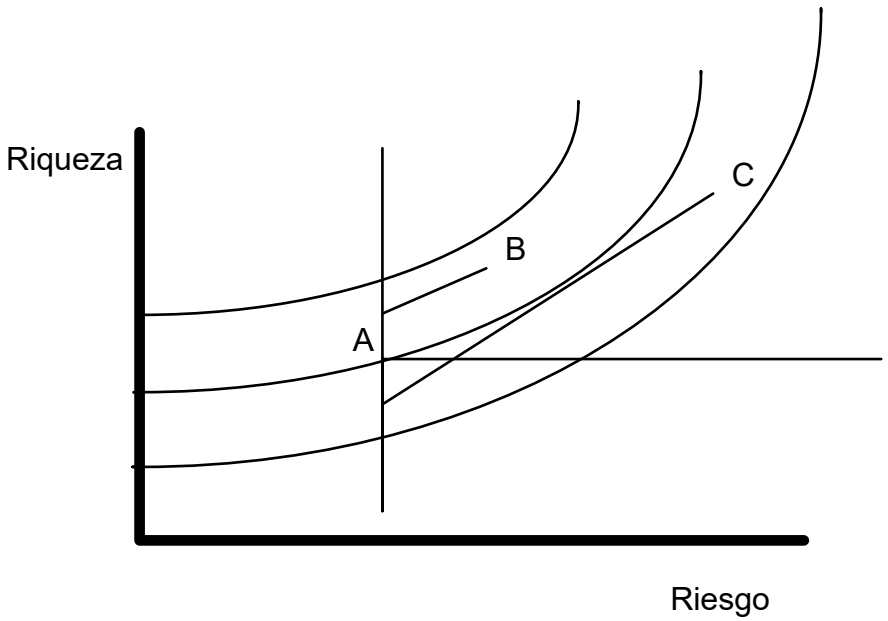


Figura 5.1

En dicha figura tenemos un accionista con una riqueza (esperada actualizada) como la del punto A, y su riesgo correspondiente. Creamos un nuevo sistema de ejes (el más fino, con origen en A) para estudiar los incrementos que se producirán con una política de inversiones que le llevará al punto B y con otra que le llevará al C. Suponiendo rectas en vez de curvas de indiferencia, podemos analizar ambas políticas, penalizando linealmente con t. En el primer caso, para su estudio aplicará una tasa t (pendiente de la recta que une B con el nuevo eje de ordenadas), diferente de la segunda (la pendiente, la t, de la recta que une el punto C con el eje de ordenadas es mayor). Esto nos lleva a preferir B, que nos sitúa en un punto más alto (punto de intersección con el nuevo eje de ordenadas construido sobre el riesgo preexistente). El valor de t dependerá de la

cantidad de riesgo que aporta el nuevo proyecto para el accionista, y tratará de reflejar, de la manera más fiel posible, lo que dirían las "verdaderas" curvas de indiferencia.

Este análisis es totalmente coincidente con lo dicho en páginas anteriores si el nuevo proyecto (N) y el conjunto de proyectos preexistentes (P) tienen correlación uno, pues en ese caso la desviación (riesgo) del proyecto conjunto es la suma de desviaciones (5.1) y (5.2), teniendo pleno sentido penalizar en función de t y de la desviación típica del proyecto.

$$\sigma^2_{N+P} = \sigma^2_N + \sigma^2_P + 2\sigma_{NP} = \sigma^2_N + \sigma^2_P + 2\sigma_N\sigma_P \quad (5.1)$$

$$\sigma_{N+P} = \sigma_N + \sigma_P \quad (5.2)$$

En muchas empresas, la mayoría de las inversiones están fuertemente correlacionadas, y no consideran oportuno pensar en la posible diversificación que puede llevar a cabo el accionista. Esto último puede deberse a que el accionista no puede diversificar (caso que se da con frecuencia en las empresas familiares), a los altos costes de bancarrota, o simplemente a que los gestores se preocupan más del riesgo total (cfr. problema de agencia). En estos casos, muy frecuentes, es donde más clara resulta la aplicación del VAP, tal como aparece en las fórmulas (4.9), (4.10) y (4.11), pero por extensión se puede llevar a otras situaciones.

Así, flexibilizando el análisis anterior, podemos pensar en proyectos con correlaciones menores que uno, con mayor o menor cantidad de riesgo sistemático, y a todo esto le podemos dar entrada variando la t, que es como decir que de un tipo de riesgo (caso del sistemático) somos más enemigos y usamos mayor t, mientras de otro (el diversificable) somos menos enemigos y usamos menor t (incluso t=0 si es totalmente diversificable). También se puede dar entrada al tamaño del riesgo total del proyecto, graduando en consecuencia la t correspondiente, si no tenemos demasiada fe en la capacidad de diversificación de nuestros accionistas, y en ese caso también habrá que fijarse en la covarianza del proyecto con los preexistentes en la empresa, pudiendo llegar a darse una t negativa para covarianzas fuertemente negativas (puede verse esta discusión en Gómez-Bezares, 1987a).

La flexibilización propuesta en las líneas anteriores es criticable, pues lo ideal sería estudiar el riesgo incremental para el accionista y actuar en consecuencia, restando t veces ese incremento, pero en la práctica eso es muy difícil, por lo que me inclino por restar t veces el riesgo del proyecto, y variar la t según el efecto previsible en el accionista. A la vista de esto podemos utilizar las fórmulas del VAP planteadas en las páginas anteriores, pero teniendo cuidado de variar la t según el efecto que el riesgo del proyecto creemos tendrá en la cartera de nuestro accionista medio.

Una aplicación congruente con lo anterior es el análisis de sensitividad. Podemos ver qué valores de t nos hacen pasar de una a otra decisión de

inversión, o qué valor está en el límite para rechazar o aceptar un determinado proyecto. La aceptabilidad o no por el decisor de esos coeficientes de penalización (t), nos ayudará a tomar la decisión.

EL TRATAMIENTO DEL RIESGO EN LA DECISIÓN DE INVERSIÓN: VAP y distribuciones no conocidas[1]

por Javier Santibáñez Grúber
Publicado en el *Boletín de Estudios Económicos*, nº 154, Abril, 1995, págs. 119-140

1. Introducción

Desde la perspectiva de la moderna Teoría financiera, podemos decir que el problema de la inversión en condiciones de certeza es un tema teóricamente resuelto. Los criterios contables, basados en el beneficio, han caído en desuso, abandonados por su subjetivismo, así como por los problemas de consideración del valor del dinero en el tiempo. Y dentro de los criterios de selección basados en el análisis del impacto en caja de un determinado proyecto (tales como el Valor Actualizado Neto -VAN-, la Tasa de Rentabilidad Interna -TRI-, el Indice de Rentabilidad -IR-, etc.), podemos decir que el VAN presenta indudables ventajas frente a los demás, que lo convierten en un criterio superior.

Sin embargo, no podemos decir lo mismo del problema del riesgo. Criterios clásicos, como el Ajuste del tipo de descuento, o el Equivalente de certeza; aportaciones como la de Markowitz, con su Teoría de cartera (y de sus continuadores, como Sharpe, Lintner, Mossin, etc., que dan lugar al Capital Asset Pricing Model -CAPM-); modelos como el Arbitrage Pricing Theory -APT- de Ross, que trata de generalizar las conclusiones del CAPM; nuevos enfoques, como el Option Pricing Model -OPM- de Black y Scholes, que pretenden analizar la Teoría financiera desde una nueva perspectiva, … constituyen intentos de explicar la realidad, y pretenden dar al gestor herramientas útiles para la toma de decisiones en un entorno cambiante, en el que no conocemos con seguridad lo que nos deparará el futuro. Sin embargo, ninguna de las soluciones propuestas han dejado, ni mucho menos, cerrado el problema. La tendencia actual es la de

[1] Con el término "no conocida" queremos significar que, si bien conocemos la distribución de probabilidad del VAN, ésta no se ajusta a ninguna distribución teórica conocida.

contrastar la capacidad explicativa de estos modelos en la realidad, tratando de mejorarlos en lo posible, lo que a menudo implica utilizar complicadas técnicas estadísticas y econométricas.

En España, también se han producido aportaciones interesantes en lo que se refiere al tratamiento del riesgo. Una de ellas es el VAP (Valor Actualizado Penalizado), sistema desarrollado por el Profesor Gómez-Bezares en la Universidad Comercial de Deusto, y que trata de ser una alternativa sencilla y práctica a los criterios apuntados. Así, mientras los distintos sistemas citados precisan, en general, de un aparato matemático importante (que, en muchas ocasiones, hacen poco práctica su utilización, y quizás los alejan de los departamentos financieros de muchas empresas), el VAP presenta la ventaja de su sencillez, si bien sustentada en una justificación teórica suficiente.

Una característica común a casi todos los criterios mencionados es la suposición de que las variables utilizadas siguen una distribución normal. Este artículo pretende relajar esta condición en el caso del VAP, generalizando el criterio para el caso de que el VAN no siga ninguna distribución conocida.

2. Certeza, riesgo e incertidumbre

Es de todos conocida la distinción que desde la Teoría de la decisión se establece entre los ambientes de certeza, riesgo e incertidumbre. Así, el ambiente de certeza se define como aquél en el que todas las variables que afectan a una decisión son conocidas con seguridad. En el extremo contrario, el ambiente de incertidumbre se caracterizaría por el hecho de no conocer en absoluto el comportamiento futuro de las variables implicadas en la decisión. Ambas son situaciones que habitualmente no se producen en la realidad: normalmente, las ventas de un nuevo producto están sujetas a una cierta variabilidad, incluso es probable que las estimaciones de diferentes gestores con un conocimiento similar de la realidad arrojen resultados distintos. Lo mismo podríamos decir acerca de variables como los tipos de inflación futuros, la evolución de los tipos de interés, o de los precios de materias primas como el petróleo, etc. Sin embargo, tampoco es frecuente que el decisor no pueda decir nada sobre el comportamiento esperado de estas variables.

Todo ello nos lleva al tercer ambiente, el de riesgo, que supone que es posible conocer las distribuciones de probabilidad de las distintas variables que afectan al problema. Entendemos, pues, que nos enfrentamos a una decisión con riesgo siempre que exista variabilidad en el resultado de la decisión y seamos capaces de estimar dicha variabilidad (puede profundizarse en el concepto de riesgo en Gómez-Bezares, 1993a, capítulo 6, y en Gómez-Bezares, 1991).

Pretender que pueden conocerse con exactitud las probabilidades de que ocurran determinados sucesos en el futuro parece también difícilmente aceptable. La estadística nos aporta aquí una herramienta interesante, la Teoría de la probabilidad subjetiva, que frente a la estadística clásica, que entiende la probabilidad como aquello a lo que tiende la frecuencia relativa (lo cual haría que sólo pudiéramos hablar de probabilidad en el caso de enfrentarnos a situaciones repetitivas), asimila este concepto al “grado de credibilidad” que se otorga a los

distintos sucesos posibles (nuevamente, puede ampliarse esta idea en Gómez-Bezares, 1993a, capítulo 6).

3. Una brevísima referencia al VAN

Recordemos que el VAN (que, tal como indicábamos en la parte introductoria, es el criterio superior para la toma de decisiones de inversión en ambiente de certeza) propone analizar el interés de un determinado proyecto mediante la comparación, en valor actual, de los flujos positivos y negativos asociados al mismo. Así:

$$VAN = - DI + \sum_{i=1}^{n} \frac{GF_i}{(1+k)^i} \qquad [1]$$

donde DI representa el Desembolso Inicial a realizar para afrontar el proyecto; GF_i es el impacto que éste tiene en la caja de la empresa en el año i; k es el coste de oportunidad de invertir en el proyecto (en certeza, el tipo de interés sin riesgo); y n es la vida útil (es decir, el número de años en los que el proyecto tiene efectos). El criterio consistiría en aceptar aquellos proyectos cuyo VAN sea mayor que cero.

4. La aversión al riesgo

Supuesto lo anterior, y aceptando que lo normal es que nos encontremos en un ambiente de riesgo, un primer criterio de tratamiento en la decisión de inversión sería decidir en función del promedio del VAN. Así, bastaría con conocer el promedio esperado de resultado de una determinada decisión, aceptando aquellos proyectos cuyo VAN esperado fuera mayor que cero. Pero este criterio implica la suposición de que el decisor es indiferente al riesgo, lo cual es difícilmente aceptable en muchas ocasiones. Más lógico parece suponer que, en condiciones normales, los individuos nos comportamos como enemigos del riesgo, en el sentido de que preferimos una cantidad segura a una promesa de promedio igual, pero sujeta a riesgo.

La justificación teórica de esta aversión al riesgo la encontramos en la Teoría del consumidor: si suponemos que la utilidad de un bien normal (entre los que podríamos incluir el dinero) es creciente de forma menos que proporcional (lo que implica suponer que el individuo preferirá tener más a menos del citado bien, y que la utilidad marginal del mismo es decreciente), la mencionada aversión es clara. De esta manera, y tal como puede apreciarse en la figura 1, el individuo preferiría recibir 1 millón de pesetas seguras que participar en un juego en el que puede recibir 0 ó 2 millones con probabilidades del 50%, ya que la utilidad del millón seguro (en nuestro ejemplo, 0,9) es superior a la utilidad que como promedio obtendría en el juego (0,75).

La esperanza matemática de las unidades monetarias puede, sin embargo, ser útil en algunas ocasiones. Así, para cantidades pequeñas no parece ilógico pensar que el individuo se comporte como “indiferente” ante el riesgo, apareciendo así una zona de utilidad lineal. E incluso, en

determinadas circunstancias, parece aceptable pensar que nos comportemos como amigos del riesgo, con zonas de utilidad marginal creciente (pensemos en el individuo que juega a la lotería). Esta circunstancia ha sido estudiada por autores como Friedman y Savage (1948), entre otros muchos, pero en términos generales puede considerarse excepcional, por lo que nosotros supondremos individuos enemigos del riesgo (para profundizar en estas ideas puede consultarse Gómez-Bezares, 1991, capítulo 1).

El problema radica en el hecho de que, si suponemos que la utilidad marginal es decreciente, deja de ser indiferente razonar en términos de esperanza matemática de unidades monetarias o de utilidades (en este sentido, puede ser interesante consultar la visión axiomática de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern, 1947, de la cual puede encontrarse un buen resumen en Gómez-Bezares, 1991, capítulo 1).

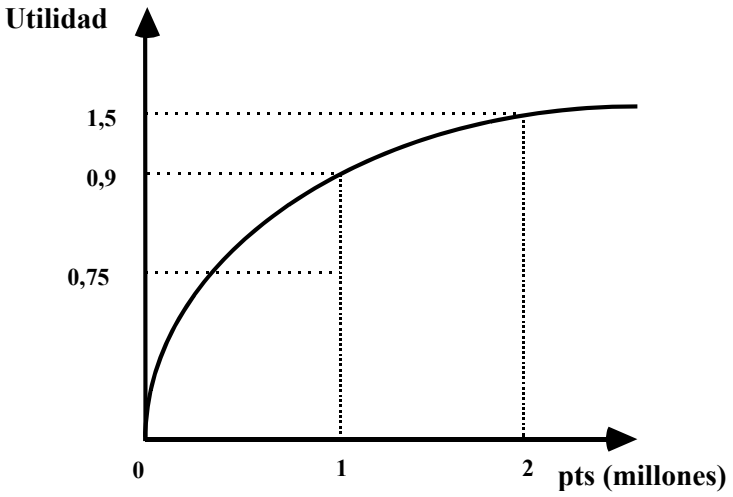


Figura 1

Por lo visto hasta ahora, sería necesario estimar la función de utilidad del individuo para poder adoptar una determinada decisión, lo cual no es normalmente operativo desde un punto de vista práctico. Y además, aunque existen procedimientos que nos permitirían aproximar esta función (véase nuevamente Gómez-Bezares, 1991, capítulo 1), en la mayoría de las ocasiones, la decisión que pretende adoptarse afecta a un grupo grande de personas (los accionistas), lo que complica, cuando no imposibilita, esta forma de trabajar.

5. Algunos criterios clásicos en el tratamiento del riesgo

Nos encontramos, pues, con una decisión de inversión a adoptar, cuyo resultado no es conocido con seguridad, pero del que se conoce su distribución de probabilidad. Así mismo,

suponemos individuos enemigos del riesgo, por lo que no basta con decidir en función del promedio, sino que se hace necesario considerar la variabilidad de los resultados.

Para ello, existen algunos sistemas clásicos, que presentan determinadas ventajas e inconvenientes. La idea general, como se verá, es la de penalizar de alguna forma el resultado de la decisión en función del riesgo que aporta.

5.1. El Equivalente de certeza

Este procedimiento consiste en penalizar las generaciones de fondos en función de su riesgo (variabilidad). Así, se trata de buscar, para cada Generación de Fondos (GF) sujeta a riesgo, su equivalente cierta, es decir, aquella cantidad segura que reporta la misma utilidad que la GF promedio con riesgo. Esto nos llevaría a aplicar a cada generación de fondos un coeficiente corrector α_i (que para enemigos del riesgo variaría entre 0 y 1), que dependería de la forma concreta de la función de utilidad del individuo. Exigiría, pues, conocer la función de utilidad, y estimar la α_i correspondiente a cada GF_i.

Así, siendo:

$E(GF_i)$	Generación de fondos esperada (sujeta a riesgo).
GF_i'	Generación de fondos equivalente cierta.

tendríamos que:

$$GF_i' = \alpha_i \bullet E(GF_i) \qquad [2]$$

Dado que, una vez aplicado el sistema de penalización, trabajamos con cantidades equivalentes ciertas, el tipo de descuento a aplicar en el cálculo del VAN sería el tipo de interés sin riesgo:

$$VAN_{ajustado} = -DI + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i \cdot E(GF_i)}{(1+k)^i} = -DI + \sum_{i=1}^{n} \frac{GF'_i}{(1+k)^i} \qquad [3]$$

El sistema es interesante desde un punto de vista teórico, pero tan poco operativo en la práctica como razonar en función de la esperanza matemática de utilidad.

5.2. El Ajuste del tipo de descuento

Se trata aquí de penalizar el VAN de un proyecto arriesgado utilizando un tipo de descuento superior al aplicable a proyectos sin riesgo. Vemos, pues, que mientras en el procedimiento anterior, la penalización venía por la vía de los numeradores, en este caso se trata de penalizar el denominador. Así, las generaciones de fondos esperadas se actualizarían al tipo primado, según la siguiente expresión:

$$VAN_{ajustado} = - DI + \sum_{i=1}^{n} \frac{E(GF_i)}{(1 + k + P)^i} \qquad [4]$$

donde:

k Tipo de descuento para inversiones sin riesgo.

P Prima por riesgo.

En definitiva, se trata de exigir a las inversiones arriesgadas un "premio por riesgo". La ventaja radica en su sencillez en términos comparativos con el anterior, ya que ahora sólo es necesario realizar una estimación (frente a las "n" α_i del Equivalente de certeza). Por otro lado, considera el proyecto como un todo, y penaliza de forma creciente las generaciones de fondos más alejadas del momento actual, lo cual parece lógico en un entorno cambiante. El problema radica nuevamente en la forma de estimar esta prima por riesgo, que en muchas ocasiones es totalmente subjetiva. Existen procedimientos prácticos de estimación: así, podría tratar de verse cuál es la prima que los accionistas de empresas con similar riesgo están exigiendo en el mercado, pero en cualquier caso, la subjetividad está siempre presente.

6. Algunos instrumentos y técnicas más modernos para el tratamiento del riesgo

6.1. La Simulación y los árboles de decisión

Se trata de dos herramientas de trabajo interesantes, aportadas por el campo de las Técnicas Cuantitativas. La primera consiste en, conocidas las distribuciones de partida de las variables que afectan a la decisión a adoptar, "simular" la aparición del azar para llegar a una distribución de resultado (en nuestro caso, de VAN). Se trata de una técnica de gran flexibilidad, que permite, además, repetir el proceso bajo diferentes condiciones de partida, facilitando así el análisis de sensitividad de los resultados ante cambios en las variables de entrada (puede ampliarse este tema en Hertz, 1964, Cepeda y Vargas, 1990, y Gómez-Bezares, 1993a, apéndice 6-B).

En cuanto a los árboles de decisión, se trata aquí de un instrumento que nos permite representar decisiones complejas de una manera sencilla (véanse, entre otros, Magee, 1964, y Gómez-Bezares, 1993a, apéndice 6-A).

En ambos casos, no podemos hablar estrictamente de "criterios de decisión", sino más bien de instrumentos de ayuda en la valoración de proyectos.

6.2. El CAPM y sus continuadores

El CAPM, modelo que nace a partir de la Teoría de cartera de Markowitz, establece una distinción importante: la existente entre el riesgo sistemático y el diversificable. El primero sería el que tiene que ver con la marcha de la economía (y, por tanto, no podría evitarse invirtiendo en distintas ramas de la misma), mientras que el segundo sería el riesgo específico del proyecto, que podría eliminarse mediante una adecuada diversificación.

El modelo propone trabajar de la siguiente forma: en primer lugar, deberíamos estimar el premio que en el mercado se está pagando por unidad de riesgo sistemático (que es el único que, según el CAPM, debe ser retribuido, ya que el diversificable deberá ser convenientemente eliminado por el accionista racional); a continuación, habría que estimar la cantidad de riesgo sistemático asociado al proyecto que se analiza (para lo cual se propone una medida, la "beta"). Con la información descrita, estaríamos en disposición de adoptar la decisión correspondiente.

No es difícil conectar el CAPM con los dos criterios clásicos de tratamiento del riesgo que veíamos anteriormente (el Ajuste del tipo de descuento y el Equivalente de certeza; puede verse este tema en Gómez-Bezares, 1991, capítulo 5): así, el modelo puede entenderse como una herramienta más objetiva para el cálculo de los parámetros que la aplicación de dichos criterios exige.

Con todo, y reconociendo el innegable interés del CAPM desde el punto de vista teórico, hay que decir que su aplicación en la práctica presenta aún hoy interrogantes y problemas no definitivamente resueltos. Por otro lado, las contrastaciones empíricas realizadas en nuestro entorno más cercano no arrojan tampoco resultados definitivos respecto a su aplicabilidad en mercados aún lejanos de los perfectos (véanse a este respecto, entre otros, los trabajos de Bergés, 1984, Gómez-Bezares, 1989, y más recientemente, los de Santibáñez, 1994, Madariaga, 1994, y Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 1994).

6.3. Una breve referencia al OPM y otros modelos

El OPM propone analizar toda la gestión financiera de la empresa desde la óptica de la Teoría de opciones: así, por ejemplo, trata de valorar las acciones de la compañía como si fueran una opción de compra sobre los activos de la misma, cuyo precio de ejercicio es el valor de la deuda. Se trata de un campo con posibilidades, pero la valoración de las opciones es un tema no resuelto definitivamente en la actualidad. Modelos como el de Black y Scholes (1973) presentan problemas a la hora de contrastar sus resultados en la realidad, que hacen que tampoco constituyan una solución definitiva al problema del riesgo.

Tampoco el APT de Ross parece una solución válida, al introducir grados de dificultad muy elevados respecto al CAPM, sin que se vea clara la mejoría conseguida en su capacidad explicativa (véase nuevamente Gómez-Bezares, 1989, Gómez-Bezares y Santibáñez, 1991, y Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 1994).

7. Una alternativa: el Valor Actualizado Penalizado (VAP)

En este contexto, aparece un sistema alternativo, el VAP, propuesto por Gómez-Bezares a mediados de los ochenta (y desarrollado, entre otros, en los trabajos que se citan en la bibliografía), con una intención eminentemente práctica. Frente a criterios como el Ajuste del tipo de descuento (que penaliza el VAN a través del denominador), o el Equivalente de certeza (que lo hace a través de sus numeradores), el VAP propone la penalización directa del VAN en función de su riesgo. De entre los múltiples sistemas para hacerlo (véase Gómez-Bezares, 1993a, págs. 286 y ss), nos inclinamos por la penalización lineal:

$$VAP = E(VAN) - t \bullet \sigma(VAN) \qquad [5]$$

donde E(VAN) y σ(VAN) son, respectivamente, el promedio y desviación típica de VAN[2]. Es importante señalar también aquí que los posibles valores de VAN (los que posteriormente dan lugar al promedio y la desviación presentadas) se calculan descontando las generaciones de fondos al tipo de interés sin riesgo. Según este criterio, serían interesantes los proyectos con VAP positivo, eligiéndose, en el caso de jerarquizar, los que tuvieran el máximo valor en esta variable.

Supuesto un valor concreto de t, y llamando Z_i al resultado de aplicar la fórmula 5 según los diferentes valores posibles de E(VAN) y σ(VAN), la ecuación representa un haz de rectas en el mapa μ–σ, tal como puede verse en la figura 2.

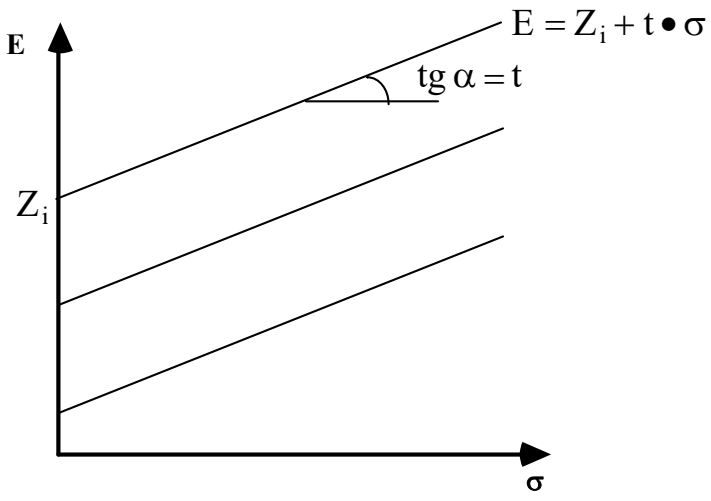


Figura 2

[2] Utilizaremos indistintamente los términos E, E(VAN) y μ para referirnos a la esperanza matemática del VAN, y σ o σ(VAN) para referirnos a su desviación típica.

En la citada figura 2 puede verse intuitivamente lo que estamos haciendo: al valorar un proyecto en función de su VAP, lo hacemos en razón de la ordenada en el origen de la recta en la que se sitúa dicho proyecto (supuesta, tal como decíamos anteriormente, una determinada t). Y, al elegir el proyecto con mayor VAP, buscamos aquél que nos permita situarnos en la recta con ordenada más alejada posible del origen de coordenadas. Si aceptamos la posibilidad de que las curvas de indiferencia (combinaciones de promedio y riesgo que resultan indiferentes para el individuo) sean rectas (simplificación aceptable, al menos para proyectos de riesgo similar -véase para ampliar esta idea Gómez-Bezares, 1991, capítulo 10, o Gómez-Bezares, 1993a, capítulo 6-), vemos que, en realidad, estamos razonando en términos de utilidad.

7.1. Justificación teórica del VAP. Normalidad del VAN

Veamos ahora desde otro punto de vista lo que está detrás del criterio propuesto, suponiendo que el VAN siga una distribución normal. Para ello, jugaremos con los elementos que aparecen en la fórmula 5. Si despejamos t, y llamando X al valor obtenido de VAP, tendremos:

$$- t_{\alpha} = \frac{X - E(VAN)}{\sigma(VAN)} \qquad [6]$$

que no es otra cosa que la tipificación de un valor concreto de la variable VAN. Así, el valor X sería aquél que se aleja "t" desviaciones típicas del promedio. Y este valor dejará a su izquierda una probabilidad α, que será función de t (tal como puede verse en la figura 3)[3].

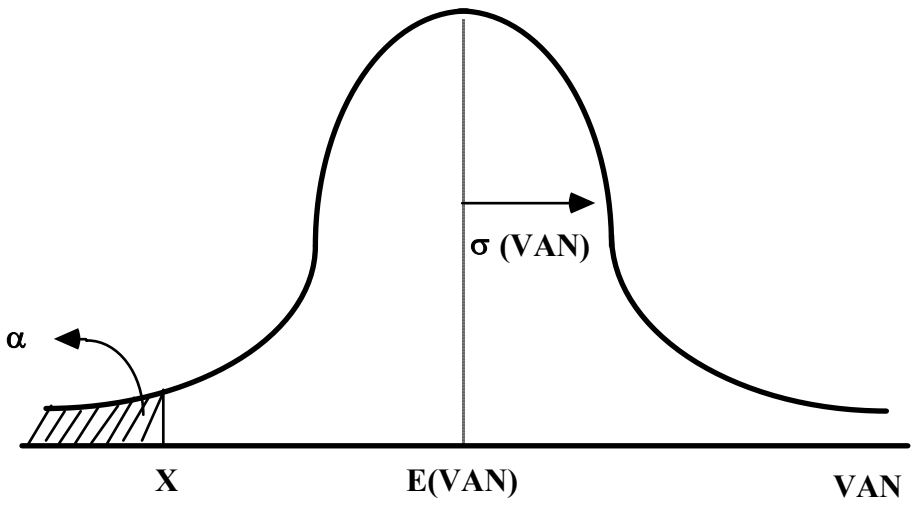


Figura 3

[3] Puede resultar de interés resaltar aquí que la propia formulación del criterio hace que el valor X calculado tiene que estar forzosamente a la izquierda del promedio de VAN (de ahí que el signo asociado a t sea negativo, y que hablemos de probabilidades a la izquierda del mismo).

Recordemos que lo que conocemos del proyecto es su promedio y desviación típica (μ y σ), y lo que estamos buscando es el valor X (o VAP), debiendo, por tanto, decidir previamente el valor que daremos a t (y que, según el criterio, indicará el número de desviaciones típicas a restar al promedio). Obviamente, cuanto mayor sea el valor de t, menor será el valor de X, y, por tanto, más probabilidades tendremos de rechazar el proyecto. Pero también estaremos haciendo que la probabilidad de obtener un valor de VAN menor que X sea cada vez más pequeña. Dicho de otro modo, el VAP me está diciendo cuál es el valor mínimo garantizado de VAN que obtendré con un determinado nivel de garantía ($1-\alpha$). Cuanto mayor sea t, menor será α, y por tanto, mayor será el nivel de garantía. Cuanto más enemigo del riesgo sea, mayor valor de t asignaré (más garantía exigiré de no obtener un valor de VAN menor que X), y más pequeño será el valor de VAP obtenido.

En este punto, podríamos preguntarnos qué valor sería lógico dar a t. Para resolver este problema, acudamos a las tablas de la distribución normal tipificada: una t = -1 (es decir, un valor inferior al promedio en una desviación típica) deja a su izquierda un 15% de probabilidad, aproximadamente; la probabilidad que queda a la izquierda de un valor de t = -2 es algo mayor que el 2%, mientras que para una t = -3, la probabilidad baja a una cantidad cercana al 1 por mil. Entendemos que un valor de t entre 1 y 2 sería razonable: dependiendo del grado de aversión al riesgo del decisor, así como de la importancia de la decisión, una garantía de un 85% de obtener un valor de VAN como mínimo igual a X (siendo éste positivo) puede ser suficiente, mientras que en otras ocasiones, este nivel de confianza exigido puede crecer hasta un 97%.

Nuevamente, el elemento subjetivo está presente en el tratamiento del riesgo, pero estamos ante un criterio que aporta, fundamentalmente, operatividad. Por otro lado, puede resultar de interés recordar que la subjetividad está presente desde el principio, en la propia estimación de los distintos sucesos posibles, así como de las probabilidades asociadas a los mismos.

Relacionado con lo anterior, y dado que el VAP pretende, sobre todo, ser un criterio utilizable en la práctica, hay que decir que, en ocasiones, realizar una estimación ajustada del promedio y la desviación típica del VAN puede resultar complicado. En estos casos, pueden realizarse aproximaciones simplificadas: así, si contamos con los valores máximo y mínimo del VAN, y siempre que no tengamos razones para rechazar la normalidad de la distribución, pueden aproximarse sin mucho error y de forma sencilla el promedio y la desviación típica:

$$E(VAN) = \frac{VAN_{máximo} - VAN_{mínimo}}{2} \qquad [7]$$

$$\sigma(VAN) = \frac{VAN_{máximo} - VAN_{mínimo}}{6} \qquad [8]$$

7.2. Generalización del VAP para distribuciones no normales

Hemos visto que una de las hipótesis que está detrás de la justificación teórica del criterio es suponer que la distribución del VAN es normal. El propio Gómez-Bezares, en su trabajo de 1991, y en otro posterior (Gómez-Bezares, 1993b), propone una generalización para el caso de

que la distribución de partida no siga una normal, a través de la distribución beta incompleta. Como es sabido, este tipo de distribución queda definida simplemente con los valores mínimo y máximo de la variable, así como con su moda.

Esta generalización puede ser de utilidad en determinadas ocasiones, cuando la información de partida es pobre. Sin embargo, existen otros casos en los que contamos con una información más rica, donde utilizar la beta incompleta supondría desperdiciar parte de la misma. Por ello, propondremos en el siguiente apartado la "visión histogramática", siendo precisamente ésta la principal aportación del artículo que ahora se presenta.

8. Un paso adicional: La visión histogramática

Presentado el criterio VAP, su objetivo y su justificación, trataremos de generalizarlo para el caso en el que la distribución se representa con cualquier tipo de histograma, utilizando para ello un ejemplo (que reproduce el presentado en Santibáñez, 1992).

• Planteamiento del problema

A finales de 1990, Inverbol, S.A. tiene la posibilidad de comprar acciones de la sociedad "Megamore", cuya actividad fundamental es la comercialización de distintos aparatos relacionados con el mundo del sonido y la alta fidelidad, y cuyo perfil de fondos estimado para los próximos años es el que aparece en el cuadro 1.

Escenario	$Desembolso_{90}$	GF_{91}	GF_{92}	GF_{93}	Probabilidad
1	1.000	100	100	1.100	30%
2	1.000	110	110	1.150	40%
3	1.000	125	125	1.200	30%

Cuadro 1

Las presentadas son una aproximación a las generaciones de fondos esperadas para el comprador de una acción (netas de impuestos, por no complicar el caso desde el punto de vista fiscal). La cotización de la acción en el momento de adoptar la decisión es, como se desprende del mencionado cuadro 1, 1.000 pesetas.

También puede deducirse del cuadro citado que, dentro de cada posible estado de la naturaleza, existe una correlación perfecta entre las generaciones de fondos de cada año. Para inversiones con riesgo, Inverbol, S.A. utiliza el sistema del Valor Actualizado Penalizado (VAP). En concreto, para niveles de riesgo como el que se analiza, y en los casos en que pueda aceptarse que la distribución de resultados siga la normal, el parámetro t de penalización es de 1 ($VAP = \mu - \sigma$): esto significa que el criterio de Inverbol es el de valorar los proyectos en función de su valor mínimo garantizado con un 84,13% de probabilidad (en el caso de que la distribución

de resultados no siga la normal, el criterio a utilizar es el mismo, si bien no podrá aprovecharse la fórmula propuesta). Diremos también que el tipo de interés sin riesgo en el mercado es del 10%.

• Solución propuesta

En la valoración de este proyecto nos encontramos con que existen tres posibles alternativas: una "pesimista", otra "normal" y otra "optimista". Sin embargo, no es lógico pensar que la distribución de las generaciones de fondos sea discreta: entre los valores de la generación del primer año en las opciones pesimista y optimista (100 y 125) hay un abanico de valores que con toda seguridad podrían producirse (y no solo uno, 110). Tampoco parece lógico que pueda asegurarse que "en ningún caso" dicha generación de fondos vaya a ser inferior o superior a los valores dados como mínimo y máximo, respectivamente. Obviamente, se trata de una simplificación realizada por la persona que aporta los datos, que, por otro lado, será frecuente en la realidad. La interpretación que daremos a esta información de partida es la de considerar que en la opción pesimista, por ejemplo, la generación de fondos "rondará" las 100 pesetas los dos primeros años y 1.100 el tercero, con lo cual el VAN "estará próximo" al valor calculado partiendo de las mencionadas generaciones de fondos.

Los posibles VANes (calculados a partir de los valores aproximados de las generaciones de fondos, y actualizados al tipo de interés sin riesgo, 10%, para evitar la doble penalización) son los que aparecen en el cuadro 2.

Concepto / Alternativa	Pesimista	Normal	Optimista
Desembolso	1.000	1.000	1.000
GF_{91}	100	110	125
GF_{92}	100	110	125
GF_{93}	1.100	1.150	1.200
Probabilidad	0,3	0,4	0,3
VAN	0	54,92	118,52

Cuadro 2

A partir de estos valores, podríamos intentar construir la distribución del VAN, eliminando la discretización de la variable. Si aceptáramos que la distribución es aproximadamente normal, aplicaríamos directamente el modelo del VAP conocido: calcularíamos el promedio del VAN y lo penalizaríamos restándole una desviación típica, estando en este caso plenamente justificado razonar en términos de μ y σ. Sin embargo, los valores estimados de VAN presentan una pequeña asimetría, que puede hacernos algo más difícil aceptar la normalidad de la distribución. Una alternativa sería aplicar algún test de normalidad, pero no parece que, en nuestro caso, esto tenga demasiado sentido, dada la poca información de partida y lo altamente discretizada que se encuentra.

Llegados a este punto, puede ser interesante realizar una breve reflexión, que enlaza con lo apuntado en el primer párrafo de este mismo apartado, y que se refiere a la interpretación de la información. Lo habitual es que los datos referentes a una inversión no sean conocidos con

certeza, sino que estén sujetos a una cierta variabilidad. Podríamos ir más lejos, y afirmar que, en la mayoría de los casos, el trabajo más difícil del decisor radica, precisamente, en la estimación de la información relevante a la decisión, en aquello que constituye normalmente el "planteamiento" del problema.

A todo ello hay que añadir el hecho de que es frecuente que el decisor no sea el encargado de estimar toda la información relevante. Así, preguntará normalmente al jefe de ventas sobre la cantidad de un producto que puede venderse; o al de producción sobre las unidades que una máquina es capaz de producir; o al responsable de aprovisionamientos sobre la cantidad que estima debe quedar en almacén, … Esto añade una dificultad adicional, que es la interpretación de la información disponible.

Es habitual suponer que los datos de los que se dispone, incluso en un caso encuadrado dentro de un entorno de riesgo, se entiendan como seguros. Es decir, que si se nos dice que, como en este caso, existe un 30% de probabilidad de obtener unas determinadas generaciones de fondos, éste dato se entienda al pie de la letra. Y sin embargo, si nos detenemos un instante, encontraremos a veces que este supuesto es absurdo.

Partiremos, pues, de la idea de que la información que se nos ha proporcionado es con frecuencia imperfecta, y que el primer paso que debemos realizar es la interpretación de la misma. Y proponemos la siguiente forma de actuación: en los casos en que la normalidad sea aceptable, trabajaremos con la penalización directa del VAN; cuando esta hipótesis sea difícilmente creíble, seguiremos un camino alternativo, que debe entenderse como una generalización del VAP en el caso de que la distribución no siga una forma conocida.

Dado que en nuestro caso la información está muy discretizada (solo tres valores), rechazaremos en una primera aproximación que la distribución sea normal, y aplicaremos un sistema alternativo: tal como se verá, el sistema propuesto es subjetivo, pero entendemos que siempre podrá llegarse, con ayuda de la persona que aporta la información, a determinar si la realidad se comporta o no de manera suficientemente aproximada a los supuestos que se realicen.

Empezaremos suponiendo que la distribución con la que contamos no se parece a ninguna conocida, por lo que intentaremos construir el histograma correspondiente. Al distribuirse los datos de forma ligeramente asimétrica respecto al promedio, los intervalos no van a tener el mismo tamaño, ni siquiera tienen por qué ser centrados. En este sentido, entendemos los valores calculados de VAN como "marcas de clase" un tanto "sui géneris": calcularemos el límite inferior de un intervalo y el superior del siguiente como punto equidistante de las dos "marcas de clase", con lo que garantizamos que cada posible valor intermedio queda clasificado dentro del intervalo de cuya marca se encuentra más cercano. Obviamente, el proceso nos va a dar intervalos no simétricos respecto a lo que hemos tomado como marca de clase. Entendemos que no es esto lo importante, como comentaremos después.

En lo que se refiere al primer y último intervalos, la forma de cálculo de los límites inferior y superior se realizará, respectivamente, restando o sumando a la marca de clase correspondiente el valor obtenido previamente para la mitad contraria del propio intervalo. Veámoslo en nuestro caso concreto.

Llamando:

L_{i_j} Límite inferior del intervalo j.

L_{s_j} Límite superior del intervalo j.

y realizando las siguientes operaciones:

$$\frac{54,92 - 0}{2} = 27,46 \rightarrow L_{s_1} = L_{i_2} = 0 + 27,46 = 27,46$$

$$\rightarrow \; L_{i_1} = 0 - 27,46 = -27,46$$

$$\frac{118,52 - 54,92}{2} = 31,8 \rightarrow L_{s_2} = L_{i_3} = 54,92 + 31,8 = 86,72$$

$$\rightarrow \; L_{s_3} = 118,52 + 31,8 = 150,32$$

llegamos al histograma que aparece en la figura 4, donde las alturas de los diferentes intervalos se han calculado de forma que el área de los mismos refleje su probabilidad. Concretamente, se han calculado de la siguiente forma (llamando b_j a la base del intervalo j y h_j a su altura):

$$b_1 \cdot \; h_1 = 0,3 \rightarrow h_1 = \frac{0,3}{(27,46 + 27,46)} = \frac{0,3}{54,92} = 0,00546$$

$$b_2 \cdot \; h_2 = 0,4 \rightarrow h_2 = \frac{0,4}{(86,72 - 27,46)} = \frac{0,4}{59,26} = 0,00675$$

$$b_3 \cdot \; h_3 = 0,3 \rightarrow h_3 = \frac{0,3}{(150,32 - 86,72)} = \frac{0,3}{63,6} = 0,00472$$

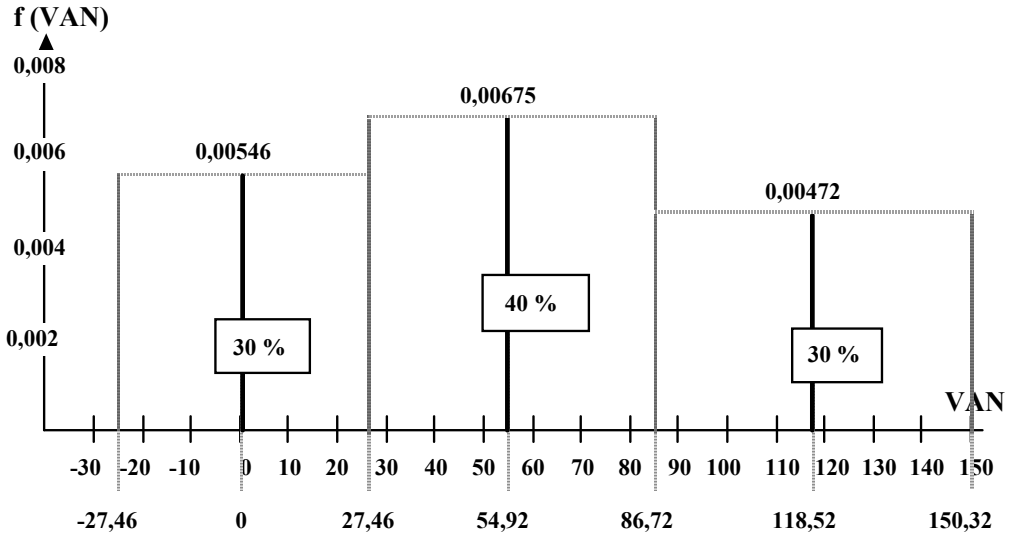


Figura 4

Un breve comentario respecto a la razón de optar por esta opción. Podríamos haber elegido representar los intervalos de forma que las alturas fueran las que representaran las probabilidades de cada uno de ellos. Pensemos en un ejemplo: supongamos una distribución en la cual la mayor parte de la probabilidad se reparte dentro de unos valores centrales, en un rango amplio de valores. Por ejemplo, supongamos que la probabilidad asignada a un VAN de -15 sea de un 25%, y la de un VAN de +15 sea igualmente de un 25%. También nos dice el "informador" que la probabilidad de obtener un VAN de -25 es de un 15%, y la de un VAN de -27 de un 10%. Igualmente, las probabilidades asignadas a unos VANes de 25 y 27 son de un 15% y un 10%, respectivamente.

Analizando la distribución original (variable discreta), podríamos pensar que es lógico aceptar la normalidad de la distribución. Y a esta conclusión podríamos también llegar si, al convertir en continua esta variable, los intervalos tuvieran unas alturas equivalentes a las probabilidades de cada uno de ellos. Sin embargo, si representamos los intervalos de forma que sus áreas representen las probabilidades, observaremos que los intervalos extremos tienen una altura mayor que los centrales (a pesar de que la probabilidad es más pequeña, al tener una base del intervalo mucho menor, no hay más remedio que darles una mayor altura para respetar la probabilidad asignada). Esta representación nos haría más difícil aceptar la normalidad de la distribución. Puede verse todo esto de manera gráfica en las figuras 5 y 6.

¿Cuál de las dos aproximaciones es mejor? Nuestra opinión es que claramente la segunda (la que propone mantener la proporcionalidad entre áreas y probabilidades). Lo que ocurre es que lo que es difícil de aceptar es que la distribución original tenga esa forma: no parece lógico que el "informador" sea capaz de afinar tanto en valores extremos (nótese que es capaz de dar probabilidades a valores alejados en tan solo dos unidades en dichos extremos), y tan poco en los valores centrales (que, por su probabilidad, son mucho más frecuentes). Por otro lado, no es corriente que nos encontremos con este tipo de distribuciones en la realidad.

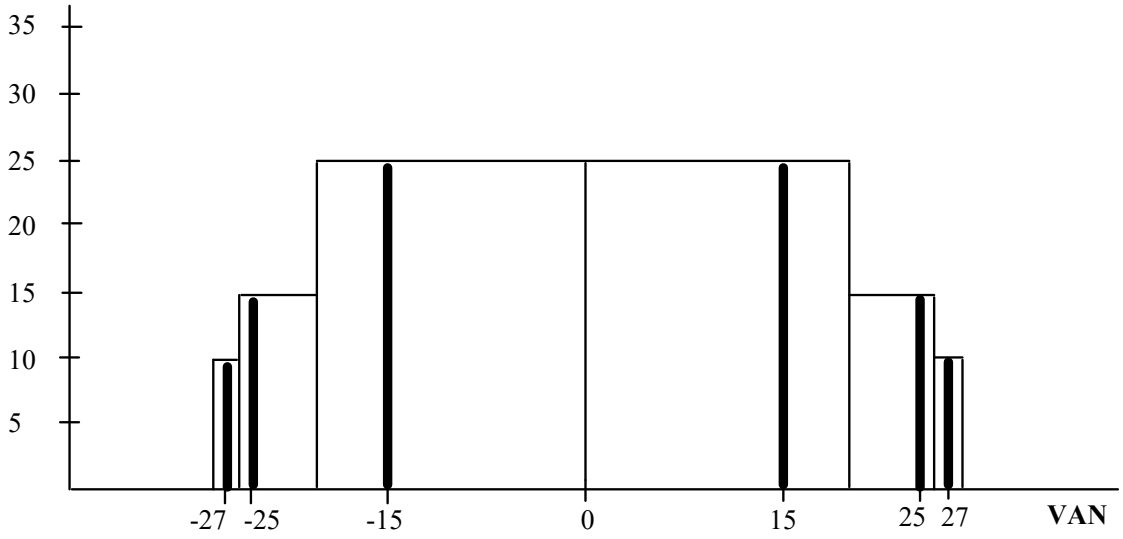


Figura 5

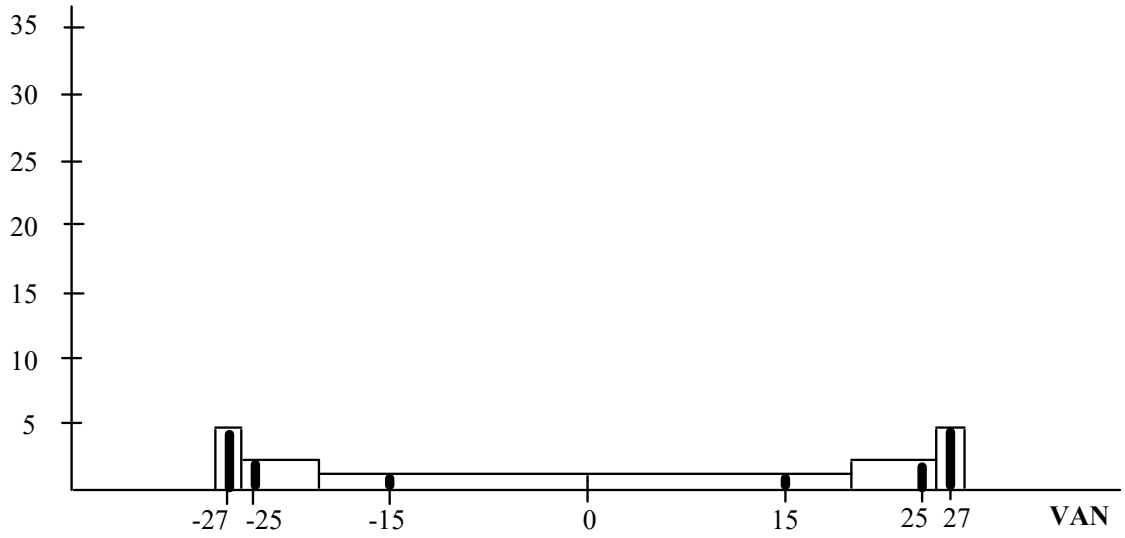


Figura 6

Pero todo esto es simplemente una crítica a la información de partida, a la credibilidad que podemos dar a esa información inicial. Si aceptamos como buena dicha información, es decir, si nos creemos que la distribución discreta aportada inicialmente es correcta, entonces lo lógico es no aceptar la normalidad de la distribución continua. Normalmente no se producirán situaciones tan raras como la planteada en el ejemplo, por lo que las dos posibilidades (probabilidad = altura ó probabilidad = área) son defendibles en términos generales. Pero, en caso de discrepancia, nos inclinamos por la proporcionalidad entre área y probabilidad.

En este punto, y siguiendo con nuestro ejemplo original, se trata de buscar el valor de VAN que, en la distribución así construida (figura 4), deje un 15,87% de probabilidad a su izquierda (o dicho de otra forma, el valor mínimo de VAN garantizado con un 84,13% de probabilidad). En nuestro caso, dado que 54,92 es la amplitud del intervalo inferior (27,46 • 2, al ser simétrico, por la propia forma de cálculo), tendremos que, interpolando, el valor buscado es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} 54{,}92 & \text{——————} \quad 30\% \\ X & \text{——————} \quad 15{,}87\% \end{array} \quad \Bigg| \quad \rightarrow X = \frac{54{,}92 \times 15{,}87}{30} = 29{,}053$$

$$VAP = -27{,}46 + 29{,}053 = 1{,}593$$

el cual resulta ser positivo, lo que indica que el proyecto es interesante. Veamos la solución a la que llegaríamos si aceptáramos la normalidad de la distribución.

Aplicando las fórmulas de cálculo de la esperanza matemática y desviación típica de una variable aleatoria a los datos de partida (previos a la confección del histograma), tenemos:

$$E(VAN) = \sum_{i=1}^{3} VAN_i \cdot P(VAN_i) \quad [9]$$

$$\sigma(VAN) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} [VAN_i - E(VAN)]^2 \cdot P(VAN_i)} \quad [10]$$

$$E(VAN) = 57,5244$$
$$\sigma(VAN) = 45,9518$$
$$VAP = 11,5727$$

que resulta también ser positivo, por lo cual la conclusión es la misma en ambos casos. Consideramos que ello es suficiente para aceptar el proyecto. En caso de discrepancia, habría que tratar de determinar cuál de las dos hipótesis es más razonable, incluso sería interesante un análisis de sensitividad de la solución. Podemos señalar como justificación de la diferencia obtenida en función de ambos criterios el hecho de que en la visión "histogramática" se está hipervalorando la probabilidad de las colas (lo normal es que la probabilidad de obtener valores inferiores a 0 -límite inferior de la información de partida- sea menor a la de obtener valores entre 0 y 27,46 -límite superior del intervalo inferior-). Permítanos el lector insistir nuevamente en una idea que, aunque ya comentada, consideramos clave para entender este planteamiento. Las dos alternativas propuestas respecto a la distribución del VAN (la normal y la "histogramática") sólo pretenden ser interpretaciones de la información que el planteamiento del caso proporciona. Lo importante, en la práctica, es que el que proporciona la información nos diga cuál de ellas (si alguna) se acerca más a su previsión de la realidad. Incluso en un caso como éste, en el que no hay discrepancia entre ambos criterios, puede ser interesante cotejar nuestras interpretaciones con el informador.

9. Conclusiones

Entendemos que el proceso no es del todo "ortodoxo" desde un punto de vista teórico, y que requiere algunas simplificaciones de diverso orden. Sin embargo, en el caso de que no sea aceptable la hipótesis de normalidad en la distribución del resultado de un proyecto, no sólo el VAP deja de ser aplicable directamente (también los criterios de Ajuste del tipo de descuento y Equivalente de certeza, si los basamos en el CAPM, presentan problemas teóricos). La pretensión del VAP ha sido siempre la de servir como criterio práctico de decisión, aunque soportado en una adecuada justificación teórica. La aplicación actual debe entenderse como una generalización del modelo, aceptando las simplificaciones realizadas en su justa medida, y analizando la robustez del criterio. En este sentido, vemos que, en nuestro ejemplo, llegamos a la misma solución por ambos caminos.

Una posible crítica, que se refiere más al planteamiento que a la solución, es el hecho de que la compañía está teniendo en cuenta el riesgo total del proyecto, y no la cantidad de riesgo que

aporta al conjunto de la empresa. Incluso podríamos ir más lejos: en el contexto del CAPM, el riesgo que debería tenerse en cuenta es el sistemático, aquél que el accionista no va a poder diversificar[4]. Sin negar el interés y conveniencia de considerar estos aspectos, también podemos decir que, desde un punto de vista puramente práctico (dejando de lado purismos teóricos), la solución aquí propuesta puede considerarse como suficiente en muchos casos.

Bibliografía

BERGES, A. (1984): *El mercado español de capitales en un contexto internacional*, Ministerio de Economía y Hacienda, Madrid.

CEPEDA, J.M. y A. VARGAS (1990): "La simulación de Montecarlo: una aplicación práctica", *Boletín de Estudios Económicos*, 140, Agosto, págs. 391-414.

FRIEDMAN, M. and L.J. SAVAGE (1948): "The utility analysis of choices involving risk", *The journal of political economy*, Agosto, págs. 279-304.

GOMEZ-BEZARES, F. (1989): "Modelos de valoración de acciones en la Bolsa de Bilbao", *Cuadernos de Gestión*, Marzo, págs. 103-128.

GOMEZ-BEZARES, F. (1991): *Dirección financiera (Teoría y Aplicaciones)*, Desclée de Brouwer, Bilbao, 2ª ed.

GOMEZ-BEZARES, F. (1993a): *Las decisiones financieras en la práctica*, Desclée de Brouwer, Bilbao, 4ª ed.

GOMEZ-BEZARES, F. (1993b): "Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions", en Aggarwal, ed., *Capital budgeting under uncertainty*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, págs. 91-102.

GOMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBAÑEZ (1994): Valoración de acciones en la Bolsa española. Un análisis de la relación entre la rentabilidad y el riesgo, Desclée de Brouwer, Bilbao.

GOMEZ-BEZARES, F. y J. SANTIBAÑEZ (1991): "Las carteras en la bolsa de Bilbao (1980-87)", *Actualidad financiera*, 28, Julio, págs. F547-F559.

HERTZ, D.B. (1964): "Risk analysis in capital investment", *Harvard business review*, Enero-Febrero, págs. 95-106. Existe traducción al castellano en Harvard-Deusto, 2, Bilbao, 1977.

MADARIAGA, J.A. (1994): *Rentabilidad y riesgo de las acciones en el Mercado Continuo español*, Tesis doctoral, Universidad Comercial de Deusto, Bilbao.

[4] El VAP puede adaptarse a esta situación variando la t (Gómez-Bezares, 1991, cap. X). También podría estudiarse la posibilidad de considerar sólo la variabilidad relevante.

MAGEE, J.F. (1964): "Decision trees for decision making", *Harvard business review*, Julio-Agosto, págs. 126-138. Existe traducción al castellano en Harvard-Deusto, 26, Bilbao, 1978.

SANTIBAÑEZ, J. (1992): *Inversión y Financiación: Casos resueltos*, Universidad de Deusto, Bilbao.

SANTIBAÑEZ, J. (1994): *Valoración de acciones en la bolsa española (1959-1988)*, Tesis doctoral, Universidad Comercial de Deusto, Bilbao.

VON NEUMANN, J. and O. MORGENSTERN (1947): *Theory of games and economic behaviour*, Princeton university press, Princeton, 2ª ed. (la 1ª ed. es de 1944).

ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE EL VALOR ACTUALIZADO PENALIZADO (VAP)

por Jon Paul Laka y Javier Santibáñez
Comunicación presentada al *III Foro de Finanzas*, Universidad Comercial de Deusto, Bilbao, Nov.-Dic. de 1995
Publicado en Gómez-Bezares, F. y J. V. Ugarte, ed., *III Foro de Finanzas,* 1995, págs. 75-91

1. Introducción

El objetivo de esta comunicación es realizar una serie de reflexiones sobre un criterio de tratamiento de la decisión de inversión en ambiente de riesgo relativamente novedoso, el Valor Actualizado Penalizado (VAP), que puede resultar interesante como complemento a los ya existentes.

El VAP nace de la mano del profesor Gómez-Bezares a mediados de los ochenta[1], por lo que se cumplen ya los diez años desde su aparición. A la intuición que invariablemente precede a cualquier nueva idea, siguió un proceso de desarrollo del criterio, de justificación teórica del mismo, y de intentar acercarlo en la manera de lo posible a las personas que deben tomar este tipo de decisiones en la empresa. En este sentido, llevamos ya algunos años enseñándolo en nuestras clases como una alternativa más, que pretende ser sencilla, a los criterios clásicos de tratamiento del riesgo en la decisión de inversión. Debemos reconocer que, si bien la idea ha sido en principio bien acogida en los distintos cursos, no tenemos certeza sobre el grado de utilización que del mismo se está haciendo en la realidad, aunque ello no nos obsesiona, ya que todo nuevo planteamiento requiere un tiempo para afianzarse hasta que cala en la realidad empresarial.

En cualquier caso, lo que se pretende aquí no es "sustituir" los criterios clásicos por el que aquí proponemos, sino mostrar su interés como una herramienta más en la toma de decisiones. Con esta intención, realizaremos una presentación del criterio, haremos una breve justificación teórica del mismo, y trataremos de generalizar su aplicación a aquellas situaciones en las que no

[1] El primer trabajo relacionado con el tema data de 1984 (Gómez-Bezares, 1984), en el que aparece planteada la idea, aunque no con el nombre de VAP. En mayor profundidad, se encuentra desarrollado en Gómez-Bezares (1991, 1993a y 1993b).

se cumplen todas las hipótesis de partida del mismo. Así mismo, realizaremos algunas reflexiones que permitirán relacionarlo con otros criterios clásicos de tratamiento del riesgo. Con todo, el objetivo último de la presente comunicación no es hacer una presentación exhaustiva del VAP (que por otro lado, puede encontrarse, en su estado de desarrollo actual, en las publicaciones citadas a lo largo del trabajo), sino más bien aportar un documento que pudiera resultar de utilidad para la discusión en este III Foro de Finanzas.

2. La decisión de inversión en ambiente de riesgo

Como es conocido, en Finanzas asociamos el concepto de riesgo a "variabilidad en el resultado de la decisión". Ha sido también ampliamente justificado el hecho de que, en condiciones normales, el individuo se comporta en la toma de decisiones empresariales como "enemigo del riesgo" (es decir, prefiere un valor seguro a un promedio igual pero sujeto a variabilidad, lo cual se justifica simplemente si aceptamos que la utilidad marginal del dinero es decreciente). Así, si el decisor debe tomar decisiones con datos conocidos con seguridad, valorará las inversiones en términos comparativos a la rentabilidad que podría obtener en el mercado en una inversión suficientemente garantizada (la que proporciona, por ejemplo, la Renta Fija del Estado), mientras que sólo estará dispuesto a aceptar proyectos arriesgados en la medida en que su rentabilidad esperada (el rendimiento promedio) sea superior a la que proporcionan los proyectos seguros. Ello significa que el inversor no se fijará sólo en el valor que como promedio puede obtener de una inversión: dado que se comporta como enemigo del riesgo, tratará de analizar la variabilidad del resultado esperado, siendo tanto más exigente cuanto mayor sea el riesgo del proyecto.

Si suponemos que el resultado del proyecto sigue una distribución normal (lo cual no repugna a la razón, a menos que tengamos razones fundadas para pensar lo contrario), el decisor podrá tomar sus decisiones fijándose en dos parámetros: el promedio y la desviación típica (o la varianza, como medida del riesgo) de dicho resultado. Dadas las ventajas que el Valor Actualizado Neto (VAN) presenta frente a los demás criterios de decisión en lo que se refiere a las inversiones, razonaremos sobre la base de este criterio, si bien más tarde haremos también algunas referencias a otro método muy utilizado en la práctica, la Tasa de Rentabilidad Interna (TRI).

Recordemos brevemente cómo se tomaría la decisión respecto al interés de un proyecto de inversión en ambiente de certeza (cuando todos los datos que afectan al problema son conocidos con seguridad). En estas condiciones, el analista estimaría el perfil de tesorería asociado al proyecto en cuestión, es decir, el impacto que tiene en la tesorería de la empresa a lo largo de su vida útil (para proyectos de largo plazo, suele considerarse el año como periodo base para el análisis): es lo que en finanzas llamamos "Generaciones de fondos" motivadas por el hecho de afrontar el proyecto (tanto positivas como negativas). Una vez calculado dicho perfil, de lo que se trata es de ver si el proyecto rinde al menos lo que podría obtenerse invirtiendo la misma cantidad en el mercado. El mejor método para hacerlo es utilizar el VAN:

$$VAN = - DI + \sum_{i=1}^{n} \frac{GF_i}{(1+k)^i} \quad [1]$$

donde:

DI Desembolso Inicial a realizar para afrontar el proyecto

GF_i Generación de Fondos (impacto en caja) del proyecto en el año i

k Coste de los fondos o rentabilidad mínima a exigir al proyecto (entendido como coste de oportunidad; en ambiente de certeza, el rendimiento de la renta fija)

n Número de años en los que el proyecto tiene efectos en la tesorería de la empresa (vida útil del proyecto)

Si el VAN es positivo, el proyecto es interesante, pues rinde a los fondos invertidos la rentabilidad que ofrece el mercado, y proporciona, además, un incremento de riqueza al decisor (que viene dado, precisamente, por el propio valor de VAN obtenido), mientras que si el VAN es negativo, el proyecto es rechazado.

En ambiente de riesgo, las generaciones de fondos no son conocidas con seguridad, no son valores concretos, sino variables aleatorias. Como hemos dicho, parece lógico pensar que, en esta situación, el decisor se comportará como enemigo del riesgo, exigiendo un rendimiento mayor que el proporcionado por las inversiones seguras, un premio por asumir el riesgo reportado por el proyecto.

Para ello, las Finanzas ofrecen dos sistemas clásicos de penalización del VAN en función del riesgo:

- Ajuste del tipo de descuento. Consiste en descontar las generaciones de fondos esperadas del proyecto a un tipo superior al rendimiento del título sin riesgo. Es decir, que el criterio exige la estimación de una prima de rentabilidad en función del riesgo del proyecto:

$$VAN_{ajustado} = - DI + \sum_{i=1}^{n} \frac{E(GF_i)}{(1+k+P)^i} \quad [2]$$

donde:

$E(GF_i)$ Generación de fondos esperada (sujeta a riesgo)

k Tipo de descuento para inversiones sin riesgo (rendimiento de la renta fija)

P Prima por riesgo[2]

[2] Para estimar la prima por riesgo hay que tener una idea de la magnitud de éste último. Una posibilidad sería estimar la distribución del VAN, lo que nos permitiría conocer la variabilidad del mismo, y por tanto, hacernos una

- Equivalente de certeza: propone valorar el proyecto mediante la estimación de los valores seguros que reportan la misma utilidad que las generaciones de fondos esperadas, descontándolas después al tipo de interés sin riesgo.

$$VAN_{ajustado} = -DI + \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i \cdot E(GF_i)}{(1+k)^i} = -DI + \sum_{i=1}^{n} \frac{GF'_i}{(1+k)^i} \quad [3]$$

donde:

α_i Coeficiente corrector (para enemigos del riesgo, entre cero y uno)

GF_i' Generación de fondos equivalente cierta

El problema fundamental de ambos criterios es la estimación de los parámetros necesarios para su utilización: la prima por riesgo "P", en el caso del Ajuste del tipo de descuento, y los coeficientes correctores "α_i", en el Equivalente de certeza. Caben para este propósito, desde procedimientos basados en la intuición y la experiencia, hasta métodos más científicos y sofisticados que, en ocasiones, alejan los criterios de su utilización en la práctica.

Dentro de estos últimos, tenemos la posibilidad de utilizar el CAPM (Capital Asset Pricing Model, o Modelo de Valoración de Activos de Capital). A partir de este modelo, pueden estimarse los parámetros propuestos, si bien el riesgo que es considerado es sólo aquél que, según el mismo, es relevante, el riesgo sistemático (el que no puede eliminarse por diversificación). Sin embargo, la utilización de este tipo de modelos no está absolutamente clara en la realidad (véase, por ejemplo, Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 1994).

3. El Valor Actualizado Penalizado (VAP)

3.1. Presentación del criterio

Frente a los criterios clásicos propuestos, aparece el VAP. Mientras que el Ajuste del tipo de descuento propone penalizar el interés de un proyecto arriesgado a través del denominador del VAN, y el Equivalente de certeza lo hace a través de los numeradores, el VAP penaliza directamente el promedio de VAN. De entre las múltiples formas de hacerlo, nos decantaremos por aquella que tiene una interpretación más clara, la penalización lineal, que consiste en restar del promedio de VAN "t" veces la desviación típica del mismo[3], según la siguiente fórmula:

---

idea del riesgo asociado al proyecto. Para ello, pueden calcularse los VANes posibles, según los distintos estados de la naturaleza que pudieran producirse, descontando las generaciones de fondos de cada posible situación al tipo de interés sin riesgo (si bien ésta es una posibilidad que no es defendida por todos los autores).

[3] Calculados ambos parámetros (promedio y desviación) a partir de los valores posibles de VAN descontados al tipo de interés sin riesgo.

$$VAP = E(VAN) - t \bullet \sigma(VAN) \qquad [4]$$

donde:

E(VAN)	Esperanza matemática de VAN
σ(VAN)	Desviación típica de VAN

aceptando aquellos proyectos con VAP positivo, y siendo el interés de los mismos tanto mayor cuanto mayor sea el valor obtenido. Intuitivamente, la idea es sencilla: frente al individuo indiferente al riesgo, que analizaría el interés de un proyecto fijándose sólo en el promedio de VAN (calculado al tipo de interés sin riesgo), el enemigo del riesgo penalizaría tanto más los proyectos cuanto mayor sea su riesgo (medido por la desviación típica). Y permite que aquellos con mayor aversión al riesgo penalicen más el mismo proyecto, simplemente utilizando un parámetro "t" de penalización superior.

3.2. Justificación teórica del VAP y relación con otros criterios de decisión

Pasemos a recordar brevemente la justificación teórica del criterio. Si jugamos con la fórmula propuesta [4], vemos que razonar sobre la base del VAP es, de alguna manera, hacerlo en términos de utilidad, y podemos ligar conceptualmente este criterio con la idea que está detrás del Equivalente de certeza:

$$E(VAN) = VAP + t \bullet \sigma(VAN) \qquad [5]$$

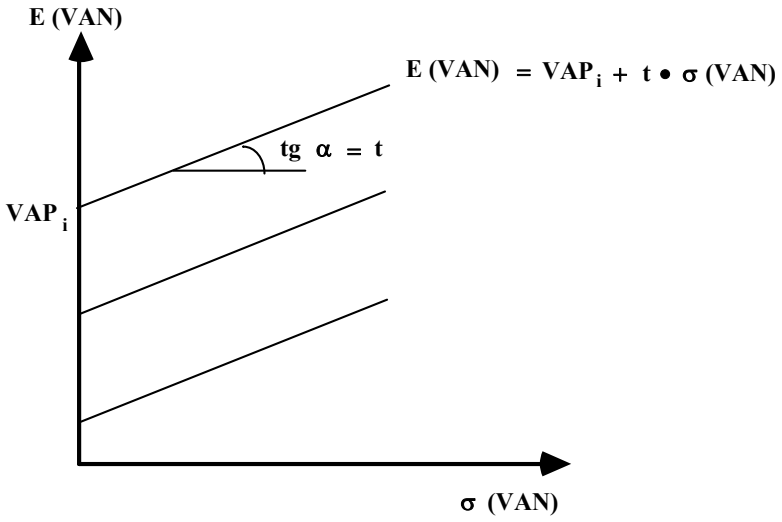


Figura 1

Es decir, que, tal como puede verse en la figura 1, la fórmula [5] define un haz de rectas con pendiente "t", y al valorar un proyecto según su VAP, lo hacemos en función del VAN equivalente cierto: efectivamente, todos los proyectos que se sitúan en una misma recta tienen el mismo VAP, son indiferentes, y su interés coincide con el de un proyecto sin riesgo, cuyo VAN es el propio VAP. Ello significa que nos encontramos ante una medida de la utilidad del proyecto, supuestas rectas en lugar de curvas de indiferencia (si aceptamos la utilidad marginal decreciente del dinero, y partimos de distribuciones normales de resultado, puede demostrarse con todo rigor[4] que las curvas de indiferencia del individuo serán convexas vistas desde abajo, por lo que esto debe entenderse como una primera simplificación del criterio, que tiene sus consecuencias a la hora de utilizarlo).

Lo que es claro es que, una vez definida la "t" que debe utilizarse, la recta que parte del origen de coordenadas con pendiente "t" es la que delimita la zona de proyectos interesantes: el área superior representa los proyectos que cumplen con las condiciones impuestas (al ser sus VANes equivalentes ciertos positivos), mientras que en la inferior aparecen aquellos cuya esperanza de VAN no es suficiente como para compensar al decisor del riesgo que le reportan (véase figura 2). Y, de entre los proyectos que cumplen, habría que elegir aquellos que tengan un mayor VAP, es decir, los que permitan situarse en la recta de indiferencia más alejada posible del origen de coordenadas.

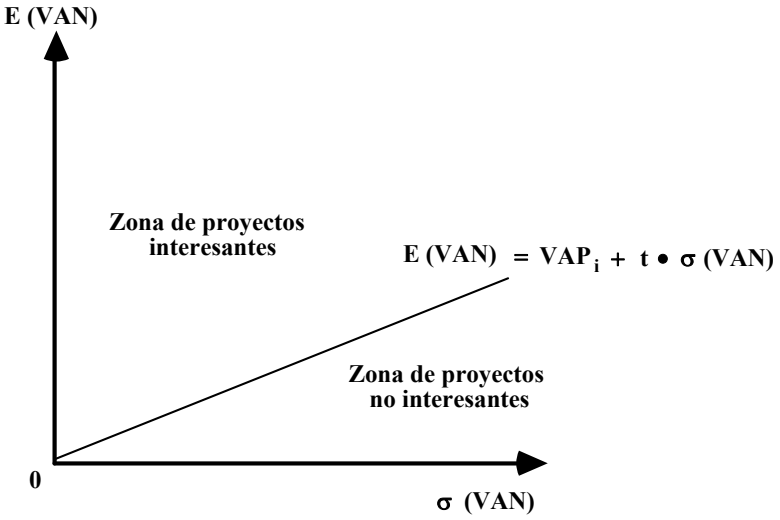


Figura 2

El problema ahora es cómo determinar el valor de "t" a utilizar. Para ello, tratemos de interpretar el significado de este parámetro, para lo que jugaremos nuevamente con la fórmula propuesta [4]. Así, vemos que el VAP no es otra cosa que aquél valor de VAN que se aleja "t" desviaciones típicas respecto del promedio (por la izquierda). Esto recuerda al concepto de "tipificación", donde lo que buscamos es precisamente redefinir el valor de una variable (que

[4] Véase Gómez-Bezares (1991, cap. IV).

sigue la distribución normal) en términos del número de desviaciones típicas que se aleja respecto del promedio:

$$-t_{\alpha} = \frac{VAP - E(VAN)}{\sigma(VAN)} \qquad [6]$$

En el VAP, el proceso es el inverso, pero conceptualmente idéntico: conocidos el promedio y la desviación típica del VAN, y en función del grado de aversión al riesgo del decisor, determinamos el valor de "t", con lo que el resultado del VAP será aquél valor de VAN que se aleja exactamente "t" desviaciones típicas del promedio. Es por lo tanto un valor de VAN que está garantizado, como mínimo, con una probabilidad 1-α, que depende del valor de "t" utilizado. Ello nos permite determinar por dónde podría estar el valor de "t": si utilizamos un valor de 1, el VAP obtenido será aquel VAN de todos los posibles que se aleja una desviación típica del promedio (por la izquierda, por la propia definición del criterio), por lo que es el valor garantizado con una probabilidad del 84%, aproximadamente; una "t" de 2 supondría fijarnos en un valor garantizado con una probabilidad del 98%, aproximadamente; y una "t" de tres supondría exigir garantías cercanas al 99,9%. Puede verse todo esto en la figura 3.

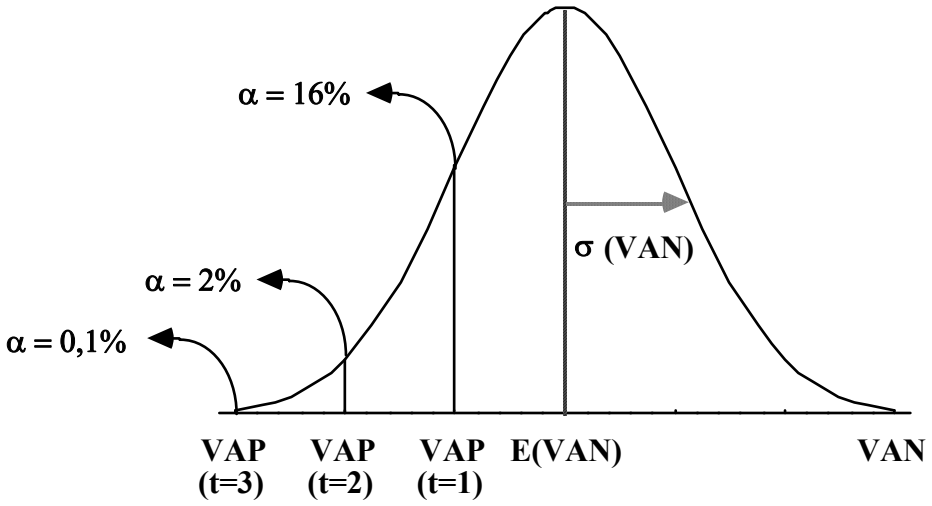


Figura 3

A nuestro juicio, un valor lógico a utilizar en la práctica estaría entre 1 y 2, al considerar que los niveles de garantía conseguidos son suficientes. No debemos olvidar que, según el criterio propuesto, valoramos el interés del proyecto en función de un valor penalizado, que consideramos como representativo del mismo. Utilizar valores de "t" demasiado elevados sería exigir niveles de garantía demasiado grandes: en la práctica, tener una garantía de éxito de 1/1000 o de 1/10000 no es muy diferente, y sin embargo, exigir una u otra cosa tiene efectos importantes en el valor de VAP obtenido, y por tanto, en el interés del proyecto.

Tratemos ahora de ligar el criterio con el concepto del "Ajuste del tipo de descuento". Para ello, aplicaremos el concepto del VAP a la Tasa de Rentabilidad Interna (TRI). Supongamos que lo que utilizamos para analizar el interés de un proyecto es éste último criterio, estimando, en caso de riesgo, el promedio y desviación de TRI asociados al mismo. El Ajuste del tipo de descuento propone descontar las generaciones de fondos a un tipo primado, aceptando los proyectos siempre que el VAN resultante sea positivo. Esto es equivalente (a la hora de aceptar o rechazar[5]) a comparar la TRI del proyecto (calculada a partir de las generaciones de fondos esperadas) con un tipo de referencia primado, aceptándolo siempre que la TRI del proyecto sea superior a dicho tipo.

Aplicando el concepto del VAP a la Tasa de Rentabilidad Interna, podríamos penalizar la TRI del proyecto en función del riesgo que aporta, proponiendo el siguiente sistema de penalización:

$$TRIP = E(TRI) - t \bullet \sigma(TRI) \qquad [7]$$

donde:

TRIP Tasa de Rentabilidad Interna Penalizada

Al igual que pasaba con el VAP, esto supondría que, una vez definida la "t", todos los pares de valores E(TRI),σ(TRI) que se encuentren en la misma recta serían indiferentes, y todos ellos lo serían a aquél valor de TRI sin riesgo representado por el punto de corte de la recta con el eje de ordenadas. Por lo tanto, y a diferencia del VAP, la recta que delimita la zona de proyectos interesantes sería la que parte del tipo de interés sin riesgo (ya que éste siempre es accesible por el accionista), siendo los proyectos que quedaran por encima de dicha recta interesantes. Puede verse gráficamente esta idea en la figura 4.

Por otro lado, la interpretación de la "t" sigue siendo exactamente la misma: efectivamente, al tomar la TRIP como medida del interés de un proyecto, lo que hacemos es juzgarlo en función de un posible valor de TRI garantizado con un determinado nivel de garantía (que depende del propio valor de "t" utilizado).

De esta manera, despejando en la ecuación propuesta [7], y teniendo en cuenta la condición señalada para la aceptación del proyecto, llegamos a una fórmula de "Ajuste del tipo de descuento":

$$E(TRI) = \text{Tipo sin riesgo} + t \bullet \sigma(TRI) \qquad [8]$$

[5] A la hora de jerarquizar pueden aparecer diferencias en el orden obtenido en función del VAN y de la TRI, al considerar ambos criterios diferentes hipótesis en lo relativo a la reinversión de las generaciones de fondos aportadas por el proyecto.

donde E(TRI) es el mínimo a cumplir por los nuevos proyectos, en función de su riesgo. Pero ahora disponemos de una forma más sencilla de determinar la prima, al tener el valor de "t" una interpretación clara y sencilla.

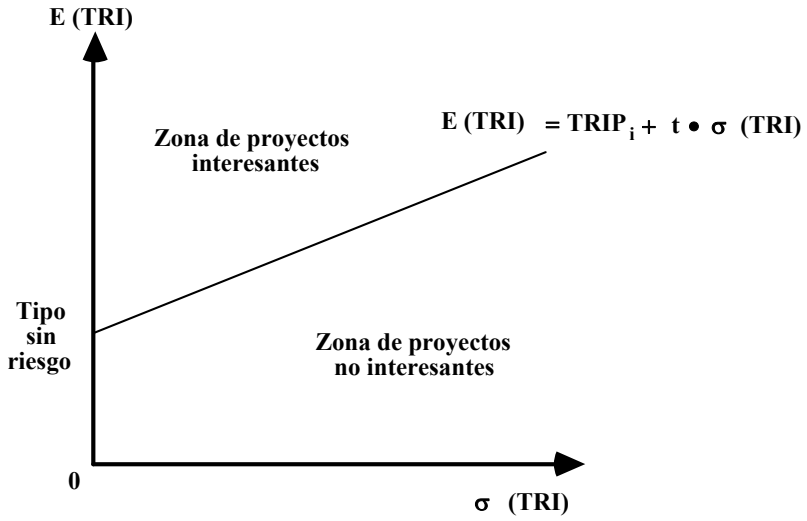


Figura 4

3.3. Algunos problemas del planteamiento

Existen varios problemas en el planteamiento propuesto por el Valor Actualizado Penalizado:

- El primero sería el hecho de que se está considerando el riesgo total del proyecto, y no el que según los modelos que se derivan de la teoría de cartera de Markowitz sería relevante (el sistemático). Ello podría ser tenido en cuenta, considerando alguna medida del riesgo sistemático en lugar del riesgo total (como la beta propuesta por el CAPM). El problema es que la interpretación de la "t" deja de ser tan intuitiva e inmediata. Por otro lado, ya hemos comentado que la aplicabilidad de las conclusiones del CAPM no es evidente, al menos en muchos casos.

- Un segundo problema radica en el hecho de que la hipótesis de rectas de indiferencia no es sostenible, salvo que se analicen proyectos de riesgo similar. Por otro lado, la solución de utilizar valores de "t" distintos en función del riesgo de los proyectos penaliza enormemente a aquellos cuyo riesgo sea grande, limitando de manera importante el interés de los mismos. Esto es así porque el interés de un proyecto se analiza en función de la ordenada en el origen de la recta en la que se sitúa, y cuando utilizamos valores de "t" elevados, los que presentan un alto riesgo tienen muy pocas posibilidades de situarse en la zona de proyectos interesantes. El problema que está detrás es el hecho de que, en realidad, no se trata de rectas sino de curvas de indiferencia. Ello puede resolverse utilizando penalizaciones no lineales, pero el problema es que la "t" deja nuevamente de tener una interpretación tan clara e intuitiva.

- Un tercer problema sería el que se deriva del hecho de que el VAN, en algunos casos, no tiene por qué seguir la distribución normal. Para afrontar este problema, el propio profesor Gómez-Bezares (1991) propone la posibilidad de utilizar la distribución beta incompleta, que

puede ser de utilidad en algunos casos. El problema de esta forma de actuar es que, en ocasiones, ello supone desperdiciar una parte importante de la información de partida con la que se cuenta. Otra alternativa distinta podría ser la generalización del criterio al caso de que la distribución del VAN no siga ninguna distribución teórica conocida: es lo que hemos llamado "visión histogramática" del VAP (Santibáñez, 1995).

En relación con este último punto comentado, y de manera coherente con la intención de aportar una herramienta aplicable en la práctica, podría resultar de interés recoger aquí algunas fórmulas sencillas, que se derivan de la aplicación del concepto propuesto en algunas situaciones concretas[6]. Así, en ocasiones resulta más fácil conseguir estimaciones de los valores mínimo y máximo de VAN asociados a un proyecto, más que las correspondientes a su promedio y desviación típica. En estos casos pueden utilizarse simplificaciones para la obtención de estos dos parámetros, como las que se proponen a continuación:

$$E(VAN) = \frac{a + b}{2} \qquad [9]$$

$$\sigma(VAN) = \frac{b - a}{6} \qquad [10]$$

donde:

a Valor mínimo de VAN

b Valor máximo de VAN

y donde, supuesta normalidad del VAN, y para t = 1,5 (valor que, tomado a la izquierda del promedio en la distribución normal tipificada, deja a su derecha una probabilidad aproximada del 93%), la fórmula del VAP queda de la siguiente manera:

$$VAP = \frac{(3a + b)}{4} \qquad [11]$$

Otras fórmulas simplificadas, basadas en la distribución beta incompleta, que pudieran resultar de interés en la práctica cuando sólo contamos con los valores mínimo y máximo de VAN son las siguientes (nuevamente, para un valor t = 1,5)[7]:

- Si es presumible asimetría con cola a la derecha:

$$VAP = 0{,}95\ a + 0{,}05\ b \qquad [12]$$

[6] El lector interesado puede encontrar una visión más desarrollada en Gómez-Bezares (1991, cap. X). Nos limitamos aquí a recoger las fórmulas.

[7] Puede nuevamente encontrarse un mayor desarrollo en Gómez-Bezares (1991, cap. X).

- Si es presumible asimetría con cola a la izquierda:

$$VAP = 0{,}55\ a + 0{,}45\ b \qquad [13]$$

- Si es presumible que la distribución de VAN es simétrica:

$$VAP = 0{,}75\ a + 0{,}25\ b \qquad [14]$$

3.4. La visión histogramática del VAP

Nos centraremos aquí en el tercero de los problemas planteados, y más concretamente, en una de las soluciones propuestas, la visión histogramática. La idea es sencilla: si la información de partida no nos permite asociar la distribución del VAN a ninguna distribución teórica conocida, podemos aplicar la idea subyacente al VAP sobre el histograma que representa las probabilidades asociadas a los distintos valores posibles de VAN.

De lo que se trataría aquí es de, una vez estimado el histograma del VAN, tomar la decisión de aceptación o rechazo del proyecto sobre la base del valor que deje a su izquierda una determinada probabilidad (el que está asegurado con un nivel de garantía adecuado).

El proceso descrito exige, en primer término, estimar la distribución de probabilidad del VAN. Normalmente, la información de partida se encuentra bastante discretizada, lo que no significa que la distribución de probabilidad del resultado sea efectivamente discreta. Es decir, debe realizarse, normalmente, un proceso de interpretación de la información de partida. Así, será frecuente que lleguemos a definir distintos escenarios posibles para las ventas asociadas al proyecto, así como a las demás variables implicadas. Supongamos que hemos definido tres ambientes posibles para el comportamiento del VAN: uno optimista, otro normal y otro pesimista. Ello no significa que valores intermedios (e incluso, inferiores al pesimista o superiores al optimista) no sean posibles. Simplemente, la información de partida se encuentra simplificada. Es por ello que el primer paso sería deshacer esa "discretización" artificial de la variable, para lo que construimos el histograma correspondiente. Veámoslo con un ejemplo. Supongamos que hemos estimado tres posibles valores de VAN: -100 (pesimista); 10 (normal) y 125 (optimista), con probabilidades del 30%, 40% y 30%, respectivamente.

Dado que los valores de VAN presentan una ligera asimetría, supongamos que no aceptamos la hipótesis de normalidad. Como decíamos, el hecho de que contemos sólo con tres valores de VAN no significa que sean los únicos posibles: son simplemente tres valores en los que se resume la información de partida con la que contamos, siendo también posibles, en la mayoría de los casos, valores intermedios, e incluso superiores e inferiores a los extremos propuestos. Podemos así construir el histograma de probabilidad correspondiente. Para ello, construimos tres intervalos, a los que asociamos su correspondiente probabilidad, tomando los valores propuestos como "marcas de clase" un tanto "sui géneris": calculamos los límites inferior y superior de cada intervalo intermedio de manera que cada posible valor quede dentro del intervalo definido por aquella marca de clase de la que se encuentra más cerca (lo que significa suponer intervalos no

centrados respecto de la marca de clase). En lo relativo a los intervalos extremos, los límites inferior y superior se calculan de manera simétrica respecto de la marca de clase.

El siguiente paso consiste en representar el histograma correspondiente. Parece lógico que, al tratarse en realidad de una variable continua, la representación de dicho histograma presente las probabilidades como áreas. Dado que los intervalos de los valores de VAN tienen amplitudes diferentes, debe reemplazarse en el eje de ordenadas del histograma la probabilidad por la densidad de probabilidad, que relativiza dicha probabilidad en función de la amplitud del intervalo. A partir de aquí, determinamos el nivel de garantía que queremos exigir al proyecto (que, en la versión "clásica" del VAP, estaría relacionada con la "t"), y buscamos el valor de VAN que deja a su derecha la probabilidad propuesta.

El resultado de aplicar la metodología propuesta a nuestro sencillo ejemplo, suponiendo un nivel de garantía exigido del 93% (asociado a una t = 1,5 en el supuesto de normalidad) puede verse en la figura 5.

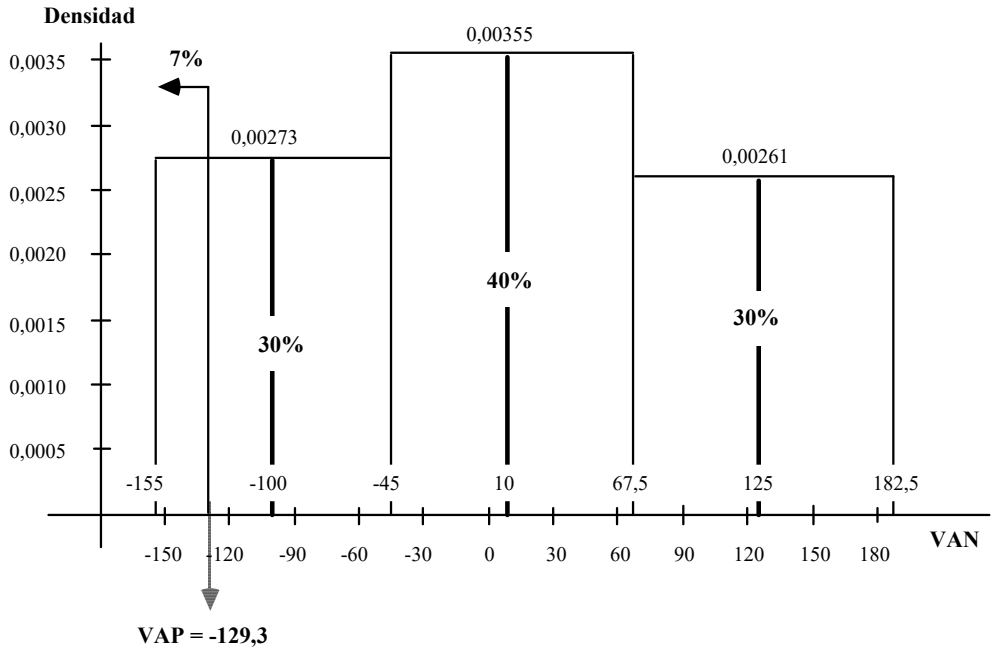


Figura 5

El proceso puede complicarse, en la medida en que seamos capaces de perfeccionar la información de partida. Así, puede entenderse que esta manera de trabajar está sobrevalorando las colas (la probabilidad a la izquierda del valor mínimo definido con respecto a la que queda a la derecha de la marca de clase en el intervalo inferior; y la que queda a la derecha de la marca de clase del intervalo superior). Esto simplemente manifiesta que la información de partida puede matizarse algo más, lo cual siempre es bienvenido. Se trataría en ese caso de incorporar esa información adicional al proceso[8].

[8] Puede encontrarse un mayor desarrollo de todo ello, así como un ejemplo completo, en Santibáñez (1995).

Por otro lado, cabe también aplicar procedimientos más sofisticados en la construcción del histograma del VAN: así, una posibilidad interesante podría ser la utilización de la técnica de Simulación (si bien requeriría definir el comportamiento de cada una de las variables de partida con una mayor precisión, lo que, en ocasiones, puede resultar complicado en la toma de decisiones empresariales reales).

4. Algunas conclusiones

A la vista de todo lo anterior, podemos decir que el VAP aparece como un criterio interesante, que permite analizar el interés de los proyectos desde un punto de vista ligeramente distinto de los métodos clásicos, si bien coherente con el espíritu que subyace a éstos, y con una mayor simplicidad en muchos casos. Hemos visto que, bajo las hipótesis de partida, la justificación teórica del criterio es clara, con evidentes puntos de contacto con las ideas que subyacen a los criterios clásicos de tratamiento del riesgo.

Hemos visto también que pueden relajarse sin demasiados problemas algunas de las hipótesis de partida. Naturalmente, el interés del criterio crece al utilizarlo de manera conjunta con los demás, y en la medida en que se complete con otras técnicas a nuestra disposición, como la Simulación, el Análisis de sensitividad de los resultados, etcétera. En cualquier caso, tal vez el interés fundamental del VAP radica en su intuitividad, en la sencillez de su aplicación e interpretación.

5. Bibliografía

GOMEZ-BEZARES, F. (1984): "Algunos modelos básicos para la selección de inversiones con flujos relacionados", *XIV Congreso de la SEIO*, Caja de Ahorros de Granada, Granada, vol. 1, págs. 40-51.

GOMEZ-BEZARES, F. (1991): *Dirección financiera (teoría y aplicaciones)*, 2ª ed., Desclée de Brouwer, Bilbao.

GOMEZ-BEZARES, F. (1993a): *Las decisiones financieras en la práctica*, 4ª ed., Desclée de Brouwer, Bilbao.

GOMEZ-BEZARES, F. (1993b): "Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions", en Aggarwal, ed., *Capital budgeting under uncertainty* (1993), Prentice - Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, págs. 91-102.

GOMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBAÑEZ (1994): Valoración de acciones en la bolsa española (un análisis de la relación entre la rentabilidad y el riesgo), Desclée de Brouwer, Bilbao.

SANTIBAÑEZ, J. (1995): “El tratamiento del riesgo en la decisión de inversión: VAP y distribuciones no conocidas”, *Boletín de Estudios Económicos*, 154, Abril, págs. 119-140.

LA DECISIÓN DE INVERSIÓN EN ENTORNOS DE RIESGO

por Fernando Gómez-Bezares, José A. Madariaga y Javier Santibáñez[1]
Publicado en *Estudios Empresariales*, nº 107, 2001 (Tercer Cuatrimestre), págs. 22-37

Introducción

El objetivo del presente artículo consiste en presentar, de la manera más sencilla que nos sea posible, cómo deben analizarse las decisiones de inversión en condiciones reales de riesgo, es decir, cuando los valores que van a tomar las variables que afectan a la decisión a analizar no son conocidos con seguridad. El lector en el que pensamos al escribir el artículo sería el gestor de una pequeña o mediana empresa, que en muchos casos no estará especializado en temas financieros, por lo que nuestra intención es la de simplificar al máximo los planteamientos teóricos, tratando de abandonar en lo posible aparatos matemáticos complicados, explicando los diferentes temas de manera intuitiva y sencilla, y tratando siempre de aportar herramientas aplicables a la realidad con la que se enfrenta[2].

El esquema que seguiremos es el siguiente: en un primer apartado intentaremos definir claramente el concepto financiero de riesgo, trataremos de justificar la actitud que cabe esperar normalmente de los individuos ante él y aportaremos un marco general de razonamiento; en el segundo apartado trataremos de explicar la diferencia existente entre los dos "tipos" de riesgo fundamentales, el riesgo sistemático y el riesgo diversificable, revisando las ideas más importantes que se derivan de la conocida Teoría de Cartera de Markowitz y del Modelo de Valoración de Activos de Capital (más conocido por sus siglas en inglés, CAPM -Capital Asset Pricing Model-); el tercer apartado se dedica al análisis de la decisión de inversión en

[1] Profesores del Departamento de Finanzas de la Universidad Comercial de Deusto.

[2] Dado que el artículo se dirige fundamentalmente a un público implicado con los problemas analizados desde un punto de vista práctico, evitaremos hacer continuas referencias bibliográficas, intentando también utilizar un lenguaje asequible para aquellos menos familiarizados con los aspectos financieros de la empresa. Con todo, puede ser conveniente consultar en algunos extremos cualquiera de los manuales clásicos de finanzas, como el de Fernando Gómez-Bezares, "Las decisiones financieras en la práctica", editado por Desclée de Brouwer, Bilbao, 1999, 7ª edición; el de Andrés Santiago Suárez Suárez, "Decisiones óptimas de inversión y financiación en la empresa", Pirámide, Madrid, 1996, 18ª ed.; o el de J.C. Van Horne, "Financial management and policy", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1998, 11ª ed.

condiciones de certeza, definiendo la metodología general aplicable en la construcción del perfil de fondos de un proyecto de inversión y revisando los criterios fundamentales que suelen utilizarse en su valoración (el Valor Actualizado Neto -VAN- y la Tasa de Rentabilidad Interna -TRI-); finalmente, en el cuarto apartado analizaremos la decisión de inversión en condiciones de riesgo, revisando las implicaciones que dicho riesgo tiene en la construcción del perfil de fondos y los principales criterios clásicos que la Teoría Financiera propone para su valoración (el Ajuste del tipo de descuento y el Equivalente de certeza), y presentaremos también un criterio desarrollado en el departamento de Finanzas de la Universidad Comercial de Deusto, el Valor Actualizado Penalizado (VAP).

1. Concepto de riesgo

En la Teoría de la decisión (y las Finanzas pueden considerarse de alguna manera como parte de aquella) suelen distinguirse tres ambientes o entornos en los que puede analizarse una decisión: certeza, riesgo e incertidumbre.

El ambiente de certeza es una situación teórica en la que se suponen conocidos los valores que van a tomar en el futuro todas y cada una de las variables que afectan a la decisión que se analiza. Así, y en lo que se refiere a un proyecto de inversión, se conocerían la cantidad y precio al que pueden venderse los productos, los precios de las materias primas, la evolución futura de los costes salariales, así como el comportamiento de los tipos de interés en el futuro o la inflación que afectará a cada una de las partidas implicadas. En definitiva, no se tiene ninguna duda respecto del valor que tomará cualquier variable que influya en el comportamiento del proyecto.

En el extremo contrario nos encontraríamos con el ambiente de incertidumbre, que se caracterizaría por no tener información respecto a qué valores concretos van a tomar las variables que afectan a la decisión analizada. Es importante subrayar que este ambiente presupone un desconocimiento de lo que ocurrirá en el futuro, es decir, aunque conozcamos los posibles valores que pueden tomar las variables, éstos nos parecen igualmente razonables.

La situación intermedia, y normalmente la más cercana a la realidad, es el ambiente de riesgo. En entornos de riesgo no sabemos exactamente lo que ocurrirá, pero conocemos los posibles valores de las variables implicadas y las probabilidades asociadas a los mismos. Dicho de un modo algo más técnico, conocemos las distribuciones de probabilidad de las variables que afectan al problema que se pretende analizar.

Como decíamos anteriormente, la situación más habitual es la de riesgo, es decir, aquella en la que pueden producirse distintos resultados de la decisión con diferentes probabilidades. Pongamos algunos ejemplos sencillos. Supongamos que podemos participar, sin pagar nada por ello, en un juego de azar consistente en lanzar una moneda al aire: si sale cara, cobraremos 1.000 euros, y si sale cruz cobraremos 2.000 euros. Si la moneda no está trucada, sabemos que el resultado del juego será un beneficio de 1.000 ó 2.000 euros con un 50% de probabilidad para cada uno de los dos posibles valores.

Intuitivamente, el primer criterio que surge a la hora de valorar una decisión en ambiente de riesgo como la propuesta es el que se conoce con el nombre de la Esperanza Matemática (EM). La EM no es otra cosa que lo que, si repetimos indefinidamente el experimento, obtendremos como promedio de la decisión, y se obtiene ponderando los resultados posibles por sus probabilidades correspondientes. En nuestro sencillo ejemplo, la esperanza matemática sería:

$$EM = 0{,}5 \cdot 1.000 + 0{,}5 \cdot 2.000 = 1.500$$

La esperanza matemática nos indica lo que recibiríamos "por término medio" si repitiéramos muchas veces la misma decisión. Así, y siguiendo con nuestro ejemplo, si se nos permitiera jugar muchas veces al juego, aproximadamente la mitad de las veces saldría cara (con lo que ganaríamos 1.000 euros) y la otra mitad saldría cruz (cobrando 2.000), lo que "se parece" mucho (si el juego se repite un número suficiente de veces) a ganar 1.500 en cada jugada.

Sin embargo, la esperanza matemática no tiene en cuenta otro elemento importante del ejemplo anterior: nos referimos al riesgo asociado a la decisión. Para comprender mejor esta idea, supongamos que únicamente se nos permite participar una vez en el juego propuesto (que llamaremos juego A), y supongamos también que se nos ofrece la posibilidad de elegir entre dicho juego y otro (al que llamaremos juego B) en el que pueden ganarse 0 ó 3.000 euros con el mismo sistema, es decir, el que cobremos una u otra cantidad dependerá del resultado de lanzar al aire una moneda (si sale cara, no cobramos, y si sale cruz cobramos 3.000 euros). En la figura 1 se ofrece la representación gráfica de ambos juegos.

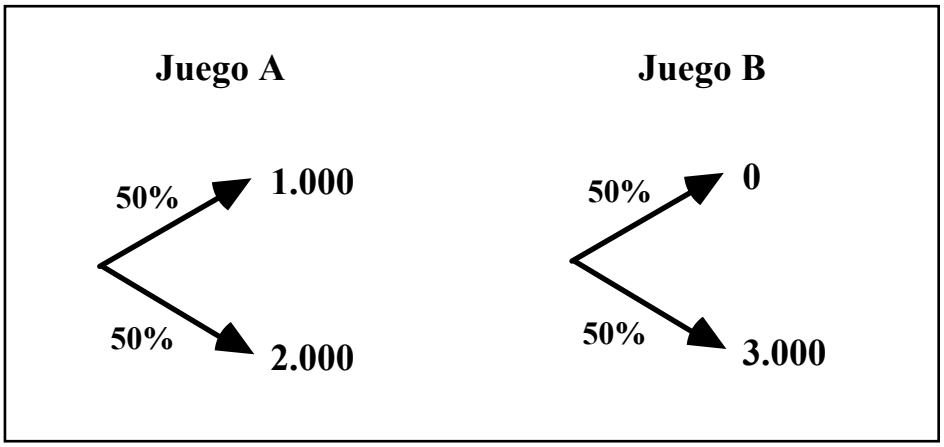


Figura 1

Puede comprobarse que los dos juegos tienen la misma esperanza matemática de resultado:

Juego A: $EM = 0{,}5 \cdot 1.000 + 0{,}5 \cdot 2.000 = 1.500$

Juego B: $EM = 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 3.000 = 1.500$

Y sin embargo, la variabilidad de ambos (su riesgo) es distinta. En casos tan sencillos como éste, podemos valorar intuitivamente dicha variabilidad con una medida sencilla como el recorrido, es decir, calculando para cada juego la diferencia de resultado que obtendremos entre cada una de las dos situaciones posibles:

Juego A: Recorrido = Valor máximo - Valor mínimo = 2.000 - 1.000 = 1.000

Juego B: Recorrido = Valor máximo - Valor mínimo = 3.000 - 0 = 3.000

Es decir, que aunque ambos tienen la misma esperanza matemática (el mismo promedio de resultado), la diferencia radica en el distinto riesgo asumido: así, decimos que el juego B tiene más riesgo que el juego A, ya que los resultados posibles de B se alejan más del valor promedio; dicho de otra forma, el juego B tiene más variabilidad o dispersión en su resultado.

El lector puede ahora preguntarse cómo podemos hablar de "riesgo" cuando nos referimos a juegos en los que "sólo pueden pasar cosas buenas" (o salir indiferentes, en el peor de los casos, en el juego B). La respuesta es sencilla: en Finanzas, el concepto de riesgo no es el mismo que el propuesto por la Real Academia de la lengua Española, según la cual, riesgo es la "contingencia o proximidad de un daño" (Diccionario de la R.A.E., 1992). Frente a esta concepción, y por la propia definición dada para el ambiente de riesgo, en Finanzas riesgo es sinónimo de variabilidad, es decir, posibilidad de que ocurran cosas diferentes (no necesariamente malas). A nosotros nos gusta poner el siguiente ejemplo: si me tiro de un 100º piso no corro ningún riesgo, ya que tengo la certeza de que acabaré convertido en puré. Es decir, no hay variabilidad posible en el resultado, éste es conocido a priori, por lo que en el lenguaje financiero diríamos que se trata de una decisión segura (sin riesgo).

Una vez definido el concepto financiero de riesgo, la siguiente pregunta a la que habría que intentar responder es la siguiente: ¿cómo nos comportamos los individuos ante el riesgo? O dicho de otra forma, ¿cuál es nuestra actitud frente al riesgo?

Intentaremos nuevamente responder a la pregunta de una manera intuitiva, apoyándonos en el ejemplo propuesto anteriormente. Si nos comportáramos como indiferentes ante el riesgo, el criterio de la Esperanza Matemática propuesto sería válido, y los juegos A y B aparecerían como indiferentes (ya que tienen idéntica EM, aunque recordemos que diferente riesgo). Sin embargo, el comportamiento habitual sería elegir el juego A, que tiene idéntica EM pero menor riesgo. Ello supondría renunciar a la posibilidad que ofrece B de alcanzar un beneficio de 3.000 (frente a los 2.000 que ofrece A en el mejor de los casos), pero también permite eliminar la posibilidad de ganar 0 (obteniendo un mínimo de 1.000 en el juego A y en el peor de los casos).

Tratemos de ver más claramente la idea anterior. Supongamos que hemos ganado un premio de 10 millones de euros en la Lotería. Cuando vamos a cobrar el premio, se nos ofrece la posibilidad de jugarlos a doble o nada al 50% de probabilidad, es decir, si ganamos cobraremos 20 millones y si perdemos nos vamos sin nada. Parece obvio que nadie en su sano juicio aceptaría este juego, y sin embargo, es un juego "limpio", en el sentido de que su esperanza matemática es idéntica a la cantidad segura que apostamos. Y ello se debe a que la posibilidad de

perder 10 millones es valorada más (negativamente) que la posibilidad de añadir 10 millones adicionales a nuestra riqueza[3].

Si actuamos conforme a lo expuesto, nos comportamos como enemigos del riesgo. Esto no significa que nunca estemos dispuestos a asumir riesgos, lo que quiere decir es que para hacerlo se nos debe premiar por ello. Es decir, la aversión al riesgo significa que ante igualdad de promedio, los individuos elegiremos normalmente aquella decisión que minimice el riesgo.

Para ver más claramente el concepto, volvamos a nuestro sencillo ejemplo. Recordemos que ante los juegos A y B, con idéntica esperanza matemática, pero distinto riesgo, parecía lógico elegir el A (el de menor riesgo). Pero supongamos que podemos ahora elegir entre los juegos A y C (ambos sin coste), que aparecen representados en la figura 2.

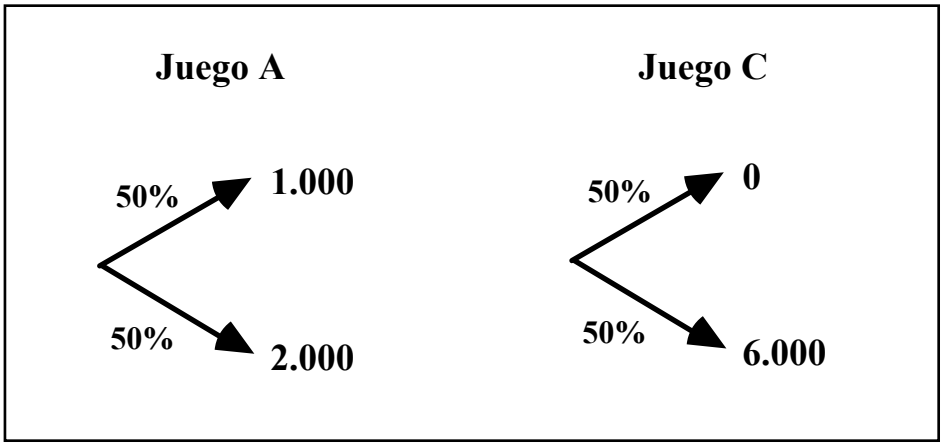


Figura 2

Y calculemos ahora la esperanza matemática y el riesgo de sus resultados:

Juego A: $EM = 0{,}5 \cdot 1.000 + 0{,}5 \cdot 2.000 = 1.500$

Riesgo (recorrido) = 2.000 - 1.000 = 1.000

Juego C: $EM = 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 6.000 = 3.000$

Riesgo (recorrido) = 6.000 - 0 = 6.000

[3] Esta idea no es otra cosa que el concepto de la utilidad marginal decreciente propuesto por la Teoría del Consumidor. Efectivamente, el punto de partida de dicha teoría es que, para bienes normales, la utilidad (medida de la satisfacción) asociada a unidades adicionales de dicho bien (es lo que se llama utilidad marginal, es decir, el aumento de utilidad) es siempre positiva pero decreciente. Dicho de otra forma, unidades adicionales de riqueza suponen aumentos siempre positivos de satisfacción, pero cada unidad añade una satisfacción inferior a la reportada por la unidad anterior. Es decir, que los sucesivos incrementos que añadimos a nuestra riqueza "cada vez nos hacen menos ilusión" (aunque siempre nos dan algo de alegría).

En esta nueva situación, el juego C tiene más riesgo que el A, pero también más esperanza matemática, por lo que es posible que algunos individuos prefieran el C (aunque otros seguirán prefiriendo el A). La razón es que ahora existe lo que en finanzas llamamos "premio por riesgo": efectivamente, el paso de A a C supone un aumento de riesgo, pero también un incremento en el resultado "esperado", el cual puede compensar a algunos individuos. Nótese que en el juego A tenemos "garantizada" en el peor de los casos una riqueza mínima de 1.000 euros (que no tenemos en C), pero renunciamos a la posibilidad de obtener, en el mejor de los casos, un diferencial de 4.000 euros (6.000 asociados a C en el caso de que ganemos, frente a sólo 2.000 en A). Lo anterior nos lleva a la idea de que el concepto de aversión al riesgo es relativo: el premio que ofrece C frente a A (1.500 euros en términos de esperanza matemática) puede ser suficiente para algunos individuos, mientras que para otros puede no serlo.

Lo importante de lo anterior es la idea de que si los individuos nos comportamos como enemigos del riesgo, sólo estaremos dispuestos a asumir riesgos si "esperamos" un premio por hacerlo.

Una vez presentados de manera intuitiva los conceptos de riesgo y de aversión al riesgo, cruciales en Finanzas, daremos un paso más. Lo que propondremos ahora es un esquema sencillo que nos permita razonar en entornos de riesgo. Así, en Finanzas es habitual razonar en términos de lo que se conoce como "mapa $\mu-\sigma$". Un mapa $\mu-\sigma$ es un gráfico en el que representamos las diferentes decisiones a nuestro alcance en términos de los dos parámetros fundamentales que definen su comportamiento: la esperanza matemática (μ) y el riesgo (σ) de su resultado. La σ no es otra cosa que una medida de la variabilidad del resultado, la llamada desviación típica, la mejor medida desde el punto de vista estadístico, y que presenta una serie de ventajas frente al recorrido que no constituyen el objeto de este artículo. Recordemos la fórmula matemática de la desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=n} \left[X_i - E(X)\right]^2 \cdot f_i} \qquad (1)$$

donde X_i representa los diferentes valores posibles de la variable X (n posibles valores), E(X) es la esperanza matemática de X y f_i es la probabilidad asociada al valor X_i. Lo importante no es tanto la fórmula concreta, sino la idea de que lo que trata de medir la desviación típica es conceptualmente lo mismo que antes hacíamos con el recorrido (la variabilidad, el riesgo), siendo ésta una medida más adecuada que la anterior en la mayoría de los casos. Dicho de otra forma, a más variabilidad, la desviación típica de la decisión será mayor. Veámoslo en nuestro ejemplo:

Juego A: $\sigma = \sqrt{(1.000 - 1.500)^2 \cdot 0{,}5 + (2.000 - 1.500)^2 \cdot 0{,}5} = 500$

Juego B: $\sigma = \sqrt{(0 - 1.500)^2 \cdot 0{,}5 + (3.000 - 1.500)^2 \cdot 0{,}5} = 1.500$

Juego C: $\sigma = \sqrt{(0 - 3.000)^2 \cdot 0{,}5 + (6.000 - 3.000)^2 \cdot 0{,}5} = 3.000$

Volviendo así al mapa μ–σ, y tal como indicábamos anteriormente, representaremos en dicho mapa las decisiones a nuestro alcance, caracterizadas por los dos elementos fundamentales que definen su comportamiento: la esperanza matemática y el riesgo asociados a su resultado (riqueza final, en nuestro caso). Llegaríamos así al mapa de la figura 3.

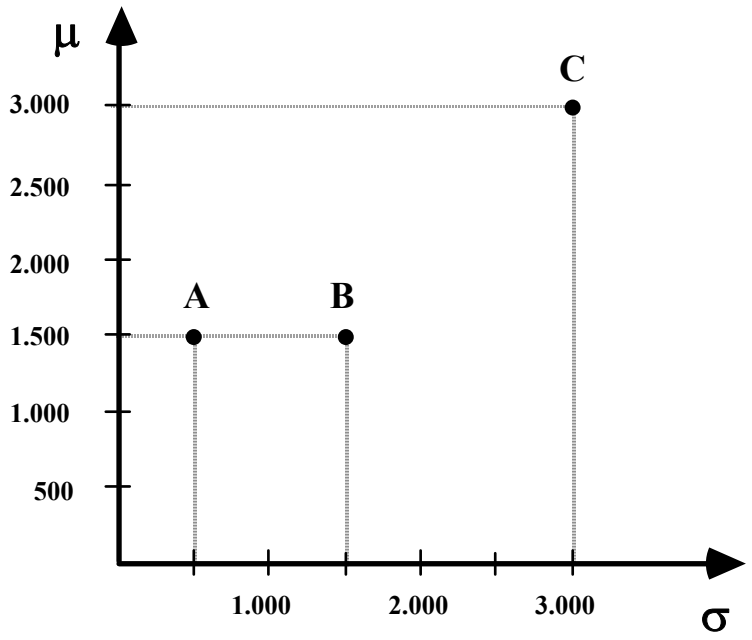


Figura 3

Definamos ahora el concepto de curva de indiferencia. Una curva de indiferencia representa las combinaciones de valores promedio-riesgo (μ–σ) que son indiferentes para el individuo, es decir, que le reportan la misma satisfacción (utilidad, en lenguaje microeconómico). Cada individuo tendrá infinitas curvas de indiferencia, representando las curvas más alejadas del origen de coordenadas niveles de utilidad superiores (al estar asociadas a promedios de riqueza más elevados).

La forma de las curvas de indiferencia es sencilla: si el individuo se comporta como enemigo del riesgo, dichas curvas serán crecientes, ya que ante aumentos de riesgo, el individuo exigirá incrementos de promedio (el premio por riesgo al que nos referíamos antes) para mantener el nivel de satisfacción; mientras que si el individuo fuera amigo del riesgo, las curvas decrecerían, es decir, el individuo estaría dispuesto incluso a renunciar a promedio con tal de asumir riesgos; y finalmente, si el individuo fuera indiferente ante el riesgo, las curvas serían paralelas al eje horizontal, el individuo sólo se fijaría en el promedio de riqueza para tomar sus decisiones. Y para todos ellos, parece lógico suponer que las curvas de indiferencia más alejadas del origen de coordenadas representan niveles superiores de utilidad, al estar asociadas a promedios de riqueza más altos. Veamos todo ello representado en unos sencillos gráficos (figura 4).

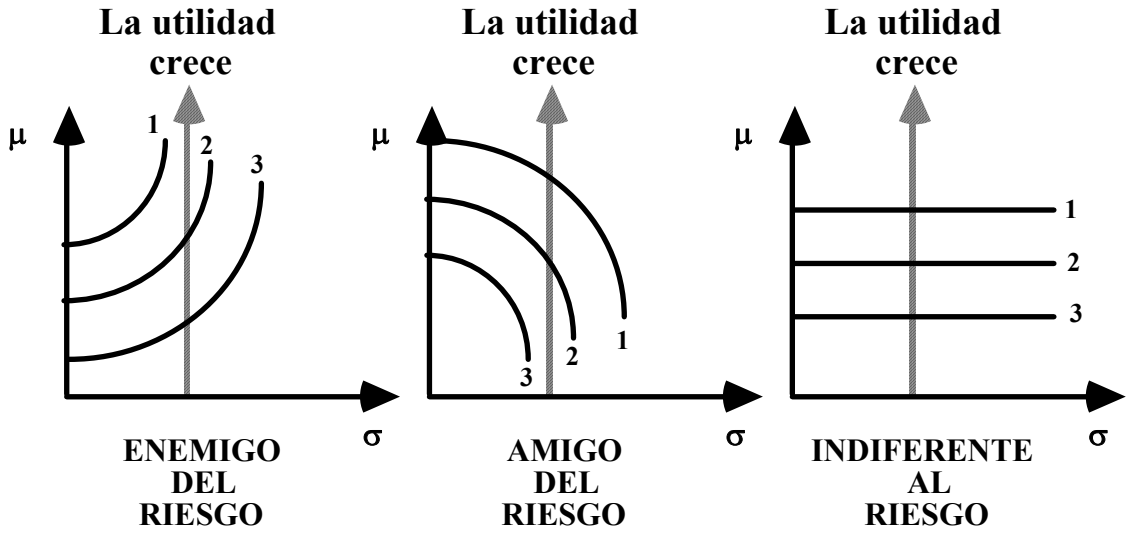


Figura 4

En dicha figura 4 se han representado en el mapa μ–σ tres de las infinitas curvas de indiferencia asociadas a un enemigo, un amigo y un indiferente ante el riesgo. En los tres casos, la curva 1 se corresponde con un nivel de utilidad superior a la curva 2, y ésta superior a la de la curva 3. Y recuérdese que cada una de las curvas representa combinaciones de promedio y riesgo que al individuo le reportan la misma satisfacción.

Centrándonos en el enemigo del riesgo (que refleja el comportamiento racional de la mayoría de los individuos, tal como hemos justificado anteriormente, sobre todo para decisiones importantes), ¿cómo tomaría sus decisiones? En nuestro ejemplo, ¿cuál de los tres proyectos planteados -A, B ó C- sería elegido? La respuesta es nuevamente sencilla: el individuo razonaría tratando de maximizar su satisfacción, es decir, eligiendo aquella decisión que le permita situarse en la curva de indiferencia más alejada posible del origen de coordenadas, tal como puede verse en la figura 5.

El individuo representado, enemigo del riesgo (por eso sus curvas de indiferencia son crecientes), elegiría el juego A, ya que es el que le permite obtener un nivel superior de utilidad. Esto no impide que pueda haber otro individuo, también enemigo del riesgo, que, con otro sistema de curvas de indiferencia, prefiera C. El razonamiento anterior puede parecer algo teórico (y todavía lo es), pero lo único que pretende es determinar un marco de razonamiento para la toma de decisiones en ambiente de riesgo (que por otro lado está en la base de toda la teoría de cartera de Markowitz y de los modernos modelos de valoración que se han desarrollado sobre la anterior).

2. Riesgo sistemático y diversificable

En el apartado anterior veíamos que en Finanzas riesgo es variabilidad, y que la actitud lógica de los individuos sería la de aversión al riesgo. Sin embargo, no todos los riesgos son iguales. Así, en Finanzas distinguimos entre dos tipos fundamentales de riesgo: el riesgo sistemático y el riesgo diversificable.

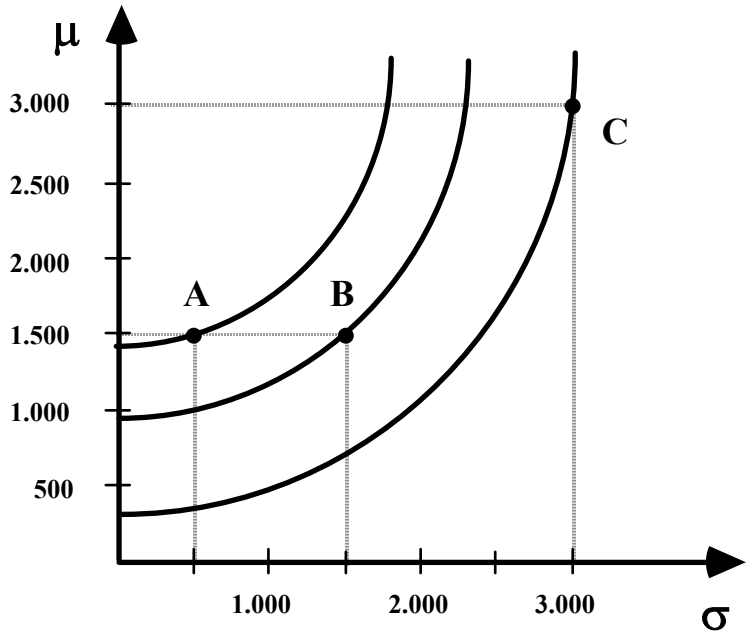


Figura 5

Tratemos nuevamente de ver el concepto desde un punto de vista intuitivo. Pensemos en un individuo que tiene una cartera de acciones compuesta por un único título, supongamos muy arriesgado (con mucha variabilidad en su rentabilidad), pero también con un alto valor esperado. Si decide añadir un título más a su cartera, es evidente que su rentabilidad esperada se verá afectada (al alza o a la baja, dependiendo de la rentabilidad esperada asociada al nuevo título, así como de los pesos que ambos tengan en la cartera), pero su riesgo no sólo no tiene por qué aumentar, sino que puede incluso disminuir. Efectivamente, si los dos títulos no tienen ninguna relación, lo normal es que se produzca un cierto efecto de compensación, de manera que será difícil que siempre que uno presente altas rentabilidades el otro lo haga también; y viceversa. Y este efecto de disminución del riesgo (de la variabilidad en su rentabilidad) se vería reforzado si el individuo sigue añadiendo a su cartera títulos cuyo comportamiento no está relacionado. A este efecto le llamamos diversificación del riesgo, y significa que el riesgo de una cartera disminuye al añadir títulos no relacionados entre sí.

Sin embargo, hay una parte de la variabilidad de la rentabilidad que no puede eliminarse por muchos títulos que incluyamos en la cartera. Y es que todos los títulos tendrán alguna relación (unos mucha y otros poca) con la marcha general del mercado. A esta parte del riesgo no eliminable por diversificación se le llama riesgo sistemático, y es la parte de la variabilidad asociada a la rentabilidad de la cartera que no hay más remedio que asumir por el hecho de que los títulos se relacionan en cierta medida con la marcha general del mercado.

Hemos visto intuitivamente que el riesgo total de una cartera se compone de dos tipos de riesgo diferentes: el riesgo diversificable (el que puede eliminarse añadiendo títulos a la cartera) y el riesgo sistemático (el que está relacionado con la marcha general del mercado, y que no puede eliminarse por diversificación):

$$\text{Riesgo total} = \text{Riesgo sistemático} + \text{Riesgo diversificable} \qquad (2)$$

De esta manera, cada título incorporará cantidades diferentes de los dos tipos de riesgo. Habrá títulos que tengan poca relación con el mercado (tendrán poco riesgo sistemático), mientras que otros tendrán alta relación con él (tendrán mucho riesgo sistemático).

Una forma de medir la cantidad de riesgo sistemático y diversificable de un título consiste en calcular lo que llamamos la Línea Característica del Título (LCT). Esta recta se obtiene mediante un ajuste de regresión entre las rentabilidades del título y las del mercado, tal como puede verse en la figura 6.

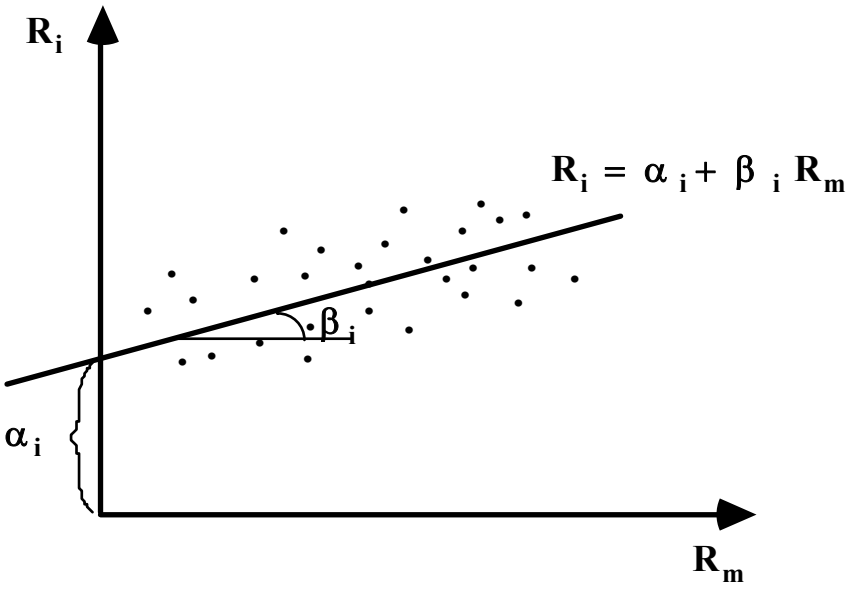


Figura 6

Explicaremos brevemente el significado de la figura 6. En el eje vertical (ordenadas) se representan las rentabilidades del título "i", mientras que en el eje horizontal (abscisas) aparecen las rentabilidades del mercado (normalmente se utiliza un índice suficientemente representativo del mismo, como por ejemplo el IBEX-35 o cualquier otro índice representativo de la Bolsa). Así, cada punto representa la rentabilidad que el título "i" y el mercado en su conjunto ofrecieron a sus propietarios en un determinado periodo de tiempo (evidentemente, un paso previo para construir el gráfico consiste en determinar el periodo básico para el que se calculan las rentabilidades, supongamos el mes).

La recta de ajuste o de regresión es aquella que mejor se ajusta a la nube de puntos formada por las rentabilidades del título "i" y el mercado[4], y se obtiene tratando de minimizar las distancias[5] de los puntos a la recta medidas en vertical. De esta manera, la recta obtenida "trataría de explicar de la mejor forma posible" el comportamiento del título "i" en relación con el del mercado. La ecuación de la recta es la siguiente:

[4] Se supone relación lineal entre las rentabilidades del título y el mercado.

[5] En realidad se minimiza la suma de cuadrados de dichas distancias.

$$R_i = \alpha_i + \beta_i \cdot R_m \quad (3)$$

donde α_i es la ordenada en el origen de la recta de regresión (el punto de corte con el eje de ordenadas) y β_i es la pendiente.

La recta obtenida nos serviría para hacer predicción: así, supuesta una rentabilidad para el mercado, la sustitución de dicho valor en la ecuación propuesta nos permitiría obtener la rentabilidad "que cabría esperarse" para el título "i". Esta estimación será tanto más afinada cuando más "aplastada" sea la nube de puntos, o dicho de otra forma, cuanto menores sean las distancias de los puntos a la recta. A la distancia entre un punto cualquiera y la recta (siempre en vertical) se le llama perturbación aleatoria, y es el "error" de estimación que cometemos con la recta. Dicho de otra forma, es la parte del comportamiento del título "i" que el mercado no es capaz de predecir correctamente. Así, de la variabilidad (riesgo) asociada a la rentabilidad del título "i" hay una parte que puede explicarse por el ajuste (por la recta), y por lo tanto, por el mercado, mientras que hay otra parte de la variabilidad que no se explica por la recta: es el riesgo específico del título, y que al no tener que ver con el de otros títulos, puede eliminarse mediante una adecuada diversificación.

Como hemos dicho, el riesgo sistemático es aquél que se debe a la relación del título con el mercado. Y la medida de dicho riesgo sistemático que podemos obtener del modelo es la beta, la pendiente de la recta de ajuste[6]. Así, títulos que presenten betas altas serán títulos que "apalancan" las variaciones del mercado, son los llamados "títulos agresivos", mientras que títulos con valores bajos de beta "suavizan" las variaciones del mercado, son los títulos "defensivos"; y, evidentemente, el mercado tendría una beta igual a la unidad, mientras que la renta fija (inversión segura) tendría una beta nula. Por otro lado, podría incluso haber títulos que fueran "contra el mercado", es decir, que ofrecieran rentabilidades altas cuando el mercado va mal y viceversa (piénsese, por ejemplo, en un bufete de abogados especializado en suspensiones de pagos y quiebras que cotizara en bolsa): serían títulos "superdefensivos". Puede verse lo anterior de una manera gráfica en la figura 7.

---

[6] Puede justificarse todo lo expuesto desde un punto de vista matemático, pero no entraremos en demasiados detalles. Indicaremos simplemente algunas fórmulas que pueden resultar de utilidad. Así, la beta de un título "i" se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}$$

donde σ_{im} es la covarianza entre las rentabilidades del título "i" y el mercado, mientras que σ^2_m es la varianza (cuadrado de la desviación típica) de la rentabilidad del mercado. Y puede también verse matemáticamente la distinción entre riesgo sistemático y diversificable:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \cdot \sigma_m^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

Riesgo total = Riesgo sistemático + Riesgo diversificable

donde el riesgo total lo medimos ahora, por conveniencia, con la varianza de la rentabilidad del título "i", σ^2_i, y a la nomenclatura anterior se añade la σ^2_ε, que es la varianza de las perturbaciones aleatorias. Tenemos así que el primer sumando de la parte derecha de la igualdad sería el que tiene que ver con el mercado, mientras que el segundo es el específico del título, y que por tanto, podría eliminarse por diversificación. Para comparar el riesgo sistemático entre diferentes títulos, dado que la σ^2_m afecta a todos, se utiliza la β como medida de dicho riesgo sistemático.

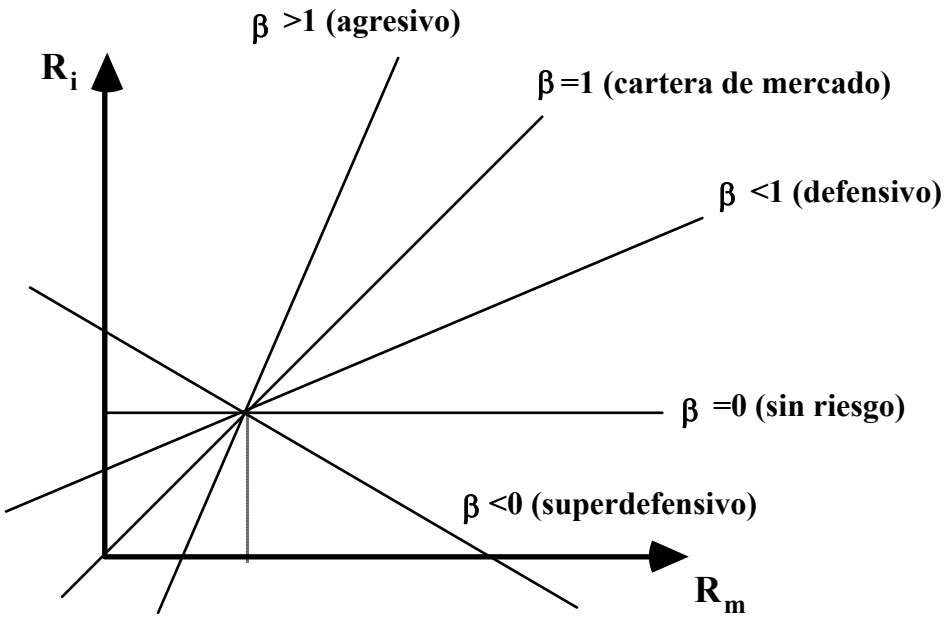


Figura 7

Veamos ahora todo lo anterior con algunos ejemplos sencillos. Supongamos una empresa dedicada a la investigación farmacéutica. Su rentabilidad será alta los años que consiga buenos resultados de su investigación, influyendo en menor medida el estado general de la economía. Se trataría de un título con mucho riesgo, ya que la diferencia en términos de rentabilidad será grande entre los años buenos y malos, pero la incidencia del mercado en la evolución de la rentabilidad del título será baja. Por otro lado, gran parte de este riesgo sería fácil de eliminar (diversificar): bastaría con comprar acciones de muchas empresas farmacéuticas dedicadas a la investigación, ya que es razonable pensar que sus resultados tenderán a compensarse (es difícil que en el mismo año todas acierten en sus investigaciones; e igualmente difícil será que no lo haga ninguna). Vemos que en este ejemplo el título tendría mucho riesgo, pero casi todo diversificable.

Pensemos ahora en una empresa dedicada a la construcción. Es ésta una actividad muy relacionada con la marcha general de la economía, por lo que gran parte de su riesgo no se podrá eliminar por diversificación. Así, lo normal es que a la empresa le vaya bien los años en que la economía se encuentre boyante, y viceversa (influyendo también, aunque en menor medida que en el caso de la compañía farmacéutica, el mayor o menor acierto de la empresa). En este ejemplo el riesgo sería casi todo sistemático.

Y un último ejemplo: supongamos una cartera compuesta por infinidad de títulos, todos con beta = 1, pero con diferentes riesgos diversificables. Estos últimos se irán compensando unos con otros, con lo que en la cartera desaparecerá el riesgo diversificable; sólo quedará el sistemático. Si medimos el riesgo sistemático con la beta de la cartera, que se calculará con la media ponderada de las betas de los títulos que la componen, ésta será la unidad. Vemos que el riesgo sistemático es el que se mantiene.

Una vez aceptada la distinción planteada entre el riesgo sistemático y el diversificable, el Modelo de Valoración de Activos de Capital de Sharpe (más conocido por sus siglas en inglés,

CAPM) deduce dos consecuencias fundamentales fácilmente intuibles: en primer lugar, que el riesgo diversificable no es relevante, ya que el individuo puede eliminarlo de su cartera simplemente añadiendo un número suficiente de títulos a la misma; y en segundo lugar, y dado que como indicábamos en el apartado anterior, lo lógico es que los individuos se comporten como enemigos del riesgo, que a mayor riesgo sistemático (mayor beta) debería corresponder una rentabilidad esperada mayor. En las condiciones del modelo, la relación entre la rentabilidad esperada de un título y su beta (medida del riesgo sistemático) es lineal. Aceptada esta relación lineal, la deducción de la formulación matemática del modelo es inmediata. En efecto:

$$\text{sea:} \qquad E(R_i) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot \beta_i \tag{4}$$

donde λ_0 y λ_1 son, respectivamente, la ordenada en el origen y la pendiente de la recta que buscamos, y $E(R_i)$ la rentabilidad esperada del título "i". Pero β_m (la beta del mercado) = 1 y β_0 (la beta del título sin riesgo) = 0 (tal como puede comprobarse en el ajuste de regresión), luego:

$$E(r_0) = r_0 = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot 0 \quad \text{->} \quad \lambda_0 = r_0$$

$$E(R_m) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot 1 = r_0 + \lambda_1 \quad \text{->} \quad \lambda_1 = E(R_m) - r_0$$

donde $E(R_m)$ es la rentabilidad esperada del mercado y r_0 es el rendimiento del título sin riesgo (al no tener riesgo, su esperanza coincide con su valor). Y por tanto:

$$E(R_i) = r_0 + [E(R_m) - r_0] \cdot \beta_i \tag{5}$$

Esta es la formulación del CAPM[7], que nos dice cómo la rentabilidad esperada de un título (o de cualquier cartera, como es el caso del mercado, formada por títulos) es función de su riesgo sistemático, de su beta.

A la formulación del CAPM (5) también puede llegarse gráficamente (figura 8): si buscamos una recta que relacione la rentabilidad esperada de un título $E(R_i)$ con su riesgo sistemático β_i, tal recta debe pasar por r_0 (el título sin riesgo tiene rentabilidad r_0 y beta igual a cero) y por el punto M (el mercado tiene beta igual a 1 y $E(R_m)$ como rentabilidad esperada). Esta recta, denominada Línea del Mercado de Títulos, LMT, es, como puede comprobar el lector, la representación gráfica del CAPM definido en (5).

3. La inversión en condiciones de certeza

Una vez definido el marco conceptual general de razonamiento para la decisión de inversión en ambiente de riesgo, descenderemos ahora a un nivel mayor de detalle, comenzando por la

[7] Para una demostración más rigurosa del CAPM véase, por ejemplo, "Dirección financiera", de Fernando Gómez-Bezares, Desclée de Brouwer, 1991, 2ª edición, capítulo 5.

descripción de la metodología a utilizar en el análisis de un proyecto de inversión en ambiente de certeza, y que matizaremos después (en el siguiente apartado) al introducir la hipótesis de riesgo.

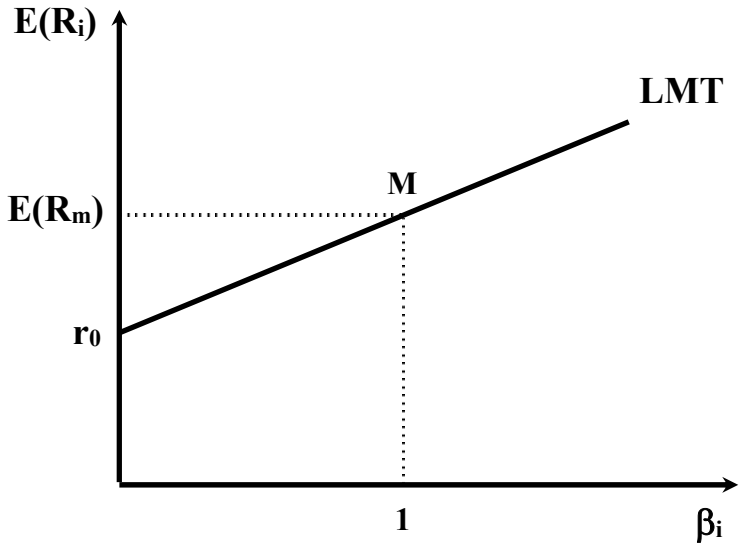


Figura 8

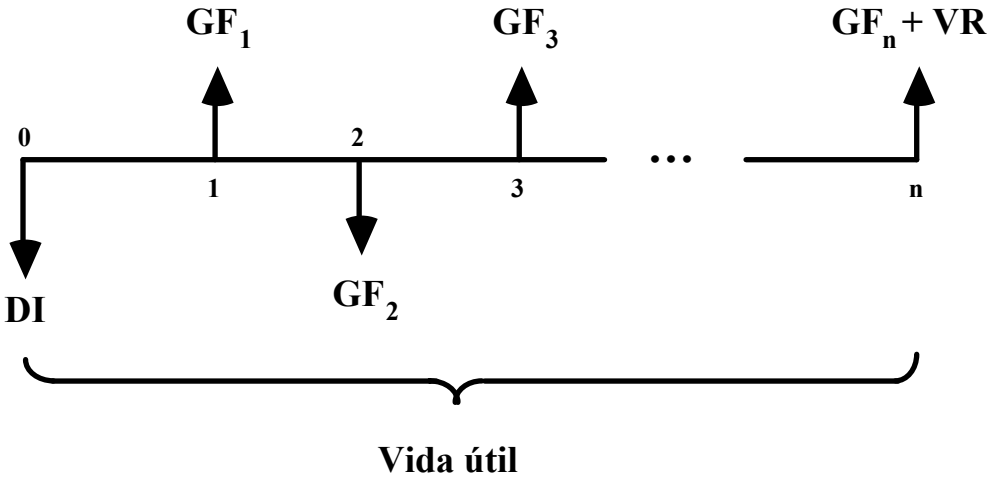


Figura 9

Así, el primer paso que debe realizarse para analizar el interés de un proyecto de inversión es la construcción de su perfil de fondos. Este perfil recoge los impactos que el proyecto tiene en la tesorería de la empresa. Así, deberá calcularse lo que llamamos Desembolso inicial (DI), que es la inversión inicial que normalmente requerirá el proyecto al comienzo de su vida; las Generaciones de Fondos (GF_i), que son los incrementos (positivos o negativos) que el proyecto provoca en la tesorería de la empresa en los distintos años (lo habitual, si nos referimos a proyectos de inversión de largo plazo, es calcular los impactos en caja con carácter anual); y el

Valor Residual (VR), que sería el impacto provocado en la tesorería de la empresa por la liquidación de los activos que quedaran asociados al mismo al término de su vida útil (que es el número de años en los que el proyecto provoca efectos en la tesorería de la empresa). Puede verse todo ello en la figura 9, en la que se representan con flechas hacia arriba las entradas provocadas por el proyecto en la tesorería de la empresa, y con flechas hacia abajo las salidas.

Tres características deben resaltarse en lo que se refiere al perfil de fondos asociado a un proyecto de inversión: en primer lugar, se trata de impactos en caja (no de beneficios); en segundo lugar, se trata de flujos de fondos incrementales (es decir, los que se derivan de comparar la tesorería de la empresa "con" el proyecto respecto de la que tendría "sin" él); y en tercer y último lugar, el perfil se construye con total independencia de cómo se financie el proyecto (es decir, se trata de calcular "lo que el proyecto pide y da en cada momento, con independencia de quién ponga o se lleve el dinero correspondiente").

Veamos lo anterior con un sencillo ejemplo. Supongamos que podemos afrontar un proyecto de inversión, que consiste en comprar una instalación para producir un determinado producto. La instalación tiene un precio de compra (DI) de 40.000 euros, y con ella podrían obtenerse unas ventas anuales de 30.000 euros con unos costes operativos (excluidos los intereses) con desembolso (excluida la amortización) de 15.000. También habría que pagar impuestos por 5.000 euros anuales. Finalmente, el proyecto tendría una duración de cinco años (vida útil), al término de los cuales podría liquidarse la instalación por 10.000 euros, pagándose por la liquidación un impuesto de 3.000 euros. El perfil de fondos quedaría de la siguiente forma:

$DI = 40.000$
$GF_i = 30.000 - 15.000 - 5.000 = 10.000$
$VR_5 = 10.000 - 3.000 = 7.000$

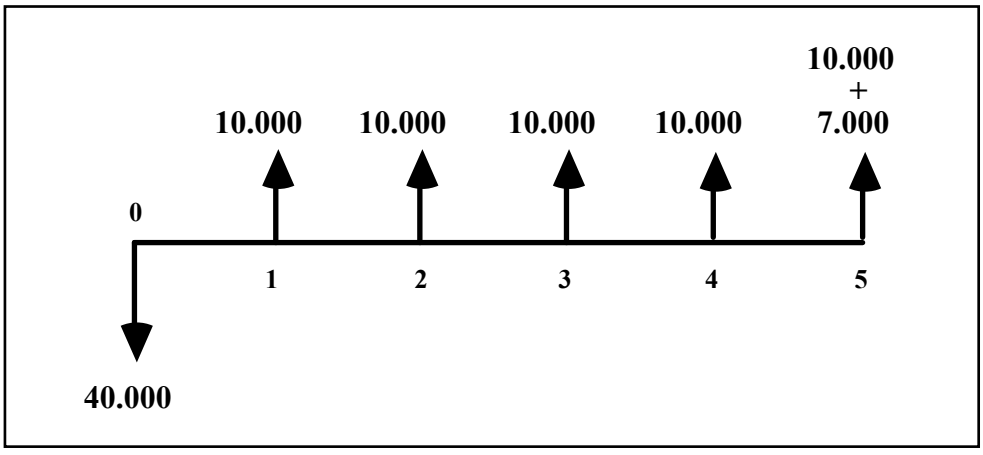


Figura 10

Una vez construido el perfil de fondos asociado al proyecto de inversión que se analiza, el siguiente paso consiste en valorar el interés de afrontarlo. Para ello existen en Finanzas una serie de criterios, de entre los que destacan dos: el Valor Actualizado Neto (VAN) y la Tasa de Rentabilidad Interna (TRI). Ambos se apoyan en el análisis del perfil de fondos propuesto.

El VAN propone comparar en valor actual "lo que el proyecto da con lo que el proyecto pide". Expresado de forma matemática:

$$VAN = - DI + \frac{GF_1}{(1+K)} + \frac{GF_2}{(1+K)^2} + ... + \frac{GF_n}{(1+K)^n} \tag{6}$$

$$VAN = - DI + \sum_{t=1}^{n} \frac{GF_t}{(1+K)^t} \tag{7}$$

El tipo K es el coste de los fondos utilizados en la financiación del proyecto. Este coste es siempre un coste de oportunidad, es decir, el rendimiento de la mejor alternativa (de riesgo similar) a la que se renuncia al afrontar el proyecto. En ambiente de certeza, la K sería el rendimiento de los títulos de renta fija del Estado, normalmente a un año.

La interpretación del VAN es sencilla: es la diferencia entre los valores actuales de lo que el proyecto da y lo que pide, luego es el incremento de valor que el proyecto aporta a la empresa. Lo anterior puede también verse de otra forma: el valor actual de las generaciones de fondos (incluido el valor residual y sin restar el desembolso inicial) es lo que costaría en el mercado "comprar" esa corriente de flujos de fondos, luego si este valor es mayor que el DI, la diferencia es la riqueza que debería haber aportado adicionalmente para comprar esa misma corriente de flujos de fondos en el mercado, y que me ahorro comprándola en el proyecto, por lo que tal diferencia puede interpretarse como el incremento de riqueza aportado por el proyecto.

Evidentemente, el criterio de actuación sería aceptar proyectos cuyo VAN sea mayor que cero, es decir, afrontar los proyectos que aporten valor a la empresa. Y si necesitamos jerarquizar el interés de varios proyectos, por ser incompatibles entre sí, elegiremos aquél que reporte un VAN mayor. Por otro lado, proyectos con VAN=0 serían indiferentes, lo que significa que dan el beneficio que deben dar (por lo que no crean valor).

El segundo criterio de decisión al que nos referíamos es la Tasa de Rentabilidad Interna (TRI). La TRI mide lo que el proyecto rinde, y se calcula igualando el VAN a cero y despejando el tipo de descuento que cumple con tal condición. Dicho de otra forma, se trata de calcular el tipo K que haría que el proyecto fuera indiferente: dicha tasa sería el rendimiento del proyecto. Matemáticamente:

$$DI = \frac{GF_1}{(1+TRI)} + \frac{GF_2}{(1+TRI)^2} + ... + \frac{GF_n}{(1+TRI)^n} = \sum_{t=1}^{n} \frac{GF_t}{(1+TRI)^t} \tag{8}$$

El criterio de actuación sería también sencillo: se aceptan aquellos proyectos cuya TRI sea superior a K, es decir, aquellos que rinden más que lo que deben (más que la mejor alternativa de mercado de riesgo similar a la que se renuncia al afrontar el proyecto). En el caso de elegir entre

varios proyectos, se escogería aquél que presente mayor TRI. Y finalmente, proyectos con TRI=K resultarían indiferentes (rinden exactamente lo que deben rendir).

Evidentemente, si pensamos en proyectos de inversión que se comportan "típicamente" como tales (lo que en Finanzas se conoce como inversiones simples), es decir, que presentan una salida de fondos inicial y posteriores entradas de fondos (todas positivas), VAN y TRI no pueden discrepar a la hora de aceptar o rechazar un proyecto, es decir, no puede ocurrir que el proyecto sea interesante para el VAN y no para la TRI (o viceversa). Dicho de otro modo, siempre que VAN>0 ocurrirá que TRI>K (y viceversa). Los problemas pueden presentarse a la hora de jerarquizar proyectos, momento en el que sí pueden aparecer tales discrepancias, es decir, podría ocurrir que el VAN prefiera un proyecto y la TRI prefiera otro.

Por ello, es importante señalar muy brevemente las razones que hacen del VAN un criterio claramente superior a la TRI[8]:

- En primer lugar, el VAN está directamente relacionado con el objetivo financiero de la empresa, que es la maximización de su valor en el mercado. Y hay que decir que maximizar el valor no es exactamente lo mismo que maximizar la rentabilidad (aunque obviamente ambos aspectos estén relacionados).

- El VAN supone que las generaciones de fondos que "salen" fuera del proyecto pueden reinvertirse al tipo K (hipótesis lógica, ya que K es el coste de oportunidad), mientras que la TRI supone que las generaciones de fondos que salen del proyecto se reinvierten a la propia TRI. Esta diferente hipótesis de reinversión implícita es la que está detrás de la posible discrepancia VAN-TRI que comentábamos anteriormente, y puede tener efectos especialmente "dramáticos" en proyectos con altas rentabilidades con respecto al mercado pero que recuperan muy pronto la inversión realizada.

- La TRI presenta un problema matemático (con implicaciones financieras que no constituyen el objeto de este artículo): se obtiene despejando una incógnita en un polinomio ordenado de grado n (el número de años de vida del proyecto). Por la regla de los signos de Descartes, el número de raíces positivas que pueden obtenerse será igual o menor al número de cambios de signo que presente el polinomio ordenado. Este es el conocido como problema de Inconsistencia de la TRI, es decir, podría ocurrir que un proyecto tenga como TRIs el 5% y el 15% (por ejemplo), siendo el coste de los fondos K=10%, con lo que no sabríamos qué hacer.

- La TRI necesita que los desembolsos iniciales de proyectos que van a compararse sean idénticos, cosa que no es necesaria al utilizar el VAN.

---

[8] El lector interesado puede ampliar lo aquí expuesto en "VAN vs TRI: algunos ejemplos prácticos", de Fernando Gómez-Bezares, José A. Madariaga y Javier Santibáñez, publicado en Harvard-Deusto Finanzas&Contabilidad, nº 7, Septiembre-Octubre, 1995, págs. 48-58.

- Finalmente, el VAN presenta algunas ventajas operativas, como el hecho de que es aditivo, propiedad que no presenta la TRI.

Con todo, y a pesar de la clara superioridad del VAN frente a la TRI, conviene señalar que los dos son buenos criterios de decisión. Además, si lo que se analizan son proyectos uniperiodo (y de igual desembolso), es decir, proyectos en los que sólo hay dos posiciones, una en la que se invierte, y otra en la que se recogen los frutos de la inversión realizada, los dos criterios serían totalmente coherentes. Dicho de otra forma, en tal caso utilizar uno u otro criterio es indiferente. Lo cual es interesante, ya que la TRI presenta una ventaja, su mayor intuitividad y comodidad a la hora de analizar inversiones financieras. De hecho es en esta propiedad en la que se apoya la Teoría de Cartera de Markowitz, que utiliza la TRI en lugar del VAN. La indiferencia entre ambos criterios a la hora de analizar proyectos uniperiodo y con idéntico desembolso puede verse con un sencillo ejemplo. Supongamos dos proyectos, A y B, que requieren para ser afrontados 10.000 euros cada uno. Ambos ofrecen una única generación de fondos al final del primer año: A reporta 13.000 euros, mientras que B ofrece 15.000. Supongamos que el coste de los fondos K es del 10%. Los perfiles de fondos de los dos proyectos se representan en la figura 11.

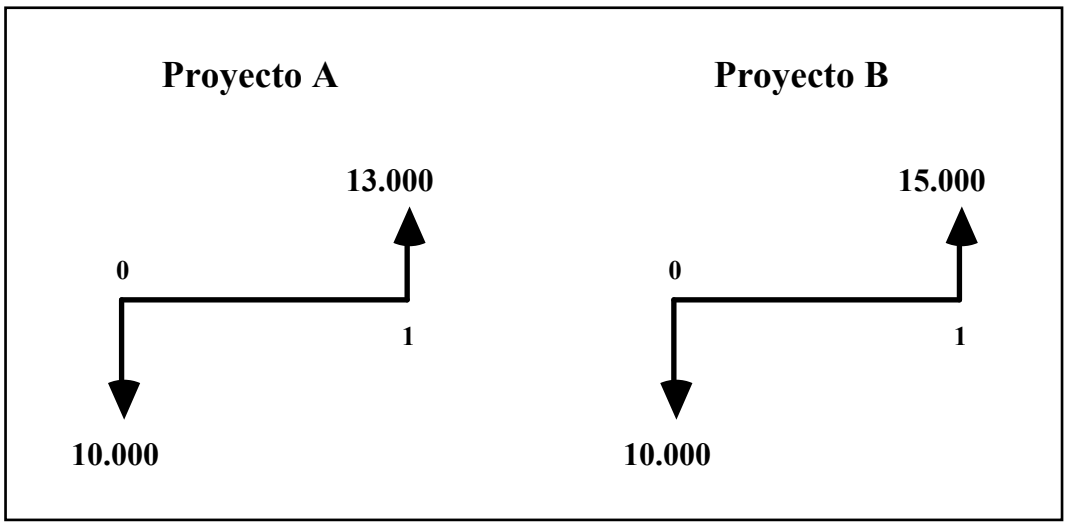


Figura 11

Es fácil en este caso calcular la TRI de los dos proyectos: A devuelve el importe invertido con una plusvalía de 3.000 euros (que suponen un 30% sobre la inversión), por lo que su rendimiento es $TRI_A = 30\%$, mientras que B añade a la inversión una cantidad de 5.000 al final del año (un 50% sobre el importe invertido), por lo que rinde $TRI_B = 50\%$. Así, los dos proyectos son interesantes, ya que rinden más que el coste de los fondos (K=10%), siendo B mejor que A, ya que rinde más. Y es evidente que también B será mejor para el VAN, ya que el desembolso es el mismo, y B tiene una generación de fondos superior a A. Efectivamente:

$$VAN_A = -10.000 + \frac{13.000}{1 + 0,1} = 1.818,1818$$

$$VAN_B = -10.000 + \frac{15.000}{1 + 0,1} = 3.636,3636$$

Y es que al tratarse de proyectos uniperiodo no puede haber discrepancias VAN-TRI (ya que no tiene sentido hablar de reinversión de las generaciones de fondos), ni tampoco la TRI puede tener problemas de inconsistencia (sólo puede haber una solución, al ser una ecuación de grado uno), pudiendo decirse que es totalmente indiferente en proyectos de este tipo razonar en términos de VAN, TRI, riquezas actuales o riquezas finales.

4. La inversión en condiciones de riesgo

Revisaremos en este punto la metodología propuesta para el análisis de proyectos de inversión cuando introducimos la hipótesis de riesgo. A efectos de simplificación, razonaremos pensando en el riesgo total de un proyecto.

El primer paso a realizar sería coincidente con el análisis de proyectos de inversión en condiciones de certeza: lo primero que tenemos que hacer es construir el perfil de fondos asociado al proyecto, es decir, calcular el impacto que éste tendrá en la tesorería de la empresa. Pero a diferencia de lo que ocurría en ambiente de certeza, en el que todos los datos eran conocidos con total seguridad, en ambiente de riesgo lo que conocemos son las distribuciones de probabilidad de las variables que influyen en el proyecto, por lo que ahora nos encontraremos con un perfil de fondos como el que se propone en la figura 12.

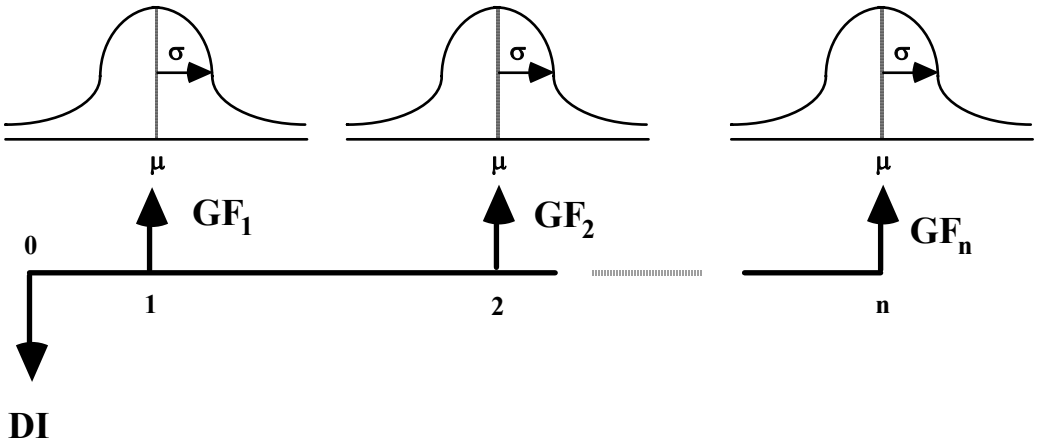


Figura 12

Es decir, que a partir de la información con la que contamos referida a las variables que influyen en las generaciones de fondos asociadas al proyecto, lo que podemos obtener ahora es la distribución de dichas generaciones de fondos. Obsérvese que el Desembolso inicial lo suponemos conocido, dado que se produce en el momento cero. Y una hipótesis que será aceptable en muchos casos es que las generaciones de fondos siguen una distribución normal, de promedio μ y desviación típica σ, en cuyo caso la distribución queda perfectamente definida con estos dos parámetros. Por otro lado, y como es evidente, el promedio y riesgo de las diferentes generaciones de fondos asociadas al proyecto no tienen por qué ser idénticos.

En lo que se refiere a los criterios que la Teoría Financiera pone a nuestra disposición para el análisis de proyectos de inversión en condiciones de riesgo, debemos decir que básicamente serían los mismos (con algunas matizaciones que comentaremos a continuación) que los que tenemos en ambiente de certeza, el VAN y la TRI. Dada su superioridad teórica, razonaremos en términos de VAN (aunque podríamos hacerlo también en términos de TRI). Dos son los criterios clásicos que la Teoría Financiera propone, sobre la base de lo anterior, para el tratamiento del riesgo:

- Ajuste del tipo de descuento. Propone calcular el VAN ajustado por el riesgo: como hemos dicho, la diferencia con el ambiente de certeza radica en que ahora las generaciones de fondos no son "seguras" sino "esperadas" (y por tanto sujetas a riesgo). Y dado que, tal como indicábamos en el primer apartado, parece lógico suponer que los individuos nos comportamos como enemigos del riesgo, lo razonable será exigir una rentabilidad superior a la exigida a los proyectos "seguros". Así, el Ajuste del tipo de descuento propone descontar las generaciones de fondos (esperadas) a un tipo "primado" por el riesgo, y que llamaremos R:

$$VAN_{ajustado} = -DI + \frac{E(GF_1)}{(1+R)} + \frac{E(GF_2)}{(1+R)^2} + ... + \frac{E(GF_n)}{(1+R)^n} \tag{9}$$

donde R = K + P, es decir, el rendimiento que exigiríamos al proyecto si las generaciones de fondos fueran seguras (K), más una prima de rentabilidad P que dependerá del riesgo que el proyecto aporte a la empresa. Puede expresarse la fórmula anterior de manera más resumida:

$$VAN_{ajustado} = -DI + \sum_{i=1}^{n} \frac{E(GF_i)}{(1+K+P)^i} \tag{10}$$

- Equivalente de certeza. Consiste en buscar las cantidades "equivalentes ciertas" de las generaciones de fondos esperadas, es decir, las cantidades seguras por las que el individuo estaría dispuesto a cambiar cada una de las generaciones de fondos esperadas. Esto se hace multiplicando cada generación de fondos esperada

por un coeficiente corrector α_i (diferente para cada año), que para enemigos del riesgo sería menor que la unidad. Y dado que las generaciones de fondos se convierten así en "equivalentes ciertos", el VAN debería calcularse utilizando el tipo de interés sin riesgo (el exigible a inversiones seguras), ya que la penalización en este criterio se hace a través de los numeradores de la fórmula:

$$VAN_{ajustado} = -DI + \frac{\alpha_1 \cdot E(GF_1)}{(1+K)} + \frac{\alpha_1 \cdot E(GF_2)}{(1+K)^2} + ... + \frac{\alpha_1 \cdot E(GF_n)}{(1+K)^n} \quad (11)$$

$$VAN_{ajustado} = -DI + \frac{GF'_1}{(1+K)} + \frac{GF'_2}{(1+K)^2} + ... + \frac{GF'_n}{(1+K)^n} \quad (12)$$

donde GF'_i representa la generación de fondos equivalente cierta del año i. Como puede verse, ambos criterios pretenden conceptualmente lo mismo: penalizar el interés de un proyecto en función de su riesgo. Así, si suponemos dos proyectos A y B con idénticas generaciones de fondos, pero que son seguras en el primero y esperadas en el segundo, el VAN ajustado de B será inferior al VAN (seguro) de A, ya que a B se le aplicará un tipo de descuento superior (en el caso del Ajuste del tipo de descuento), o se minorarán las generaciones de fondos en una determinada medida, para descontar las generaciones de fondos equivalentes ciertas al tipo K (en caso de utilizar el Equivalente de certeza). Y en ambos casos, la penalización será tanto mayor cuanto mayor sea el riesgo que el proyecto aporta. La dificultad de ambos criterios radica en la estimación de los parámetros necesarios para su utilización: la prima de riesgo P en el primero, y los coeficientes correctores α_i en el segundo.

Frente a estos dos criterios clásicos, nosotros propondremos un tercer criterio, el Valor Actualizado Penalizado (VAP)[9]. El criterio propone penalizar directamente el promedio de VAN con su riesgo (medido por la desviación típica). De entre las múltiples formas de penalización posibles, nosotros nos decantamos por la penalización lineal, que tiene una interpretación teórica más clara, y presenta la ventaja de poder utilizarse en la práctica de manera más sencilla. Así:

$$VAP = \mu_{VAN} - t \cdot \sigma_{VAN} \quad (13)$$

donde μ_{VAN} y σ_{VAN} son, respectivamente, el promedio y la desviación típica de VAN, y t es el parámetro de penalización que el decisor tiene que decidir. El promedio y la desviación típica de

[9] El criterio nace en 1984, de la mano del profesor Gómez-Bezares, y hemos seguido desarrollándolo en el Departamento de Finanzas de la Universidad Comercial de Deusto a lo largo de los últimos quince años. Puede consultarse en "Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions", de Fernando Gómez-Bezares, en Aggarwal, ed., "Capital budgeting under uncertainty", Prentice - Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, 1993, págs. 91-102.

VAN deben calcularse al tipo de interés sin riesgo (K), ya que la penalización por el riesgo se hace después, restando t veces la desviación típica al promedio.

El criterio de actuación sería el de aceptar los proyectos que presenten un VAP positivo, y a la hora de elegir entre varios proyectos, se elegiría aquél que tuviera un VAP mayor. Puede verse que conceptualmente el criterio propone algo muy similar a los criterios clásicos, penalizar el interés del proyecto en función de su riesgo. La diferencia consiste en que mientras el Ajuste del tipo de descuento propone penalizar a través del denominador y el Equivalente de certeza a través de los numeradores, el VAP propone penalizar directamente la esperanza matemática del VAN con su riesgo.

Dedicaremos algunas líneas a tratar de justificar desde un punto de vista teórico el criterio propuesto. Así, si despejamos el promedio en la fórmula propuesta en (13), tenemos:

$$\mu_{VAN} = VAP + t \cdot \sigma_{VAN} \tag{14}$$

que como puede verse es la ecuación de una recta en el mapa μ–σ de VAN, de pendiente t y ordenada en el origen VAP. Si llamamos ahora Z_i al VAP, lo que tenemos es un sistema de rectas paralelas (una recta para cada valor de Z_i) de pendiente t, tal como puede verse en la figura 13.

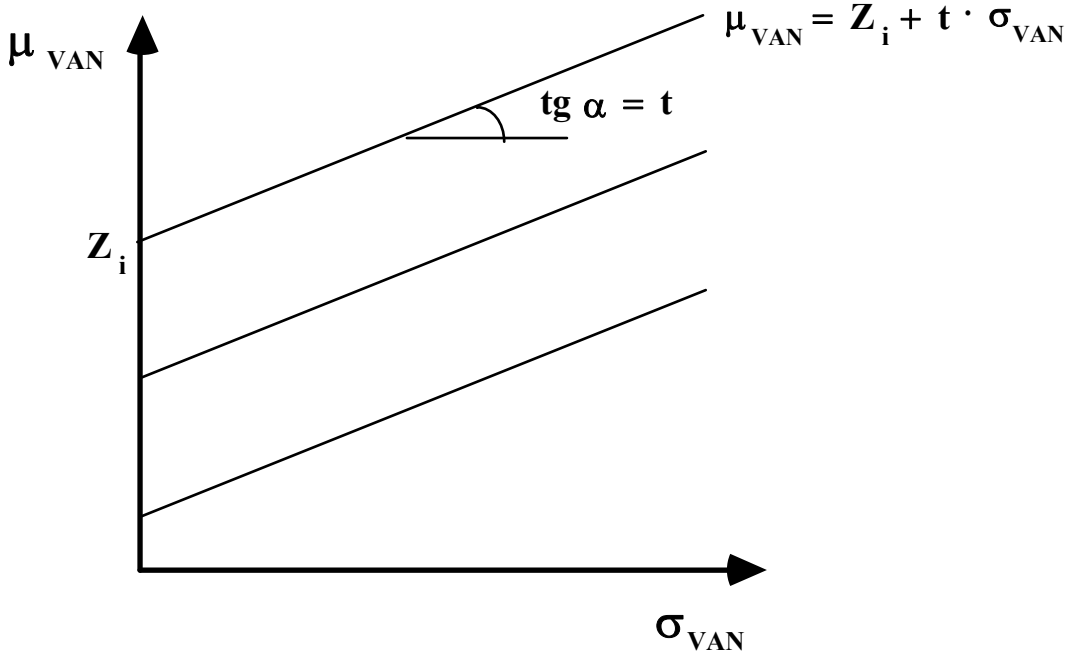


Figura 13

Así, cuando tratamos de maximizar el VAP lo que hacemos es elegir aquél proyecto que nos permita situarnos en la recta de pendiente t más alejada posible del origen de coordenadas (la que tenga una ordenada en el origen mayor). Además, todos los proyectos que se sitúen en la misma recta tendrán la misma ordenada en el origen (el mismo VAP), por lo que resultarán indiferentes, y así las rectas pueden interpretarse como "rectas de indiferencia". Por otro lado, todos los proyectos que se sitúen en la misma recta son indiferentes entre sí, y también a un proyecto cuyo VAN seguro coincida con el valor que se sitúa en la ordenada en el origen, por lo que el VAP puede interpretarse como el VAN equivalente cierto. De esta manera, puede verse claramente la relación entre el planteamiento del VAP y el razonamiento a través de las curvas de indiferencia que proponíamos en el primer apartado de este artículo.

Un problema que presenta el planteamiento desde un punto de vista teórico es que puede demostrarse, bajo determinadas circunstancias[10], que las curvas de indiferencia crecen más que proporcionalmente, es decir, son cóncavas vistas desde arriba. Esto nos lleva a la necesidad de utilizar valores de t diferentes para proyectos con riesgos muy distintos, pero no supone problemas a la hora de comparar proyectos de riesgos similares, ya que el premio por riesgo puede considerarse constante para incrementos suficientemente pequeños del riesgo. Lo anterior pude verse en la figura 14, en la que las curvas se representan como una serie de rectas engarzadas, siendo el error cometido suficientemente pequeño (para variaciones suficientemente pequeñas de riesgo).

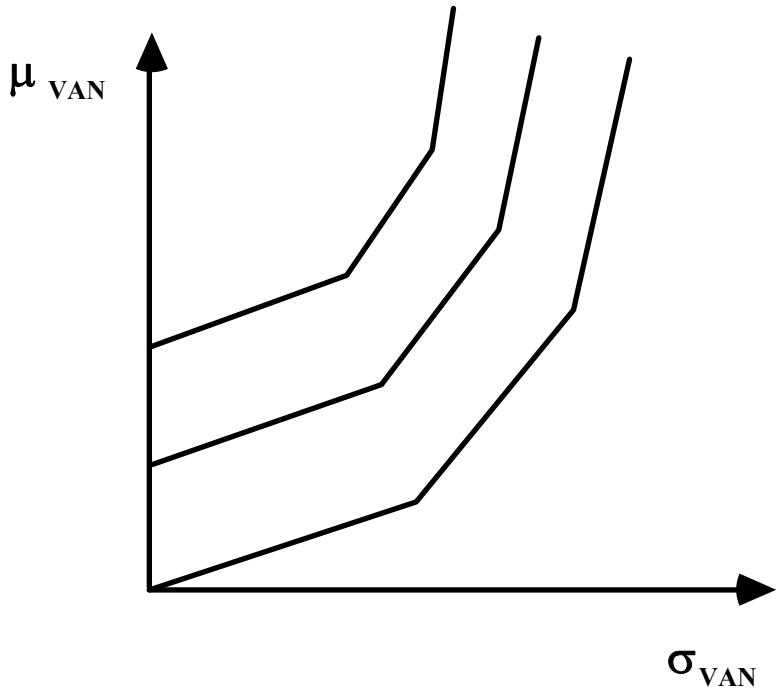


Figura 14

[10] Individuos con utilidad marginal positiva y decreciente (es decir, que prefieren más riqueza a menos riqueza y se comportan como enemigos del riesgo) y supuestas distribuciones normales de resultado. Puede verse, por ejemplo, en "Dirección financiera", de Fernando Gómez-Bezares, Desclée de Brouwer, 1991, 2ª edición, capítulo 4.

Vemos así que la interpretación teórica del criterio es clara y consistente con todo lo propuesto anteriormente. Sólo falta dar una interpretación clara al valor de t. Afortunadamente, dicha interpretación es sencilla si suponemos normalidad del VAN. Efectivamente, y tal como puede verse de manera intuitiva, el valor de t indica el número de desviaciones típicas que el valor tomado como referencia para analizar el interés del proyecto (el VAP) se aleja del promedio. Dicho de otra forma, el valor de t elegido (cambiado de signo) es el valor tipificado del VAP supuesta normalidad de la distribución del VAN.

Lo anterior es fácil de ver si despejamos el valor de t en la formulación propuesta (13):

$$- t_{\alpha} = \frac{Z_i - \mu_{VAN}}{\sigma_{VAN}} = \frac{VAP - \mu_{VAN}}{\sigma_{VAN}} \tag{15}$$

Como es sabido, los valores tipificados de una variable que sigue la distribución normal tienen asociadas unas determinadas probabilidades (α), menores cuanto mayor es el valor de t, y que vienen tabuladas. Algunos valores especialmente significativos son los representados en la figura 15.

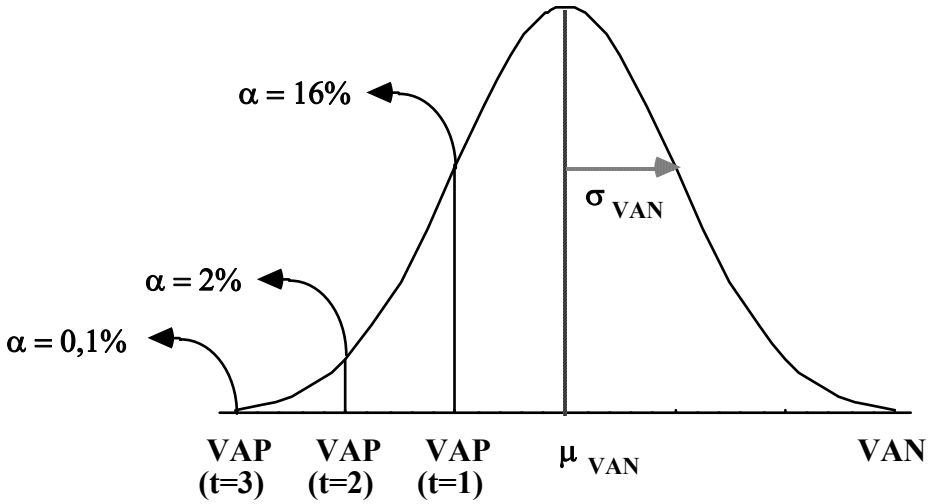


Figura 15

De esta forma, el VAP puede entenderse como el VAN mínimo garantizado con una determinada probabilidad, que depende del valor de t elegido. Así, si elegimos una t=1, dado que la probabilidad de encontrar un valor que se aleje una desviación típica o más respecto del promedio es de un 16% (aproximadamente), el VAP obtenido será el VAN mínimo garantizado del proyecto con una probabilidad del 84%, aproximadamente; mientras que si el valor escogido es t=2, el VAP será el VAN mínimo garantizado con una probabilidad aproximada del 98%; la elección de un valor t=3 supondría que la garantía asociada al valor obtenido sería de un 99,9%, aproximadamente.

Cuanto mayor sea la aversión al riesgo, la garantía exigida al valor obtenido será mayor, por lo que utilizaremos una t superior (penalizaremos más). Y supuesta una determinada aversión al riesgo, cuanto mayores sean las consecuencias negativas asociadas al proyecto en el caso de que salga mal, el valor de t será también superior.

En el entorno de la pequeña y mediana empresa, será difícil en ocasiones calcular con todo rigor el promedio y la desviación típica del VAN, lo que exigiría definir un número suficientemente grande de escenarios posibles. Podemos en tal caso aportar algunas fórmulas simplificadas. Así, supongamos que el decisor es capaz de definir únicamente dos valores posibles del VAN: el valor mínimo (el más pesimista), que llamaremos a, y el valor máximo (el que se produciría en la situación más optimista posible), que llamaremos b. En esta situación, pueden utilizarse fórmulas simplificadas para el cálculo de la esperanza matemática y desviación típica del VAN. Si puede aceptarse la hipótesis de normalidad de la distribución del VAN, la esperanza matemática será fácil de aproximar (al ser simétrica la distribución):

$$\mu_{VAN} = \frac{a + b}{2} \tag{16}$$

Y en condiciones de normalidad, valores que se alejen más de 3 desviaciones típicas del promedio, tanto por la izquierda como por la derecha, tienen una probabilidad muy escasa de producirse (aproximadamente un 0,2%, ya que en el rango de valores comprendidos entre $\pm 3\ \sigma$ se encuentra un 99,8% de probabilidad, aproximadamente). Esto significa que el error cometido si suponemos que:

$$b - a = 6 \cdot \sigma \tag{17}$$

es suficientemente pequeño. Por lo que podemos aproximar la desviación típica como:

$$\sigma_{VAN} = \frac{b - a}{6} \tag{18}$$

Partiendo de las fórmulas de cálculo simplificadas del promedio y riesgo de VAN asociados al proyecto, podemos aplicar la formulación propuesta del VAP. Así, para t = 1,5, tenemos:

$$VAP = \mu_{VAN} - t \cdot \sigma_{VAN} \tag{13}$$

$$VAP = \frac{a + b}{2} - 1{,}5 \cdot \frac{b - a}{6} = 0{,}25\, b + 0{,}75\, a \tag{19}$$

que como puede verse, supone ponderar con un peso del 25% el valor máximo y con un 75% el valor mínimo. Y dado que el valor de t utilizado es de 1,5, el valor VAP obtenido puede entenderse como valor mínimo garantizado con un 93% de probabilidad, aproximadamente. Si el valor propuesto de t nos parece demasiado alto (es decir, si la penalización propuesta se

considera exagerada), podemos dar valores inferiores a t. Por ejemplo, t = 0,6 (que hace que el VAP deje a su izquierda un 27% de probabilidad, aproximadamente), con lo que:

$$VAP = \frac{a+b}{2} - 0{,}6 \cdot \frac{b-a}{6} = 0{,}4\,b + 0{,}6\,a \qquad (20)$$

donde ahora el valor máximo tiene una ponderación superior. Veamos todo lo anterior con un sencillísimo ejemplo. Supongamos un proyecto de inversión en el que sólo nos atrevemos a calcular los valores mínimo y máximo de VAN: a = -20.000 y b = 40.000, respectivamente. Supongamos también que el analista no tiene razones para rechazar la hipótesis de normalidad, es decir, que no piensa que ninguno de los dos valores sea más probable que el otro, y tampoco piensa que los dos valores definidos sean los únicos posibles, sino los más representativos de un rango suficientemente amplio de valores (siendo posibles valores intermedios -tanto más cuanto más "centrados"-, y también valores inferiores o superiores a los propuestos -aunque con una probabilidad que se considera despreciable-). Supongamos además que el proyecto es de un riesgo similar a los que normalmente afronta la empresa, por lo que se considera suficiente que el valor obtenido para juzgar el interés del proyecto esté garantizado con un 73% de probabilidad (t = 0,6). Haciendo los cálculos correspondientes:

$$\mu_{VAN} = \frac{a+b}{2} = \frac{-20.000 + 40.000}{2} = 10.000$$

$$\sigma_{VAN} = \frac{b-a}{6} = \frac{40.000 - (-20.000)}{6} = 10.000$$

$$VAP_{(t=0,6)} = 0{,}4 \cdot b + 0{,}6 \cdot a = 0{,}4 \cdot 40.000 + 0{,}6 \cdot (-20.000) = 4.000$$

Si la penalización correspondiente a t = 0,6 se considera suficiente, el proyecto sería aceptado, ya que tiene un VAP positivo. Razonar así supone fijarse en un valor concreto de VAN, 4.000, que sería el valor que se produciría como mínimo en un 73% de los casos en los que se afrontara el proyecto.

Un último comentario relativo a la medida del riesgo utilizada a lo largo de todo este apartado. Como puede verse, hemos razonado en términos del riesgo total del proyecto, cuando lo que en realidad habría que haber considerado es el riesgo que éste aporta a la empresa (razonamiento en términos de variabilidad a la decisión). Así, podría ocurrir que un proyecto tuviera un riesgo elevado si lo tomamos por separado, pero que fuera capaz incluso de disminuir el riesgo total de la empresa en la que va a enmarcarse (al tener una relación muy negativa con los proyectos afrontados actualmente por la empresa). Dando un paso más, el riesgo realmente relevante de un proyecto no sería el que aporta a la empresa, sino el que añade a la cartera del accionista (cfr. riesgo diversificable y riesgo sistemático). Esto nos llevaría a tratar de medir ese riesgo relevante (para el accionista, o en su caso, para la empresa, si las posibilidades de diversificación del accionista no son amplias), medida que sustituiría a la σ utilizada (que es una medida del riesgo total).

Nosotros pensamos que esto puede tenerse en cuenta simplemente variando el valor de t utilizado, lo que es más sencillo. Así, si el proyecto estudiado está fuertemente correlacionado con los proyectos en funcionamiento que tiene la empresa, casi todo el riesgo del proyecto será relevante para la empresa, por lo que el valor de t será más alto; mientras que si el proyecto estuviera negativamente correlacionado con los actuales de la compañía, el valor de t podría ser incluso negativo. Y un razonamiento similar podría hacerse teniendo en cuenta el riesgo que el proyecto aporta a la cartera del accionista (en el caso de que éste tenga posibilidades interesantes de diversificación del riesgo en su propia cartera).

MEDIDAS DE *PERFORMANCE*: ALGUNOS ÍNDICES CLÁSICOS Y RELACIÓN DE LA TRIP CON LA TEORÍA DE CARTERA

por Fernando Gómez-Bezares, José A. Madariaga y Javier Santibáñez
Publicado (en versión reducida, sin apéndices) en *Análisis Financiero Internacional*, nº 113, Tercer Trimestre, 2003, págs. 5-19

1.- INTRODUCCIÓN

El Valor Actualizado Penalizado (VAP) es un criterio de selección de inversiones en ambiente de riesgo propuesto hace ya unos veinte años por Fernando Gómez-Bezares[1] y sobre el que hemos venido trabajando en el Departamento de Finanzas de la Universidad Comercial de Deusto a lo largo de los últimos años[2]. En una comunicación presentada al III Foro de Finanzas celebrado en los meses de noviembre y diciembre de 1995 en la Universidad Comercial de Deusto (Bilbao)[3], tratábamos de desarrollar un criterio apoyado en la idea anterior, la TRIP (Tasa de Rentabilidad Interna Penalizada), coherente con ella, y que trataba de conectarlo con los criterios clásicos de tratamiento de la decisión de inversión en condiciones de riesgo (ajuste del tipo de descuento y equivalente de certeza). Veíamos entonces las hipótesis de partida del criterio, su justificación teórica y la coherencia del mismo con los mencionados criterios.

En este artículo intentaremos conectar la TRIP con otra línea interesante de trabajo desarrollada en el campo de las modernas finanzas como es la Teoría de cartera de Markowitz, así como con uno de los modelos desarrollados a partir de aquella (el *Capital Asset Pricing Model*). Y lo haremos tratando de analizar la coherencia de la TRIP con algunas medidas de *performance* utilizadas habitualmente para el estudio del desempeño de títulos y carteras en Bolsa y que encuentran su base en la citada Teoría de cartera.

---

[1] El primer trabajo relacionado con el tema data de principios de los ochenta (véase Gómez-Bezares, 1984).

[2] Pueden verse Gómez-Bezares (1991, 1993 y 2002), Santibáñez (1995) o Santibáñez y Gómez-Bezares (1999), por citar sólo algunos de los trabajos más representativos relacionados con el tema.

[3] Véase Laka y Santibáñez (1995).

2. LA DECISIÓN DE INVERSIÓN EN CONDICIONES DE RIESGO: CRITERIOS CLÁSICOS

Como es sabido, el análisis de un proyecto de inversión parte de la construcción y análisis de su perfil de fondos, el cual presenta tres características fundamentales: es un perfil de tesorería (es decir, analiza los impactos que el proyecto tiene en la tesorería de la empresa, y no en el beneficio); es un perfil incremental (recoge sólo las variaciones experimentadas en la tesorería de la compañía como consecuencia de afrontar el proyecto); y se construye con total independencia de cómo se financie (aspecto éste último, la financiación, que aparece al calcular las medidas del interés del proyecto).

Una vez construido el perfil de fondos asociado al proyecto, la Teoría Financiera pone a nuestra disposición una serie de criterios de decisión, de entre los que los más interesantes son el Valor Actualizado Neto y la Tasa de Rentabilidad Interna.

El Valor Actualizado Neto (VAN) propone comparar en valor actual las entradas y salidas de fondos provocadas por el proyecto. Ello exige estimar la tasa de descuento apropiada (la rentabilidad mínima a exigir), que es entendida siempre como coste de oportunidad o rentabilidad de la mejor alternativa de riesgo similar a la que se renuncia al afrontar el proyecto en cuestión. En condiciones de certeza, esta rentabilidad sería el tipo de interés sin riesgo a un plazo similar. Así:

$$VAN = - DI + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{GF_t}{(1+k)^t} \qquad [1]$$

donde:

DI	Desembolso Inicial asociado al proyecto
GF_t	Impacto en caja del proyecto en el año "t" (supuestos proyectos a largo plazo y generaciones de fondos definidas en términos anuales)
n	Vida útil del proyecto (número de años en los que el proyecto tiene impacto en la tesorería de la empresa)
k	Rentabilidad exigida al proyecto (tipo de interés sin riesgo)

En cuanto a la Tasa de Rentabilidad Interna (TRI), ésta se define como la rentabilidad asociada al proyecto, y se calcula sobre el mismo perfil de fondos, igualando a cero el VAN y despejando el tipo de descuento que cumple tal condición.

El criterio de actuación es claro: se aceptarán aquellos proyectos cuyo VAN sea mayor que cero (son los que aportan valor a la empresa), o lo que es lo mismo, los que presenten una TRI mayor que k (es decir, aquellos que rinden más que la mejor alternativa -de riesgo similar- a la que se renuncia). Los dos criterios son consistentes a la hora de aceptar o rechazar un proyecto, aunque pueden discrepar cuando se trata de ordenar varios proyectos en función de su interés para la compañía, situación en la que el VAN aparece como un mejor criterio, ya que tal discrepancia está motivada por la diferente hipótesis implícita de reinversión que los dos criterios consideran, siendo más lógica la del VAN.

En ambientes de riesgo, la Teoría Financiera propone dos criterios clásicos para el tratamiento de la decisión de inversión: el ajuste del tipo de descuento y el equivalente de certeza. Ambos parten de la idea de que los individuos nos comportamos como enemigos del riesgo, es decir, que sólo estamos dispuestos a aceptar riesgos si se nos premia por ello[4].

El ajuste del tipo de descuento propone penalizar el interés de los proyectos en función del riesgo que aportan a su propietario a través de los denominadores del VAN. Así:

$$VAN_{ajustado} = -DI + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{E(GF_t)}{(1+k+p)^t} = -DI + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{E(GF_t)}{(1+r)^t} \qquad [2]$$

donde:

$E(GF_t)$	Generación de Fondos "esperada" del proyecto en el año "t"
p	Prima de riesgo asociada al proyecto
r	Rentabilidad exigida al proyecto en función de su riesgo (r = k + p)

De esta manera, y tal como puede verse en la fórmula [2], la rentabilidad exigida al proyecto está compuesta por el tipo de interés sin riesgo (k), al que se añade una prima de riesgo (p). El criterio sería aceptar proyectos cuyo VAN ajustado sea mayor que cero; o lo que es lo mismo, aceptar aquellos que tengan una TRI (esperada)[5] mayor que el tipo primado "r".

El equivalente de certeza propone algo parecido, pero realizando la penalización en los numeradores de la fórmula. Así, de lo que se trata es de convertir las generaciones esperadas en aquellas cantidades seguras que reportan la misma utilidad, es decir, en sus equivalentes ciertos:

$$VAN_{ajustado} = -DI + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{\alpha_t \cdot E(GF_t)}{(1+k)^t} = -DI + \sum_{t=1}^{t=n} \frac{GF'_t}{(1+k)^t} \qquad [3]$$

[4] Para ampliar todo lo relativo al tratamiento de la decisión de inversión en condiciones de riesgo a un nivel relativamente sencillo puede consultarse Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (2001).

[5] Entendiendo en este contexto el término "esperada" no en la forma habitual (asociado al concepto estadístico de "esperanza matemática"), sino en el sentido de "calculada a partir de las generaciones de fondos esperadas"; más tarde volveremos sobre ello.

donde:

α_t Coeficiente corrector (entre 0 y 1, supuestos individuos enemigos del riesgo) correspondiente a la generación de fondos esperada del año "t"

GF'_t Generación de fondos equivalente cierta del año "t"

Obsérvese que el tipo de descuento es en este caso "k", el tipo de interés sin riesgo, ya que la penalización por el riesgo se hace ahora a través del numerador. El criterio de actuación sería nuevamente el de aceptar aquellos proyectos cuyo VAN (ajustado por el riesgo) sea mayor que cero, o lo que es lo mismo, aquellos cuya TRI (equivalente cierta) sea mayor que k.

Tenemos que decir que el VAN se presenta como un criterio superior a la TRI, y ello por una serie de motivos: supone un tipo de reinversión más lógico (el tipo de descuento); no tiene problemas de inconsistencia (la TRI puede presentar varias soluciones y darnos consejos incoherentes); no necesita, para comparar proyectos, que sus desembolsos sean iguales; tiene la propiedad aditiva; sirve directamente al objetivo financiero de la empresa (la maximización de su valor en el mercado); …[6] Sin embargo, la Teoría de cartera, así como los modelos que se derivan de una forma u otra de la anterior, se basan en la TRI, y ello es justificable porque en estos modelos se suponen proyectos uniperiodo, en los que sólo hay dos posiciones: una en la que se invierte, y otra en la que se retiran los resultados de la inversión (aportación inicial y rendimientos obtenidos, con su signo). En tales condiciones, puede demostrarse que es indiferente razonar en términos de VAN, TRI, riquezas actuales, riquezas finales, etc., siempre que partamos de la misma aportación inicial.

3. UNA ALTERNATIVA A LOS CRITERIOS CLÁSICOS: EL VALOR ACTUALIZADO PENALIZADO (VAP) Y LA TASA DE RENTABILIDAD INTERNA PENALIZADA (TRIP)

Frente a los criterios clásicos de tratamiento del riesgo surge el Valor Actualizado Penalizado (VAP), propuesto por el profesor Gómez-Bezares a principios de los años ochenta. La idea del VAP es sencilla: si el ajuste del tipo de descuento penaliza el interés del proyecto a través del denominador del VAN y el equivalente de certeza lo hace a través de los numeradores, el VAP propone penalizar directamente el promedio de VAN con su desviación típica, calculados ambos al tipo de interés sin riesgo. De entre todas las formas posibles, nos inclinamos por la penalización lineal (véase el Apéndice B), que nos llevaría a la siguiente formulación:

[6] Para ampliar cualquier aspecto relacionado con la discusión VAN-TRI a un nivel sencillo puede consultarse Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (1995).

$$VAP = E(VAN) - t \cdot \sigma(VAN) \quad [4]$$

donde:

E (VAN)	Esperanza matemática de VAN (calculado al tipo de interés sin riesgo)
t	Parámetro de penalización (mayor que cero para enemigos del riesgo)
σ (VAN)	Desviación típica (medida del riesgo -total- del proyecto) de VAN (calculado al tipo de interés sin riesgo)

Según el criterio, serían interesantes los proyectos cuyo VAP fuera positivo; y a la hora de jerarquizar, serían más interesantes los proyectos que tuvieran un VAP mayor.

La justificación teórica del criterio es interesante. Así, el VAP nos indicaría la ordenada en el origen de la recta de pendiente "t" (en el mapa promedio-riesgo -μ–σ- de VAN) en la que el proyecto nos permite situarnos; por lo que, si suponemos rectas en lugar de curvas de indiferencia, el VAP puede entenderse como el VAN equivalente cierto de un E (VAN) sujeto a riesgo; y de esta forma, el VAP sería una medida de utilidad. Puede verse todo ello de manera gráfica en la figura 1.

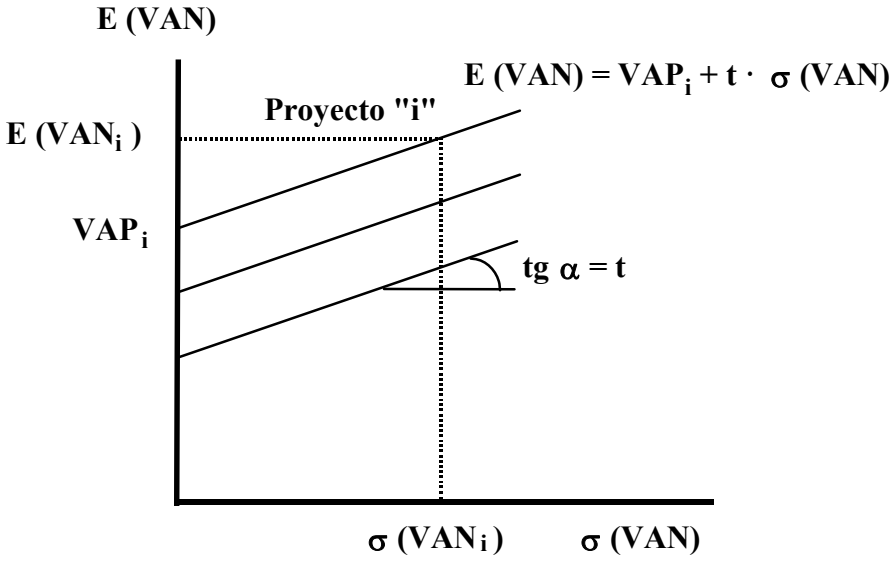


Figura 1

Partiendo de la interpretación propuesta, puede verse también que la recta que delimita la "zona de proyectos interesantes" es la que nace del origen de coordenadas (siempre con pendiente t), ya que el VAN = 0 (sin riesgo) siempre es alcanzable (invirtiendo el dinero al tipo de interés sin riesgo); puede verse gráficamente esta idea en la figura 2.

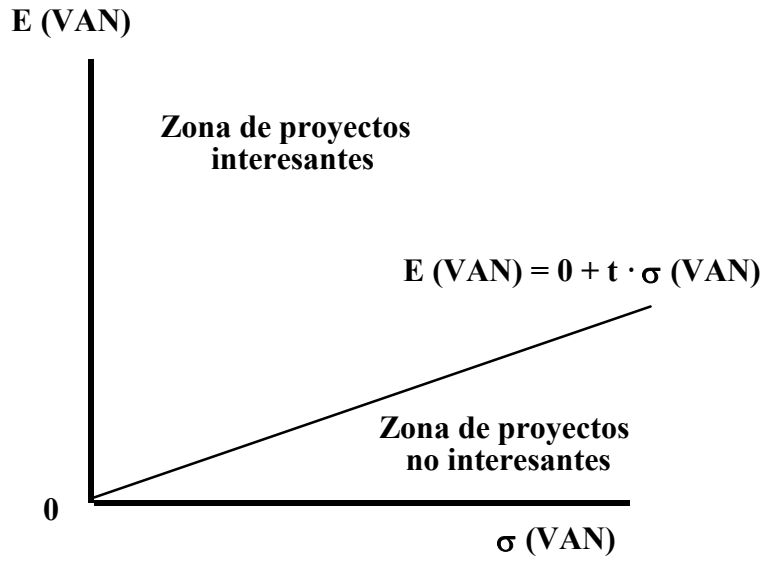


Figura 2

Por otro lado, el parámetro "t" nos está indicando el número de desviaciones típicas que el VAP se aleja del promedio de VAN (por la izquierda, supuestos enemigos del riesgo). Desde este punto de vista, el valor de "t" elegido llevaría aparejada una probabilidad "α" a la izquierda (y, por tanto, "1-α" a la derecha) del VAP, por lo que éste puede interpretarse también como un VAN mínimo garantizado con una probabilidad "1-α" que depende del valor de "t" elegido. Supuestas distribuciones normales de VAN tales probabilidades son fáciles de conocer: en la figura 3 se ofrecen algunos valores especialmente interesantes.

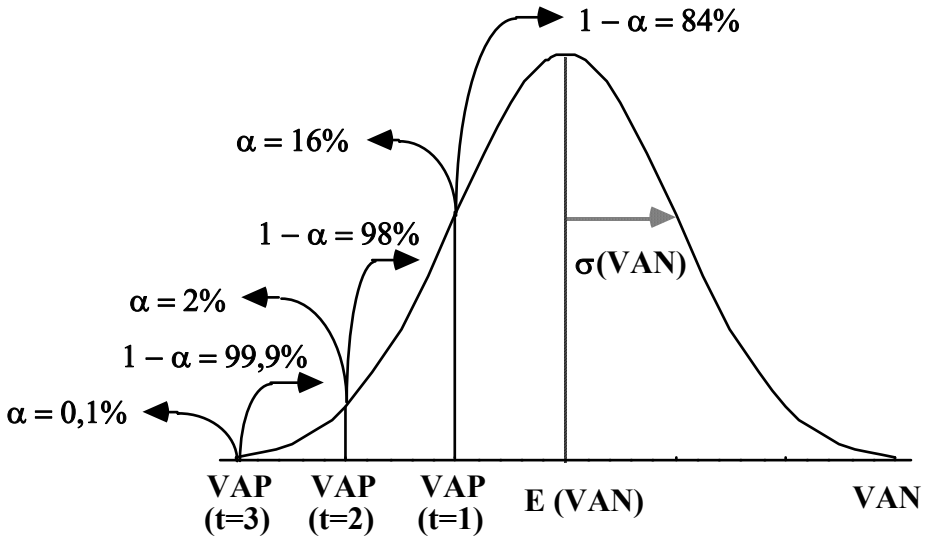


Figura 3

Estos mismos razonamientos pueden trasladarse a la TRI, dando lugar a un criterio que hemos llamado TRIP (Tasa de Rentabilidad Interna Penalizada). Su formulación, de manera coherente con lo indicado hasta ahora, sería la siguiente:

$$TRIP = E(TRI) - t \cdot \sigma(TRI) \qquad [5]$$

donde:

E (TRI)	TRI esperada del proyecto[7]
t	Parámetro de penalización (mayor que cero para enemigos del riesgo)
σ (TRI)	Desviación típica de TRI (medida del riesgo -total- del proyecto)

El criterio de actuación ahora sería aceptar aquellos proyectos cuya TRIP fuera superior al tipo de interés sin riesgo (k), siguiendo una interpretación coherente con la propuesta para el VAP. Efectivamente, en la figura 4 puede verse que, supuestas rectas de indiferencia, la TRIP del proyecto puede interpretarse como la TRI equivalente cierta de una E (TRI) sujeta a riesgo, siendo "t" la pendiente de dichas rectas; y dado que el tipo de interés sin riesgo siempre puede conseguirse, la mínima tasa equivalente cierta que estaremos dispuestos a aceptar será dicho tipo de interés sin riesgo (por lo que la recta de pendiente t que nace del tipo k delimita en este contexto la zona de proyectos interesantes de los que no lo son -véase la figura 5-). Finalmente, el parámetro t indica el número de desviaciones típicas que el valor tomado como referencia (la TRIP) se aleja del promedio (por la izquierda), por lo que TRIP puede entenderse como la tasa mínima garantizada con un determinado nivel de probabilidad, que depende del propio valor de t elegido. En la figura 6 se ofrece un gráfico con algunos valores de t que consideramos especialmente relevantes, supuesta normalidad de la TRI[8].

---

[7] Recuérdese lo comentado en la nota 5.

[8] La hipótesis de normalidad del VAN es relativamente fácil de aceptar. En lo que se refiere a la TRI, la aceptación de esta hipótesis no plantea excesivos problemas en proyectos uniperiodo (véase Gómez-Bezares, 1991, pág. 114; y también, en relación con todo lo aquí tratado, el Apéndice C), pero el tema se complica en proyectos multiperiodo (aunque puede también aceptarse la hipótesis de normalidad bajo determinadas condiciones; puede verse a este respecto el Apéndice D). Si la utilización de la TRIP se circunscribe al análisis de la *performance* de títulos y carteras en bolsa, lo anterior tampoco es grave, ya que la propia Teoría de cartera y los modelos que se construyen a partir de ella suponen proyectos uniperiodo; lo que permite superar también otros problemas importantes de la TRI, incluso en ambiente de certeza. Sin embargo, pensamos que la TRIP puede ser también de utilidad para el análisis de inversiones en la empresa, y más en concreto, en PYMES, y en este contexto es habitual encontrar proyectos con varios periodos. Una posible solución consiste en "transformar" el proyecto multiperiodo en otro uniperiodo, capitalizando hasta el año n (vida útil) las generaciones de fondos esperadas de cada año al tipo k, y calculando la TRI de este nuevo proyecto transformado: es lo que algunos llaman Tasa de Rentabilidad Interna Modificada -TRIM- (puede verse a este respecto Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 1995). En el resto del artículo hablaremos de E (TRI) o TRI esperada en el sentido apuntado, es decir, suponiendo que el proyecto

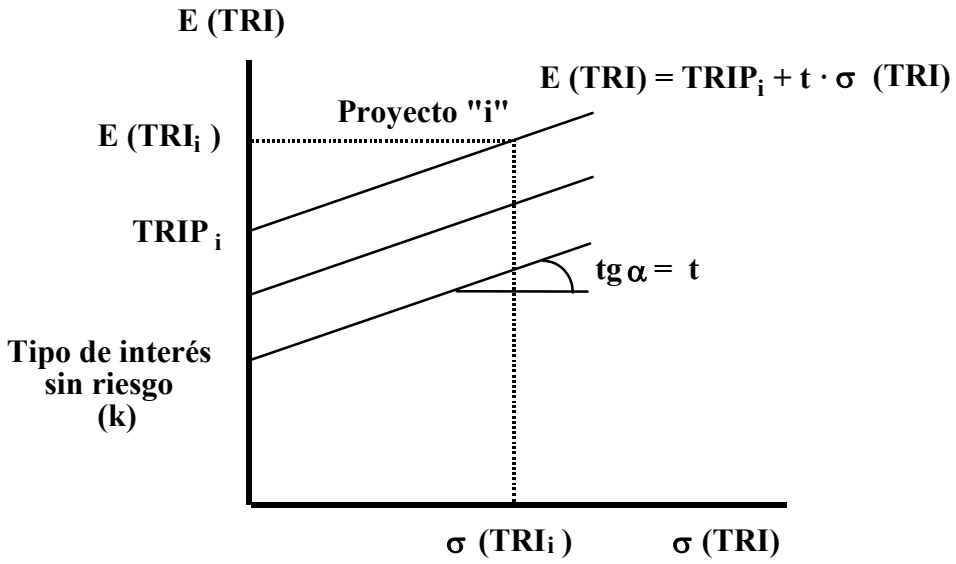


Figura 4

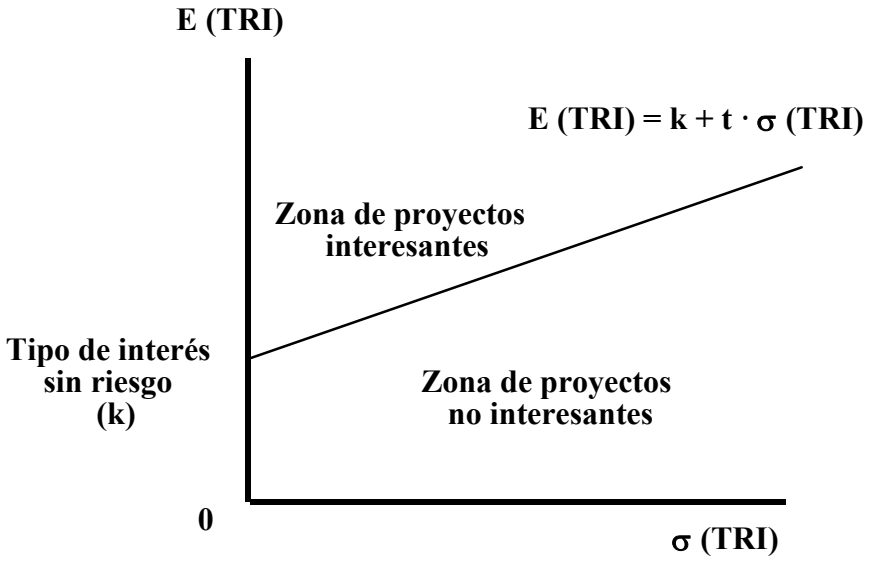


Figura 5

analizado es uniperiodo (o lo hemos convertido previamente en uniperiodo), en cuyo caso coinciden la TRI esperada y la TRI calculada a partir de las generaciones de fondos esperadas y resulta sencillo aceptar la hipótesis de normalidad que requiere la interpretación propuesta para el parámetro t en términos de garantía asociada a la TRIP (desapareciendo también otros problemas de la TRI y que ya han sido comentados). En el Apéndice C se amplían y justifican con mayor rigor algunos de los elementos aquí apuntados.

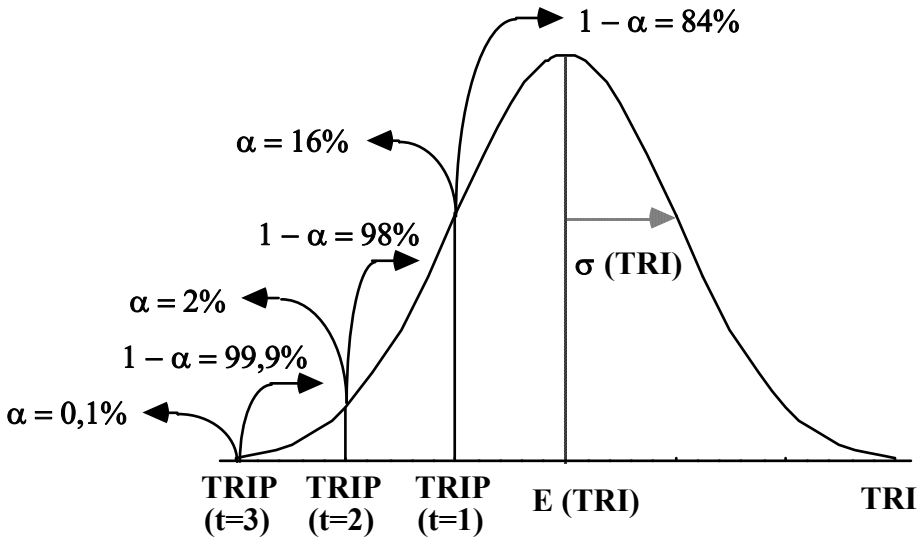


Figura 6

4. UNA BREVÍSIMA REFERENCIA A LA TEORÍA DE CARTERA Y AL CAPM

La Teoría de cartera de Markowitz[9] parte de una serie de hipótesis simplificadoras de la realidad, de entre las que cabe destacar:

- Se suponen mercados perfectos, en los que la información es pública y disponible para todos los agentes.
- Se considera un único horizonte temporal idéntico para todos los agentes, que tienen expectativas homogéneas respecto a las implicaciones que dicha información tiene sobre el rendimiento y el riesgo de los activos.
- Existe un tipo de interés sin riesgo al que los agentes pueden prestar y pedir prestado de manera ilimitada.
- En sus decisiones, los individuos se comportan como enemigos del riesgo, tratan de maximizar su utilidad, y se fijan sólo en el promedio y riesgo del rendimiento (medidos por μ y σ).

[9] Una exposición sencilla e intuitiva de este modelo (y del CAPM que comentaremos después) puede encontrarse en Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (1994).

En estas condiciones, puede demostrarse que la "frontera eficiente", es decir, la parte del "mapa de oportunidades posibles" (formado por todas las combinaciones de promedio y riesgo alcanzables por los individuos a partir de los títulos y carteras existentes en el mercado) que cumple la propiedad de dar el máximo promedio para cada nivel de riesgo y el mínimo riesgo para cada promedio de rentabilidad, es una recta en el mapa $\mu-\sigma$ (véase la figura 7). Esta recta, llamada Línea del Mercado de Capitales (LMC), es la recta tangente al mapa de oportunidades posibles formado por los títulos y carteras con riesgo que nace del tipo de interés sin riesgo. Y en ella se situarán todos los individuos. En estas condiciones, cuando el mercado ha llegado al equilibrio, el punto de tangencia es lo que llamamos cartera de mercado (R^*), ya que todos los individuos que inviertan en títulos con riesgo lo harán en las proporciones dadas por dicha cartera (donde están todos los títulos que cotizan en el mercado y en las proporciones que tienen en él; esta cartera suele aproximarse con un índice de mercado). Y se cumplirá el Teorema de la separación de Tobin, según el cual las preferencias de los individuos no intervienen en la composición de su cartera con riesgo, sino únicamente en el peso que ésta tendrá en la cartera total del individuo, que siempre invertirá en una combinación de título sin riesgo y cartera de mercado. La ecuación de la LMC es la siguiente:

$$\text{LMC}: \quad \mu_i = r_0 + \frac{\mu^* - r_0}{\sigma^*} \cdot \sigma_i \qquad [6]$$

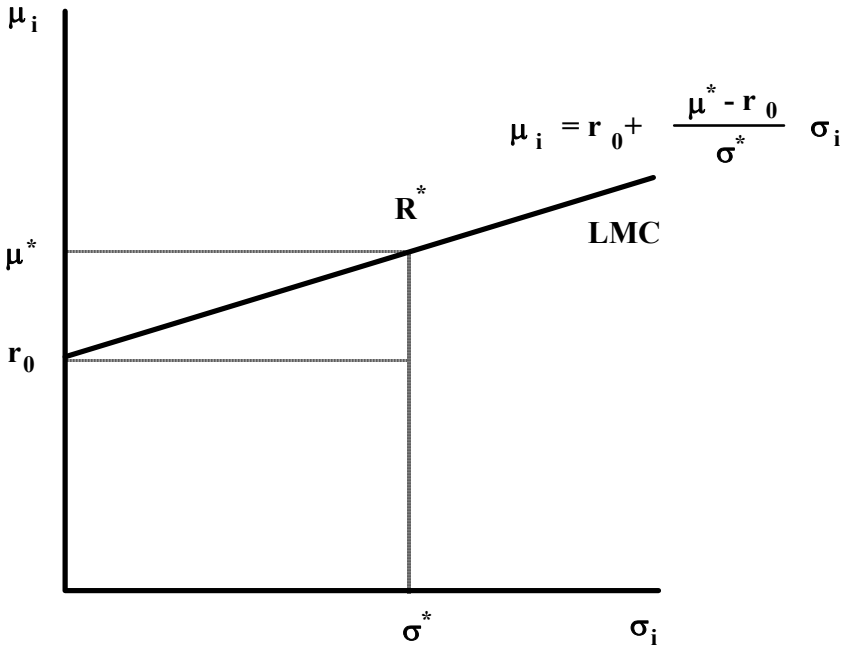


Figura 7

donde:

μ_i Rentabilidad esperada del título o cartera "i"

r_0 Tipo de interés sin riesgo

μ^* Rentabilidad esperada de la cartera de mercado

σ_i Riesgo total estimado (medido con la desviación típica de rentabilidad) del título o cartera "i"

σ^* Riesgo total estimado (medido con la desviación típica de la rentabilidad) asociado a la cartera de mercado

Partiendo de lo anterior, Sharpe introduce dos hipótesis simplificadoras adicionales[10] y llega al Modelo de mercado, en el que se establece una relación lineal entre las rentabilidades de cada título o cartera y el mercado. Y permite distinguir dos tipos diferentes de riesgo: el sistemático, relacionado con la marcha general de la economía, y el diversificable, que como su nombre indica puede ser eliminado mediante una adecuada diversificación. En el Modelo de mercado se estima la cantidad de riesgo sistemático, siendo la beta (pendiente de la recta que mejor ajusta la nube de puntos correspondiente a las rentabilidades del título o cartera y el mercado) la medida de dicho riesgo sistemático de los títulos y carteras.

Sobre la base de lo anterior, el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) deduce la relación entre la rentabilidad de los títulos y su riesgo sistemático (el único relevante y que será retribuido, ya que el modelo considera que los títulos se incorporarán a una cartera convenientemente diversificada, por lo que sólo aportan riesgo sistemático), que en las condiciones del modelo será lineal (véase la figura 8). Así, en equilibrio, todos los títulos y carteras deberían situarse en la Línea del Mercado de Títulos (LMT):

$$\text{LMT:} \quad \mu_i = r_0 + (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [7]$$

donde:

β_i Medida del riesgo sistemático (propuesta por el CAPM) del título o cartera "i"

Es fácil relacionar el CAPM con los criterios clásicos de tratamiento del riesgo, pudiendo estimarse tanto la prima de riesgo propuesta por el "ajuste del tipo de descuento" como los coeficientes correctores que propone el "equivalente de certeza" de manera coherente con el modelo[11].

5. MEDIDAS CLÁSICAS DE *PERFORMANCE*

Presentaremos ahora las medidas clásicas de *performance* utilizadas habitualmente en el estudio del desempeño de los títulos y carteras en bolsa. En todos los casos, se trata de recoger la

[10] En un intento de reducir los cálculos necesarios para aplicar la Teoría de cartera de Markowitz, y cuyo cumplimiento no es imprescindible para que se mantengan las conclusiones fundamentales del CAPM.

[11] Puede verse, por ejemplo, en Gómez-Bezares (1991, págs. 172 y ss).

idea de que las rentabilidades obtenidas por los títulos o carteras no son directamente comparables, ya que los riesgos asumidos pueden haber sido diferentes. Y las diferencias entre las distintas medidas están precisamente en el riesgo que consideran relevante, así como en la manera de medir la forma de batir al mercado[12].

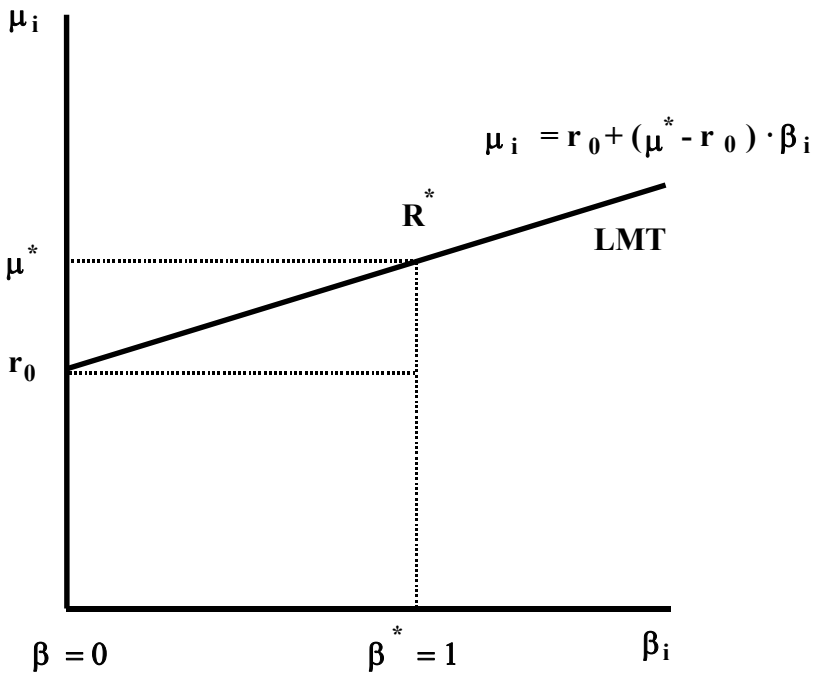


Figura 8

• **Índice de Sharpe**[13]**:**

$$S_i = \frac{\mu_i - r_0}{\sigma_i} \qquad [8]$$

donde:

S_i Índice de Sharpe asociado al título o cartera "i"

μ_i Promedio de rentabilidad obtenido por el título o cartera "i"

r_0 Tipo de interés sin riesgo

σ_i Riesgo total (medido con la desviación típica de rentabilidad) del título o cartera "i"

[12] A lo largo de toda la exposición supondremos, como es normal, que μ^* es mayor que r_0, lo que evidentemente tiene que ser cierto al menos a priori, aunque no necesariamente a posteriori. En el caso de encontrarnos en la situación contraria ($\mu^* < r_0$) puede consultarse Ferruz y Sarto (1997), trabajo en el que se realizan algunas matizaciones a los índices clásicos de *performance* relacionadas con este tema y que pueden resultar de interés.

[13] Sharpe (1966).

Como puede verse, el índice de Sharpe calcula el premio de rentabilidad obtenido por el título o cartera por unidad de riesgo total medido por la desviación típica de rentabilidad.

• Índice de Treynor[14]**:**

$$T_i = \frac{\mu_i - r_0}{\beta_i} \qquad [9]$$

donde:

T_i Índice de Treynor asociado al título o cartera "i"

β_i Medida del riesgo sistemático (propuesta por el CAPM) del título o cartera "i"

Como puede verse, el índice de Treynor calcula el premio de rentabilidad obtenido por el título o cartera por unidad de riesgo sistemático soportado medido por beta.

• Índice de Jensen[15]**:**

$$J_i = (\mu_i - r_0) - (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [10]$$

donde:

J_i Índice de Jensen asociado al título o cartera "i"

μ^* Promedio de rentabilidad obtenido por la cartera de mercado

Como puede verse, el índice de Jensen calcula la diferencia entre el exceso de rentabilidad obtenido por el título o cartera "i" con respecto al título sin riesgo y el exceso que debería haber obtenido según el CAPM.

• Índice de Jensen dividido por beta:

$$\frac{J_i}{\beta_i} = \frac{(\mu_i - r_0)}{\beta_i} - \frac{(\mu^* - r_0) \cdot \beta_i}{\beta_i} = T_i - T^* \qquad [11]$$

---

[14] Treynor (1965).

[15] Jensen (1968 y 1969).

donde:

J_i / β_i Índice de Jensen dividido por beta asociado al título o cartera "i"

T^* Índice de Treynor asociado a la cartera de mercado

Como puede verse, el índice de Jensen relativizado por beta calcula la diferencia entre el premio por unidad de riesgo sistemático (medido por beta) obtenido por el título o cartera "i" y el asociado a la cartera de mercado. Puede también verse que es en realidad la diferencia entre los índices de Treynor asociados al título o cartera "i" y al mercado.

6. COMPARACIÓN ENTRE LAS MEDIDAS DE *PERFORMANCE* CLÁSICAS Y LA TRIP

6.1. Índice de Sharpe vs TRIP

El índice de Sharpe analiza el interés de los títulos o carteras en función del premio que dan relativizado por su riesgo total medido por la desviación típica de rendimiento. Considera que un título o cartera bate al mercado cuando el premio por unidad de riesgo total es superior al conseguido por dicho mercado (lo que puede ocurrir por ineficiencias del mercado, porque se producen diferencias entre los comportamientos de los títulos y carteras "a priori" y "a posteriori", etc.). Dicho de otro modo, el índice de Sharpe mide la pendiente de la recta que en el mapa $\mu-\sigma$ une el tipo de interés sin riesgo con el comportamiento del título o cartera analizado, y considera que los títulos y carteras interesantes son los que se sitúan por encima de la Línea del Mercado de Capitales -LMC- (es decir, aquellos en los que la pendiente de la recta descrita anteriormente es superior a la de la propia LMC). Puede verse todo ello en la figura 9.

La TRIP propone calcular la ordenada en el origen de la recta de pendiente "t" en la que cada título o cartera permite situarse. En el contexto de la Teoría de cartera, definiremos dicha "t" como la pendiente de la LMC. Así:

$$\text{TRIP}_i \text{ (coherente con el índice de Sharpe)} = \mu_i - t \cdot \sigma_i = \mu_i - \frac{\mu^* - r_0}{\sigma^*} \cdot \sigma_i \qquad [12]$$

Serán interesantes aquellos títulos o carteras que permitan situarse en una recta (paralela) superior a la propia LMC (véase la figura 10). Efectivamente, recordemos que la interpretación teórica de la TRIP nos lleva a razonar en términos "equivalentes ciertos", lo que supone, en el contexto de la Teoría de cartera, y en las condiciones que hemos descrito, que el rendimiento de la cartera de mercado (sujeta a riesgo) reporta la misma utilidad que el tipo de interés sin riesgo.

Esto naturalmente no tiene por qué ser así para todos los individuos, de hecho algunos preferirán, en función de su grado de aversión al riesgo, invertir toda su riqueza en título sin riesgo, mientras que otros lo harán en la cartera de mercado (siendo también posibles las infinitas combinaciones entre título sin riesgo y cartera de mercado, que los individuos podrán elegir en función de sus preferencias). Pero lo que es cierto es que el mercado se ha puesto de acuerdo, en la situación descrita, en premiar de esa manera la asunción de riesgos. Es decir, la sociedad en su conjunto premia la asunción de riesgos (totales) en términos de la pendiente de la LMC.

Así, y apelando a la interpretación de "t" propuesta por la TRIP, la pendiente de la LMC nos indicaría el nivel de garantía exigido a la rentabilidad que se toma como referencia para el análisis del interés de los títulos o carteras analizados (la propia TRIP).

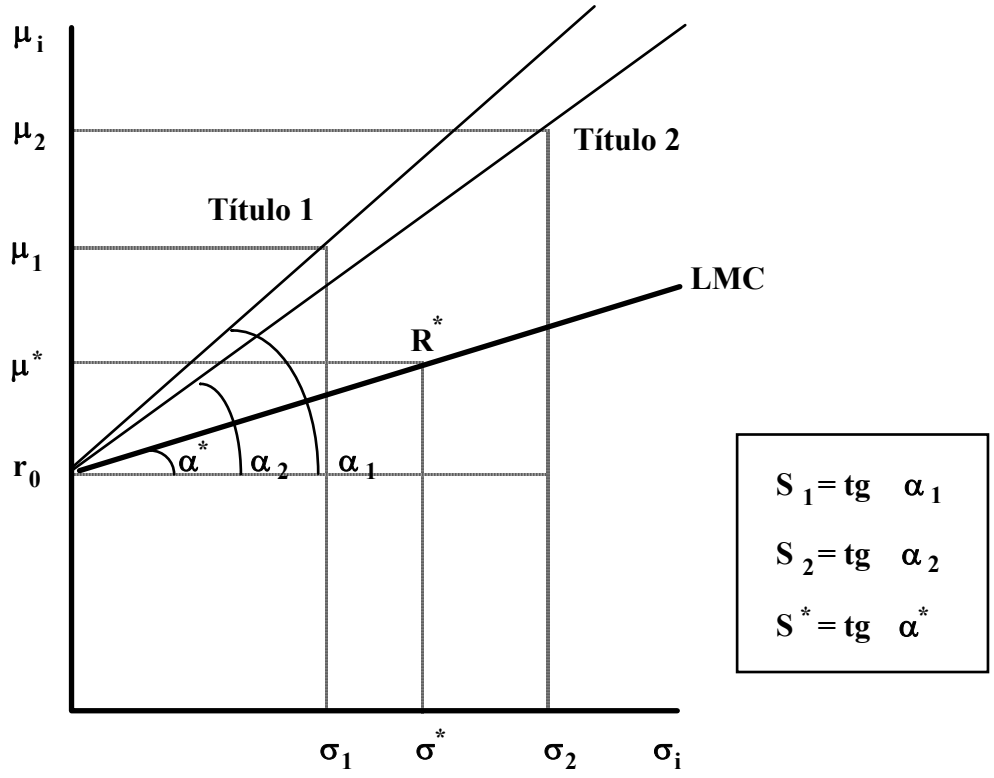


Figura 9

Como puede verse, el índice de Sharpe y la TRIP no pueden discrepar a la hora de juzgar un título o cartera como interesante, ya que ello exige para los dos criterios que el título o cartera en cuestión se sitúe por encima de la LMC. Sin embargo, y tal como puede verse en las figuras 9 y 10, pueden discrepar a la hora de jerarquizar el interés de los títulos o carteras analizados. Así, en nuestro ejemplo, tanto el "1" como el "2" son títulos que baten al mercado, pero para el índice de Sharpe resulta más interesante el título "1", que proporciona un premio por unidad de riesgo total superior al que da el "2"; mientras que para la TRIP, el título "2" resulta ser más interesante, ya que permite situarse al individuo en una "recta" de indiferencia más alejada del origen de coordenadas. O dicho de otro modo, la rentabilidad equivalente cierta asociada al título "2" es mayor que la del título "1", supuesto un nivel de garantía para determinar esos

equivalentes ciertos dado por el mercado (la probabilidad asociada a "t", entendida en este caso como pendiente de la LMC).

En ambos casos se está considerando como relevante el riesgo total. Es decir, este planteamiento será tanto más interesante cuando las carteras que estamos "juzgando" tienen vocación de diversificación, a diferencia de las que no la tienen (por ejemplo, carteras sectoriales).

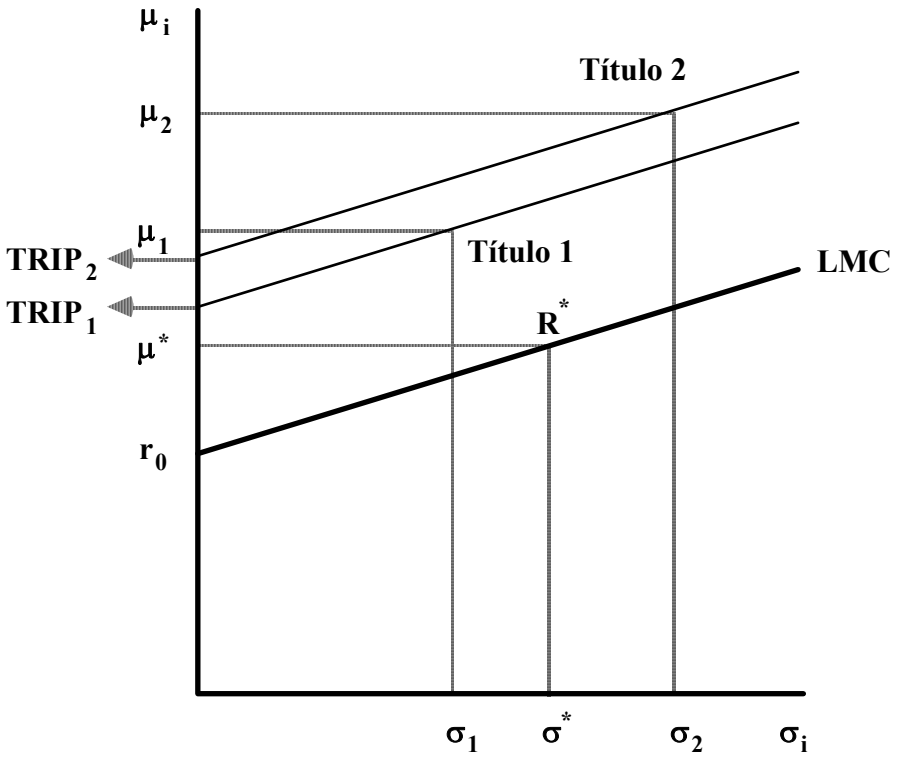


Figura 10

El hecho de elegir una medida u otra depende de lo que el analista considere más conveniente: si busca minimizar la probabilidad de obtener una rentabilidad inferior al tipo de interés sin riesgo optará por el índice de Sharpe; mientras que si considera más importante elegir aquellos títulos o carteras con una mayor rentabilidad garantizada, con una probabilidad que se considera suficiente, lo hará por la TRIP.

Lo anterior permite ligar la TRIP con la Teoría de cartera, viendo la coherencia de ambos sistemas. Podemos relacionar esto con la discusión centrada en el VAP, cuando podía optarse por diferentes modos de realizar la penalización. Nosotros hemos optado siempre por la penalización lineal, ya que hacer el cociente μ/σ (de VAN), que implícitamente busca y valora como mejores aquellos proyectos cuya probabilidad de obtener pérdida sea menor, supone despreciar el resto de la información recogida en la distribución de resultado, centrándose sólo en "lo malo" del proyecto (posibilidad de perder) y despreciando otros aspectos interesantes (véase nuevamente el Apéndice B).

Por todo ello, y de manera coherente con lo dicho para el VAP, nosotros optaríamos por el índice TRIP (utilizando como parámetro de penalización la "t" entendida como pendiente de la LMC) frente al índice de Sharpe en aquellos casos en los que el riesgo total sea el relevante.

6.2. Índice de Treynor vs TRIP

El índice de Treynor valora los distintos títulos o carteras en función del premio por unidad de riesgo que otorgan a su propietario, considerando como relevante únicamente el riesgo sistemático. Lo anterior lo hace coherente con las ideas propuestas por el CAPM, según el cual los títulos y carteras deberían rendir en función de su riesgo sistemático. Como es sabido, el modelo propone que, en equilibrio, todos los títulos y carteras deberían cumplir la ecuación fundamental del CAPM, es decir, todos deberían situarse en la LMT:

$$\text{LMT:} \quad \mu_i = r_0 + (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [7]$$

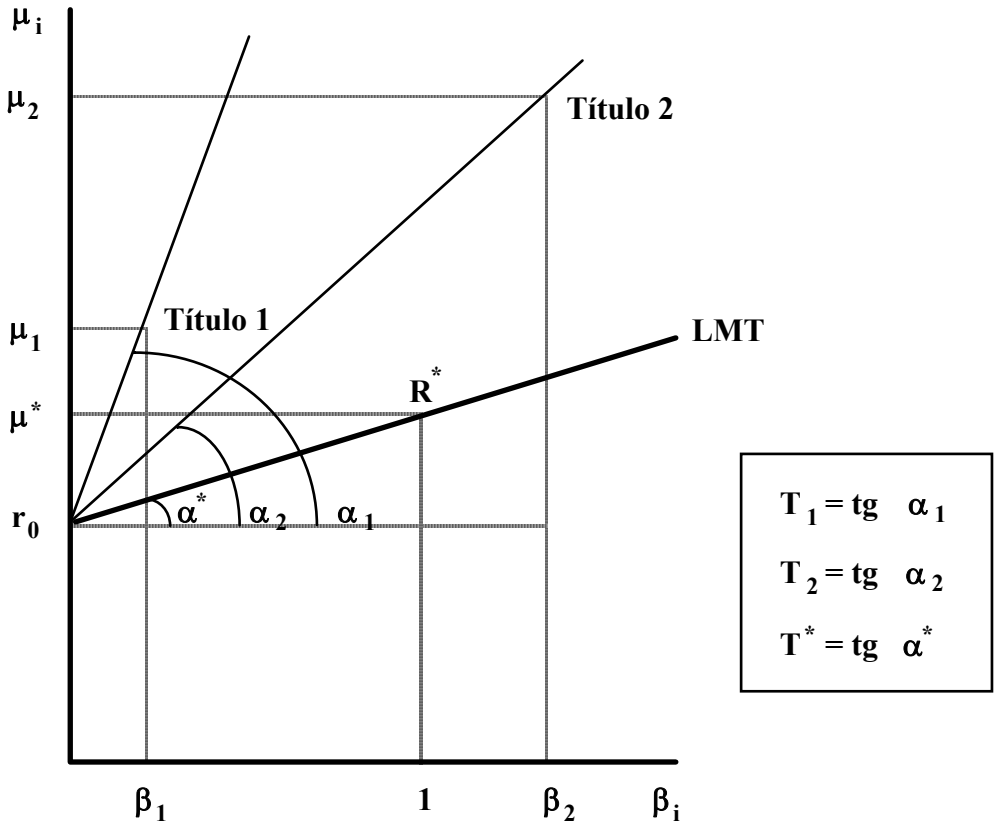


Figura 11

Es decir, según el modelo, el premio de rentabilidad por unidad de riesgo sistemático medido por beta debería ser $(\mu^* - r_0)$. El índice de Treynor mide el premio conseguido por los títulos o

carteras por unidad de riesgo sistemático soportado, y considera que son interesantes aquellos títulos o carteras que presentan un premio mayor que el propuesto por el modelo. Dicho de otra forma, y tal como puede verse en la figura 11, el índice de Treynor mide, en el mapa μ–β, la pendiente de la recta que une el tipo de interés sin riesgo con el comportamiento del título o cartera en cuestión, considerando que es interesante cuando bate al mercado, es decir, cuando la pendiente de dicha recta es superior a la de la LMT. Serán, por tanto, interesantes, aquellos títulos o carteras que queden por encima de la LMT, lo cual es perfectamente coherente con lo propuesto por el CAPM.

Frente al anterior, el concepto de la TRIP, trasladado al mapa μ–β, mediría la ordenada en el origen de la recta de pendiente idéntica a la LMT en la que un título o cartera permite situarse al individuo (véase figura 12):

$$TRIP_i \text{ (coherente con el Índice de Treynor)} = \mu_i - t' \cdot \beta_i = \mu_i - (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [13]$$

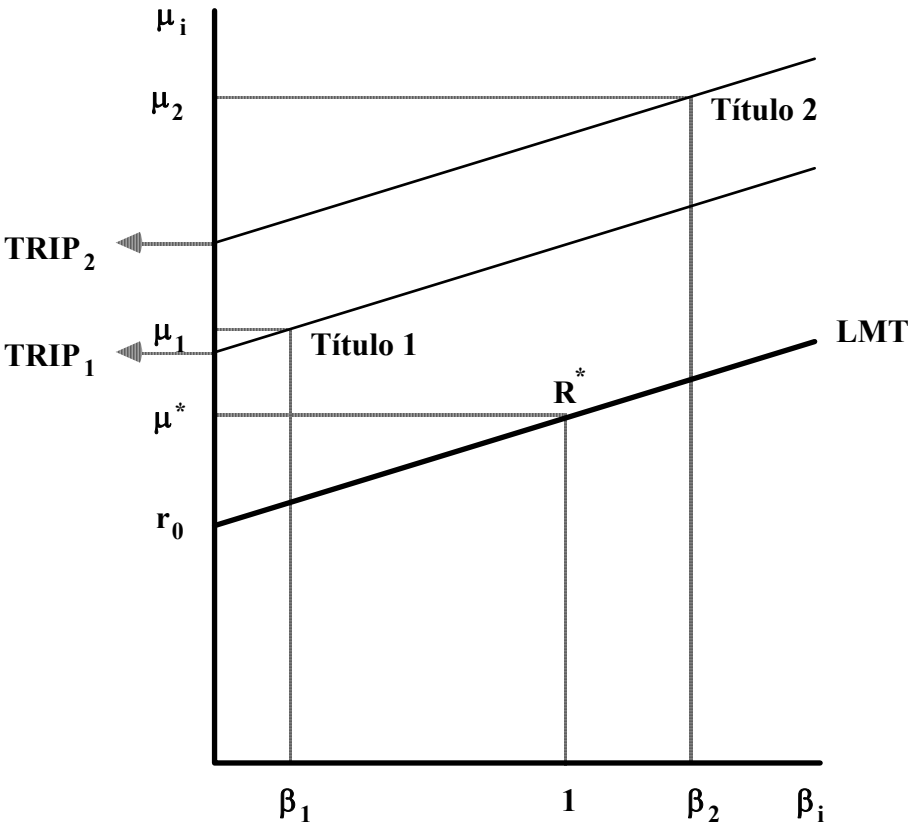


Figura 12

El único problema es que ahora la t' (pendiente de la LMT) pierde la interpretación anterior (en términos de garantía del valor tomado como referencia), dado que la penalización ya no se

hace en función de la desviación típica, sino del riesgo sistemático (luego volveremos sobre ello). Pero puede seguir manteniéndose la interpretación de equivalentes ciertos.

Los dos criterios son consistentes a la hora de determinar los títulos y carteras interesantes: son todos aquellos que se sitúen por encima de la LMT (o dicho de otro modo, los que rinden más que lo que deben, en este caso en función de lo que dice el CAPM). Pero pueden discrepar a la hora de jerarquizar, tal como puede verse en las figuras 11 y 12. Efectivamente, el índice de Treynor considera más interesantes aquellos títulos o carteras que, batiendo al mercado, conceden un mayor premio por unidad de riesgo sistemático. Mientras que la TRIP definida en este punto considera mejores aquellos que permiten conseguir una rentabilidad equivalente cierta (donde la relación de equivalencia viene dada por la pendiente de la LMT) superior (siempre que sea mayor que la del título sin riesgo).

6.3. Índice de Jensen vs TRIP

El índice de Jensen mide la diferencia que hay entre el exceso de rentabilidad ofrecido por el título o cartera analizado con respecto al título sin riesgo (premio conseguido) y el premio por riesgo que según el CAPM debería haber conseguido. Recordemos una vez más la ecuación fundamental del CAPM, recogida en la LMT:

$$\mu_i = r_0 + (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [7]$$

Si en la ecuación anterior pasamos el rendimiento del título sin riesgo al primer miembro tenemos:

$$\mu_i - r_0 = (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [14]$$

donde μ_i es todavía lo que el título "debería haber dado", y por tanto [14] es el exceso sobre el tipo sin riesgo que el título "debería haber dado". El índice de Jensen se formula como:

$$J_i = (\mu_i - r_0) - (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [10]$$

donde ahora μ_i es la rentabilidad promedio asociada al título. Puede presentarse de manera más clara:

$$J_i = \mu_i - [r_0 + (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i] \qquad [15]$$

Como puede verse, el índice de Jensen mide la diferencia, en vertical, entre la rentabilidad dada por el título o cartera y la que según la ecuación fundamental del CAPM, la LMT, debería haber dado. Es decir, hace exactamente lo que proponíamos en el punto anterior al trabajar con la TRIP definida en el mapa μ–β: las únicas diferencias entre ambos criterios son puramente formales, en el sentido de que el índice de Jensen incorpora directamente la comparación con el mercado (si es positivo, el título o cartera es interesante, y lo es tanto más cuanto mayor sea) y la TRIP debe compararse con el tipo sin riesgo, siendo mejores los títulos y carteras que presenten una mayor diferencia (positiva) con él; y por otro lado, el índice de Jensen mide la diferencia en el propio punto, mientras que la TRIP lo hace en el eje de ordenadas (puede verse todo ello en la figura 13). Es decir, los dos criterios son conceptualmente idénticos, por lo que podríamos decir que la TRIP no aporta nada sobre el índice de Jensen, simplemente nos permite realizar una interpretación de lo que estamos haciendo, coherente con el concepto de equivalente cierto.

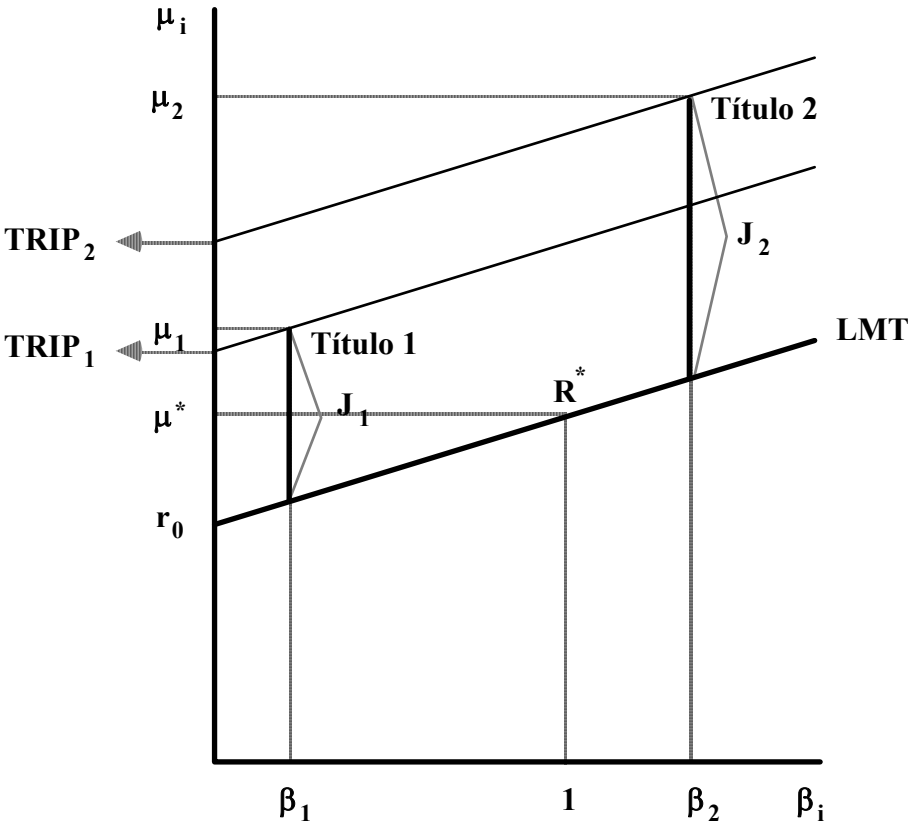


Figura 13

6.4. Índice de Jensen relativizado por beta vs TRIP

El índice de Jensen relativizado por beta coincide con la diferencia entre los índices de Treynor del título o cartera analizado y el mercado. Efectivamente, el índice de Jensen dividido por beta trata de relativizar la información dada por el índice de Jensen, haciendo que la

diferencia entre el premio que el título da y el que debería haber dado se vea relativizada por el riesgo sistemático asumido. Veámoslo matemáticamente:

$$J_i = (\mu_i - r_0) - (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i \qquad [10]$$

$$\frac{J_i}{\beta_i} = \frac{(\mu_i - r_0)}{\beta_i} - \frac{(\mu^* - r_0) \cdot \beta_i}{\beta_i} = \frac{(\mu_i - r_0)}{\beta_i} - \frac{(\mu^* - r_0)}{1} = T_i - T^* \qquad [11]$$

Recordemos la interpretación que dábamos anteriormente al índice de Treynor. Tal como veíamos entonces, este índice mide la pendiente de la recta que nace del tipo de interés sin riesgo y pasa por el comportamiento, en términos de μ–β, del título o cartera analizado. Por lo tanto, lo único que aporta el índice de Jensen relativizado por beta frente al de Treynor es realizar la comparación entre el comportamiento del título o cartera analizado y el mercado, dándonos la diferencia de pendiente existente entre ambos. Es decir, nos indica la diferencia que hay entre el premio por unidad de riesgo sistemático ofrecido por el título o cartera analizado y el ofrecido por el mercado.

7. UN INTENTO DE LIGAR EL PARÁMETRO DE PENALIZACIÓN DE LA TRIP COHERENTE CON TREYNOR (MAPA μ–β) CON LA IDEA DE MÍNIMO GARANTIZADO

Como hemos dicho, la interpretación original dada por la TRIP en lo que se refiere al parámetro de penalización "t" sería el nivel de garantía exigido por el analista para el valor tomado como referencia (en el mapa μ–σ). Como hemos visto, es fácil ligar el índice de Sharpe con la TRIP, interpretando la pendiente de la LMC como el parámetro de penalización "t", que fijaría para este último criterio el nivel de garantía que sería aceptable por el analista. También en el caso del índice de Treynor la ligazón con el concepto de equivalente cierto que se encuentra detrás de la TRIP es sencilla, pero en este caso perdemos la interpretación propuesta por TRIP para el parámetro de penalización t'. Y la diferencia entre los índices de Treynor y Jensen sería la que existe entre el índice de Sharpe y la TRIP en su versión primigenia (en el mapa μ–σ, donde el parámetro "t" coincide con la pendiente de la LMC).

Lo que intentaremos en este punto es estudiar la interpretación de la pendiente de la LMT en términos de sus implicaciones para el riesgo total, y por tanto, del nivel de garantía exigido implícitamente en el índice de Jensen (o en la TRIP definida de manera coherente con el índice de Treynor). Recordemos primero algunas fórmulas:

$$\beta_i = \frac{COV(R_i, R^*)}{(\sigma^*)^2} \qquad [16]$$

$$\rho_{i,m} = \frac{COV(R_i, R^*)}{\sigma_i \cdot \sigma^*} \quad [17]$$

$$\beta_i = \frac{\rho_{i,m} \cdot \sigma_i \cdot \sigma^*}{(\sigma^*)^2} = \rho_{i,m} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma^*} \quad [18]$$

donde:

$COV(R_i,R^*)$ Covarianza entre las rentabilidades del título o cartera "i" y el mercado

$\rho_{i,m}$ Coeficiente de correlación de Pearson entre las rentabilidades del título o cartera "i" y el mercado

La "t" que está implícita en el índice de Jensen es la pendiente de la LMT (es la t' que utilizaríamos en la versión de TRIP coherente con la consideración del riesgo sistemático en lugar del total). Así:

$$t' = \mu^* - r_0 \quad [19]$$

y al aplicar el concepto TRIP a un título o cartera, lo que hacemos es:

$$TRIP_i = \mu_i - t' \cdot \beta_i \quad [13]$$

$$TRIP_i = \mu_i - (\mu^* - r_0) \cdot \rho_{i,m} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma^*} \quad [20]$$

$$TRIP_i = \mu_i - \frac{(\mu^* - r_0)}{\sigma^*} \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i \quad [21]$$

Puede verse que la penalización es igual que en el caso de la TRIP propuesta anteriormente de manera coherente con el índice de Sharpe, salvo que ahora el parámetro "t" se ve multiplicado por una cifra $\rho_{i,m}$, evidentemente menor o igual que la unidad en términos absolutos. ¿Qué significa lo anterior? Varias cosas:

- En primer lugar, que supuesta correlación positiva entre el título (o cartera) y el mercado, la penalización entendida como nivel de garantía exigido va a ser tanto menor cuanto menor sea la relación entre el título y el mercado. Es decir, sólo en el caso de que la correlación fuera perfecta, la penalización (y el grado de garantía exigido) coincidiría con la de la TRIP coherente con el índice de

Sharpe. Y si la relación fuera negativa, la penalización sería negativa, es decir, el equivalente cierto sería superior a la rentabilidad esperada (títulos que van contra el mercado, que son especialmente interesantes porque permiten reducir el riesgo sistemático).

- En segundo lugar, que la garantía exigida a cada título (o cartera) ya no es la misma, sino que depende de la cantidad de riesgo sistemático asociado al título. Pero podemos siempre interpretar el parámetro de penalización (que hemos llamado t', para distinguirlo del anterior) en términos de nivel de garantía exigido. En general, a mayor "t" mayor nivel de garantía (mayor 1-α, siendo α la probabilidad que queda a la izquierda del valor tomado como referencia); ahora, supuesta una "t" dada por la pendiente de la LMC, el CAPM lo que haría sería relativizar ese nivel de garantía en función del grado de relación con el mercado. Puede parecer que los títulos con beta superior a la unidad no se ven muy penalizados, y ello tampoco es cierto, ya que para que la beta sea superior a uno, el producto de correlación x desviación típica del título debe ser mayor que la desviación típica del mercado. Es decir, es algo que se tiene en cuenta (aunque más escondido) en la propia fórmula.

8. CONCLUSIONES

El objetivo del artículo radica en presentar y justificar el interés de una medida alternativa a las utilizadas tradicionalmente a la hora de evaluar la *performance* de títulos y carteras (y fondos) en bolsa. Así, frente a índices clásicos como el de Sharpe, Treynor y Jensen, la TRIP puede resultar una medida de interés en determinadas condiciones. Hemos visto la justificación teórica del criterio, la TRIP puede entenderse como una medida de utilidad, y también en términos de rentabilidad equivalente cierta; por otro lado, el parámetro de penalización utilizado en la TRIP en el caso de considerar como relevante el riesgo total del título o cartera analizada está relacionado con el nivel de garantía exigido a la tasa que se toma como referencia (la propia TRIP), siempre que pueda aceptarse la normalidad de la distribución de la TRI (hipótesis justificable bajo determinadas condiciones).

En lo que se refiere a la coherencia del criterio TRIP con las medidas clásicas de *performance*, hemos comprobado que es total a la hora de determinar si el título o cartera bate o no al mercado, pero pueden aparecer discrepancias entre las jerarquizaciones dadas por los diferentes criterios, y entre éstos y la TRIP. En el artículo hemos profundizado en las causas que explican tales discrepancias, indicando en qué casos entendemos que la TRIP puede resultar un mejor criterio que los índices clásicos.

El análisis comparativo de las diferentes medidas lo hemos realizado desde la óptica de la Teoría de Cartera de Markowitz, y hemos conectado el criterio de la TRIP con tales desarrollos. De esta manera, es fácil determinar el parámetro de penalización "t" que exige la utilización de la TRIP de manera coherente con dicha Teoría de Cartera (en cuyo caso coincidiría con la

pendiente de la Línea del Mercado de Capitales), así como con el CAPM (en cuyo caso podría utilizarse la pendiente de la Línea del Mercado de Títulos).

Por otro lado, hemos ahondado también en la posibilidad de utilizar el criterio TRIP para proyectos empresariales. La justificación es clara en proyectos uniperiodo, en los que la hipótesis de normalidad de la TRI es fácil de aceptar; para proyectos multiperiodo, los más habituales en las decisiones empresariales, cabe aceptar la hipótesis de normalidad (en condiciones bastante restrictivas), o puede utilizarse la Tasa de Rentabilidad Interna Modificada, lo que permite superar también otros problemas que plantea la TRI.

En definitiva, se presenta un criterio que puede complementar a los criterios clásicos, que puede resultar de utilidad en proyectos de inversión empresarial, y a la vez, como medida complementaria de *performance* de títulos o carteras en bolsa, dando una perspectiva diferente de los índices clásicos, y con una interpretación coherente con los modernos desarrollos de la Teoría Financiera.

BIBLIOGRAFÍA

FERRUZ, L. y J.L. SARTO (1997): "Revisión crítica de las medidas clásicas de performance de carteras y propuesta de índices alternativos. Aplicación a fondos de inversión españoles (1990-1995)", *Boletín de Estudios Económicos*, Vol. LII, no. 162, Diciembre, págs. 549-573.

GOMEZ-BEZARES, F. (1984): "Algunos modelos básicos para la selección de inversiones con flujos relacionados", *XIV Congreso de la SEIO*, Caja de Ahorros de Granada, Granada, vol. 1, págs. 40-51.

GOMEZ-BEZARES, F. (1991): *Dirección financiera (teoría y aplicaciones)*, 2ª ed., Desclée de Brouwer, Bilbao.

GOMEZ-BEZARES, F. (1993): "Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions", en Aggarwal, ed., *Capital budgeting under uncertainty* (1993), Prentice - Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, págs. 91-102.

GOMEZ-BEZARES, F. (2002): *Las decisiones financieras en la práctica*, 8ª ed., Desclée de Brouwer, Bilbao.

GOMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBAÑEZ (1994): Valoración de acciones en la bolsa española (un análisis de la relación entre la rentabilidad y el riesgo), Desclée de Brouwer, Bilbao.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (1995): "VAN vs TRI: algunos ejemplos prácticos", *Harvard-Deusto Finanzas & Contabilidad*, 7, Septiembre-Octubre, págs. 48-58.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2001): "La decisión de inversión en entornos de riesgo", *Estudios Empresariales*, 107, Tercer Cuatrimestre, págs. 22-37.

JENSEN, M.C. (1968): "The performance of mutual funds in the period 1945-1964", *Journal of finance*, Mayo, págs. 389-416.

JENSEN, M.C. (1969): "Risk, the pricing of capital assets, and the evaluation of investment portfolios", *Journal of business*, Abril, págs. 167-247.

LAKA, J.P. y J. SANTIBAÑEZ (1995): "Algunas reflexiones sobre el Valor Actualizado Penalizado (VAP)", Comunicación presentada en el *III Foro de Finanzas*, Bilbao, Noviembre-Diciembre. Publicada en Gómez-Bezares, F. y J.V. Ugarte, ed., *III Foro de Finanzas (1995)*, Bilbao, págs. 75-91.

SANTIBAÑEZ, J. (1995): "El tratamiento del riesgo en la decisión de inversión: VAP y distribuciones no conocidas", *Boletín de Estudios Económicos*, 154, Abril, págs. 119-140.

SANTIBAÑEZ, J. y F. GOMEZ-BEZARES (1999): *Ejercicios de Teoría y Política Financiera*, Desclée de Brouwer, Bilbao.

SHARPE, W.F. (1966): "Mutual fund performance", *Journal of business*, Enero, págs. 119-138.

TREYNOR, J.L. (1965): "How to rate management of investment funds", *Harvard business review*, Enero-Febrero, págs. 63-75.

APÉNDICE A: ALGUNAS RELACIONES MATEMÁTICAS ENTRE LOS DIFERENTES ÍNDICES PROPUESTOS

• Relación entre el Índice de Treynor y el Índice de Sharpe

$$S_i = \frac{\mu_i - r_0}{\sigma_i}$$

$$T_i = \frac{\mu_i - r_0}{\beta_i}$$

$$\beta_i = \frac{COV\,(R_i, R^*)}{(\sigma^*)^2} \quad ; \qquad \rho_{i,m} = \frac{COV\,(R_i, R^*)}{\sigma_i \cdot \sigma^*} \quad \longrightarrow \quad \beta_i = \frac{\rho_{i,m} \cdot \sigma_i \cdot \sigma^*}{(\sigma^*)^2} = \rho_{i,m} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma^*}$$

$$T_i = \frac{\mu_i - r_0}{\beta_i} = \frac{\mu_i - r_0}{\frac{\rho_{i,m} \cdot \sigma_i}{\sigma^*}} = \frac{\mu_i - r_0}{\sigma_i} \cdot \frac{\sigma^*}{\rho_{i,m}} = S_i \cdot \frac{\sigma^*}{\rho_{i,m}}$$

$$T_i = S_i \cdot \frac{\sigma^*}{\rho_{i,m}} \qquad [A.1]$$

• Relación entre la TRIP (coherente con Sharpe) y el Índice de Sharpe

$$TRIP_i\,(Sharpe) = \mu_i - t \cdot \sigma_i = \mu_i - \frac{\mu^* - r_0}{\sigma^*} \cdot \sigma_i = \mu_i - S^* \cdot \sigma_i$$

$$TRIP_i\,(Sharpe) = \mu_i - S^* \cdot \sigma_i \qquad [A.2]$$

• Relación entre la TRIP (coherente con Treynor) y el Índice de Sharpe

$$TRIP_i\ (Treynor) = \mu_i - t' \cdot \beta_i = \mu_i - (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i = \mu_i - (\mu^* - r_0) \cdot \rho_{i,m} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma^*} =$$

$$= \mu_i - \frac{\mu^* - r_0}{\sigma^*} \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i = \mu_i - S^* \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i$$

$$TRIP_i\ (Treynor) = \mu_i - S^* \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i \qquad [A.3]$$

• Relación entre la TRIP (coherente con Sharpe) y la TRIP (coherente con Treynor)

$$TRIP_i\ (Sharpe) = \mu_i - S^* \cdot \sigma_i \quad \rightarrow \quad \mu_i = TRIP_i\ (Sharpe) + S^* \cdot \sigma_i$$

$$TRIP_i\ (Treynor) = \mu_i - S^* \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i \quad \rightarrow \quad \mu_i = TRIP_i\ (Treynor) + S^* \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i$$

$$TRIP_i\ (Sharpe) + S^* \cdot \sigma_i = TRIP_i\ (Treynor) + S^* \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i$$

$$TRIP_i\ (Treynor) = TRIP_i\ (Sharpe) + S^* \cdot \sigma_i \cdot (1 - \rho_{i,m}) \qquad [A.4]$$

• Relación entre el Índice de Jensen y el Índice de Sharpe

$$J_i = (\mu_i - r_0) - (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i =$$

$$= S_i \cdot \sigma_i - (\mu^* - r_0) \cdot \rho_{i,m} \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma^*} = S_i \cdot \sigma_i - \frac{\mu^* - r_0}{\sigma^*} \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i =$$

$$= S_i \cdot \sigma_i - S^* \cdot \rho_{i,m} \cdot \sigma_i = \sigma_i \cdot (S_i - S^* \cdot \rho_{i,m})$$

$$J_i = \sigma_i \cdot (S_i - S^* \cdot \rho_{i,m}) \qquad [A.5]$$

• Relación entre el Índice de Jensen y el Índice de Treynor

$$J_i = \sigma_i \cdot (S_i - S^* \cdot \rho_{i,m}) = \sigma_i \cdot (T_i \cdot \frac{\rho_{i,m}}{\sigma^*} - T^* \cdot \frac{1}{\sigma^*} \cdot \rho_{i,m}) =$$

$$= \frac{\sigma_i}{\sigma^*} \cdot \rho_{i,m} \cdot (T_i - T^*) = \beta_i \cdot (T_i - T^*)$$

$$J_i = \beta_i \cdot (T_i - T^*) \qquad [A.6]$$

Gráficamente, puede verse en la figura A.1

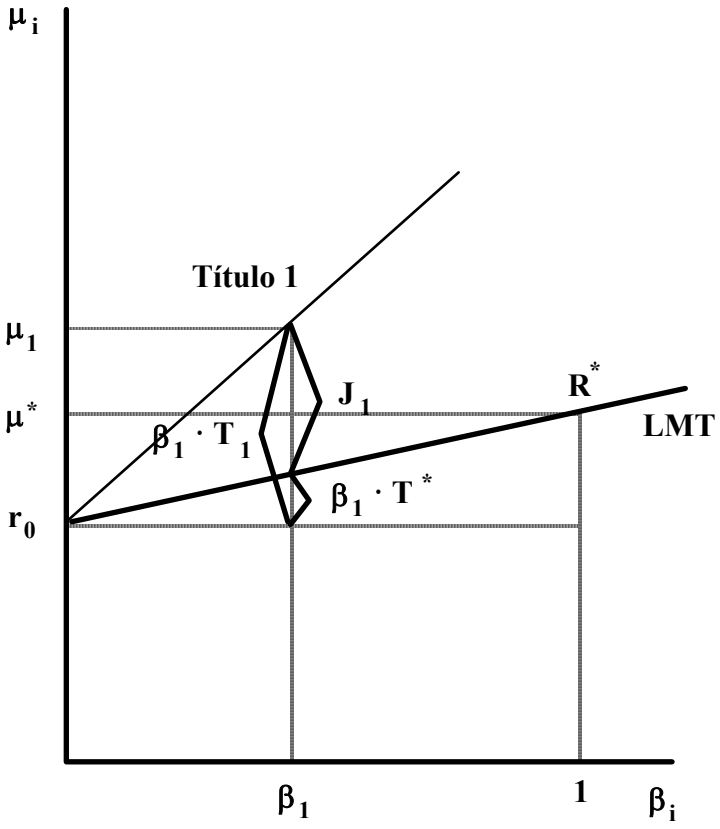


Figura A.1

• Relación entre el Índice de Jensen dividido por beta y el Índice de Sharpe

$$\frac{J_i}{\beta_i} = (T_i - T^*) = S_i \cdot \frac{\sigma^*}{\rho_{i,m}} - S^* \cdot \frac{\sigma^*}{1} = \sigma^* \cdot \left(\frac{1}{\rho_{i,m}} \cdot S_i - S^*\right)$$

$$\frac{J_i}{\beta_i} = \sigma^* \cdot \left(\frac{1}{\rho_{i,m}} \cdot S_i - S^*\right) \qquad [A.7]$$

APÉNDICE B: OTRAS FORMAS DE PENALIZACIÓN EN VAP Y TRIP

Hemos visto que el VAP propone penalizar directamente el promedio de VAN con su desviación típica. De entre las posibles formas de realizar esta penalización, hemos optado por la penalización lineal, aunque existen otras formas de hacerlo[16]. Nos centraremos ahora en la siguiente fórmula de penalización:

$$VAP = \frac{E\,(VAN)}{\sigma\,(VAN)} \qquad [B.1]$$

Si utilizamos la fórmula [B.1] para analizar el interés de los proyectos, nos estamos fijando en la probabilidad de pérdida asociada a los mismos. Efectivamente, supuesta normalidad en la distribución del VAN, la fórmula anterior supone preguntarse por el número de desviaciones típicas que el valor cero se aleja con respecto al promedio, por lo que tratar de maximizar el VAP así entendido supone buscar aquellos proyectos que minimizan la probabilidad de pérdida. Lo anterior puede verse gráficamente en la figura B.1.

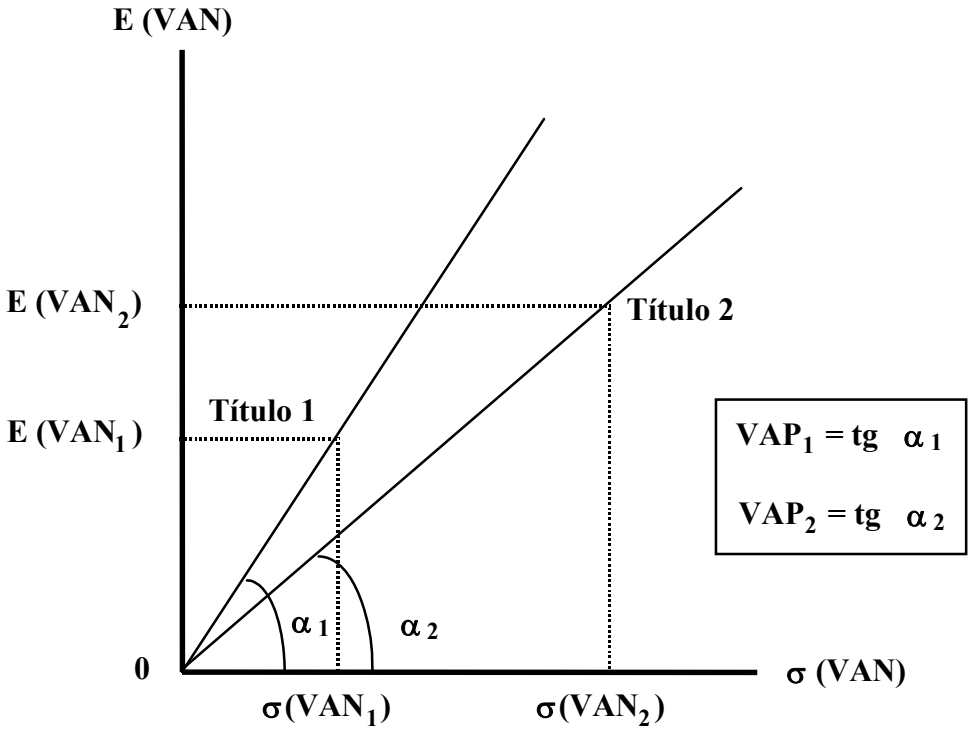


Figura B.1

[16] Puede verse a este respecto Gómez-Bezares, F. (2002): *Las decisiones financieras en la práctica*, 8ª ed., Desclée de Brouwer, Bilbao, págs. 286 y ss.

En el ejemplo que aparece en la figura B.1, el título "1" aparece como más interesante que el "2", ya que su probabilidad de obtener un VAN negativo es menor. Sin embargo, si optamos por la penalización lineal, el que se prefiera uno u otro título dependerá del valor de "t" elegido, pero en cualquier caso se tiene en cuenta algo más que la probabilidad de pérdida[17]. Así, si el individuo se comporta como poco enemigo del riesgo, el valor de "t" será bajo, y el título "2" aparecerá como más interesante que el "1", ya que el aumento de promedio de VAN que ofrece compensará suficientemente del aumento de riesgo que obliga a asumir (véase la figura B.2). Mientras que si la aversión al riesgo es mayor, el título "1" podrá llegar a ser preferido, en la medida en que permite asumir menor riesgo que el "2", no siendo suficiente el premio que éste último ofrece con respecto al primero en términos de promedio de VAN aportado para compensar el aumento de riesgo correspondiente (véase la figura B.3, en la que no sólo el título "1" resulta ser más interesante, sino que el "2" pasa a no ser interesante, ya que nos lleva a obtener un VAN equivalente cierto menor que cero).

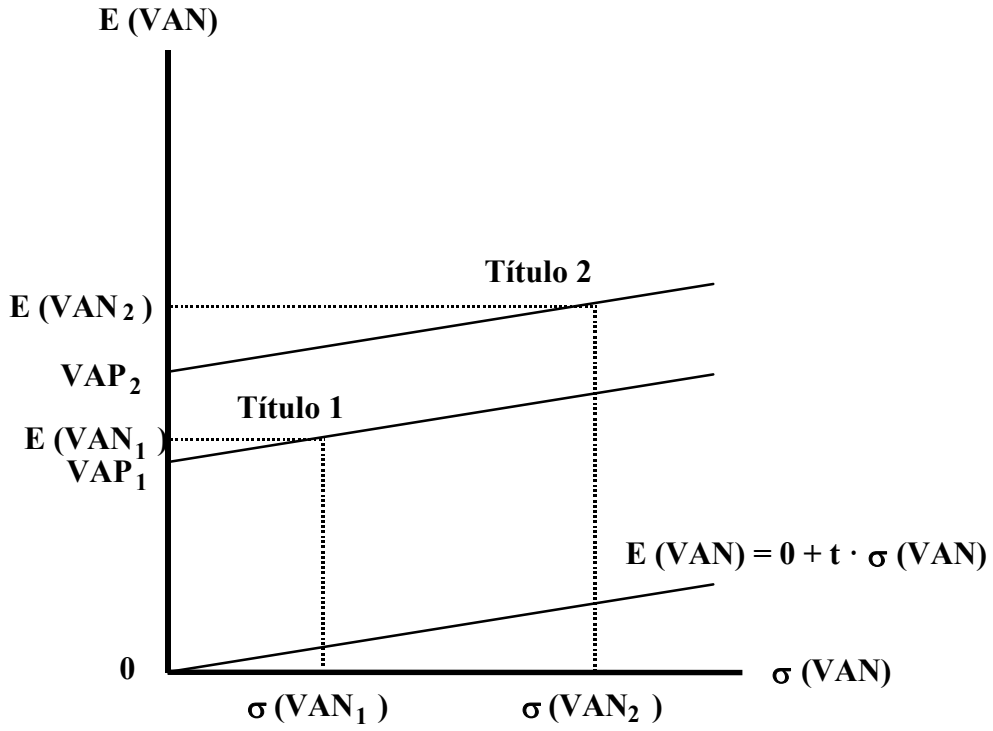


Figura B.2

[17] Efectivamente, si al comparar dos proyectos, uno tiene un VAP de 4 y el otro un VAP de 40 (según la fórmula B.1), podrá parecer que el segundo es mucho mejor que el primero. Sin embargo, la probabilidad de obtener un VAN negativo es prácticamente nula en ambos casos, no aportando gran cosa el segundo frente al primero en términos de reducción de la probabilidad de perder. Y sin embargo, desprecia otra información interesante de la distribución, como las posibilidades de ganar cantidades grandes, que pueden ser mucho mayores en el primer proyecto.

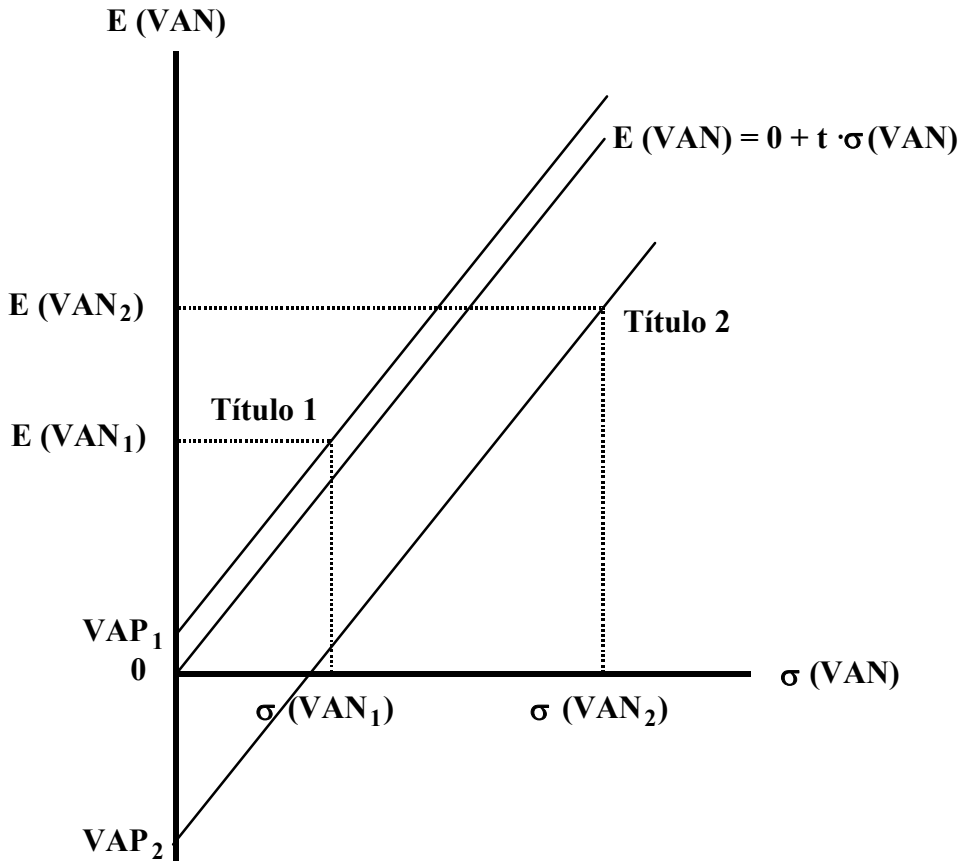


Figura B.3

Si trasladamos el razonamiento anterior a la TRIP, nos encontramos con las mismas conclusiones, matizadas por el hecho de que en este caso, las comparaciones a realizar se hacen con el título sin riesgo. Así:

$$\text{TRIP} = \frac{\text{E (TRI)} - r_0}{\sigma\,(\text{TRI})} \qquad [B.2]$$

En la figura B.4 puede apreciarse que, si utilizamos la formulación de TRIP propuesta en [B.2], el proyecto "1" es mejor que el "2", ya que tiene asociada una probabilidad más baja de obtener una TRI menor que el tipo de interés sin riesgo. Sin embargo, utilizando la formulación de TRIP defendida en el artículo (fórmula [5] del texto principal) vemos en la figura B.5, asociada a un individuo poco enemigo del riesgo, que el proyecto "2" pasa a ser preferido al "1", ya que para el nivel de garantía exigido, la rentabilidad equivalente cierta del proyecto "2" es superior a la del "1" (siendo ambos interesantes). Situación que vuelve a invertirse en la figura B.6, en la que el "1" no sólo es preferido al "2", sino que además éste último deja de ser interesante (utilizando la misma fórmula [5], pero aplicada ahora por un individuo más enemigo del riesgo que el anterior).

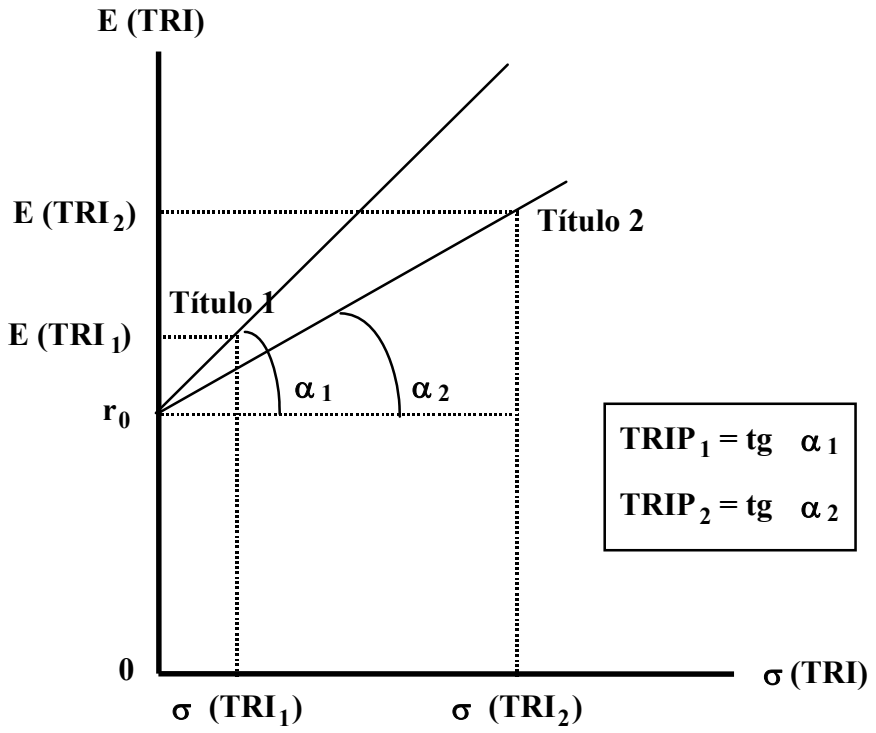


Figura B.4

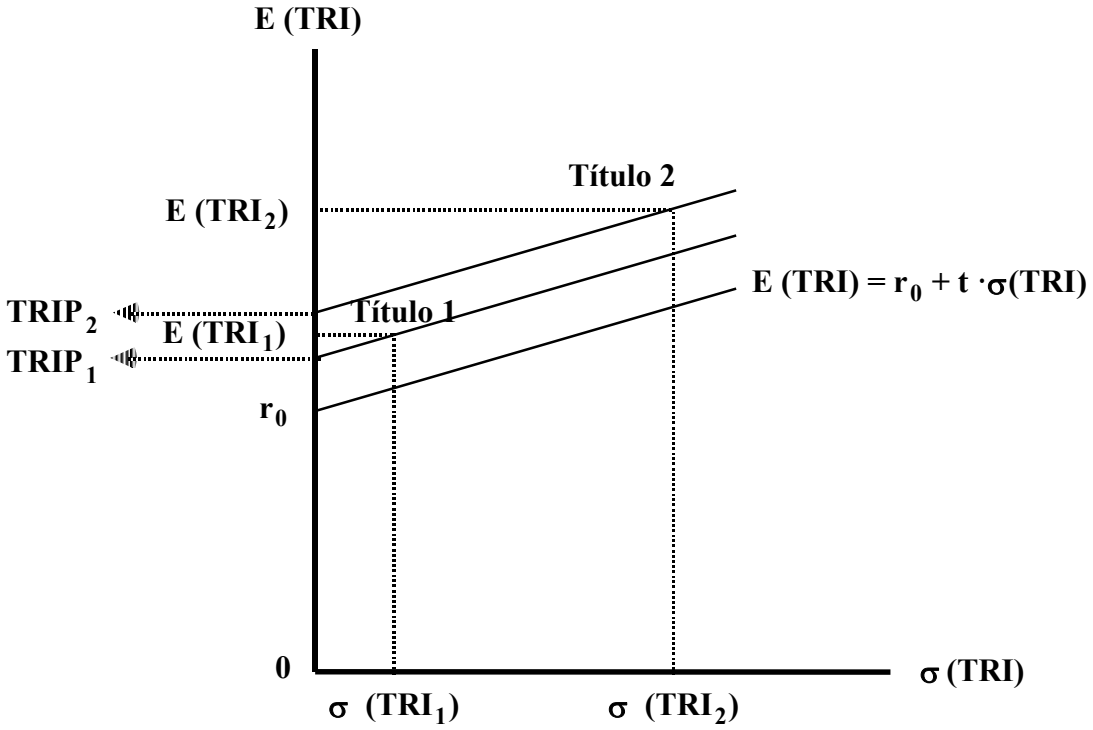


Figura B.5

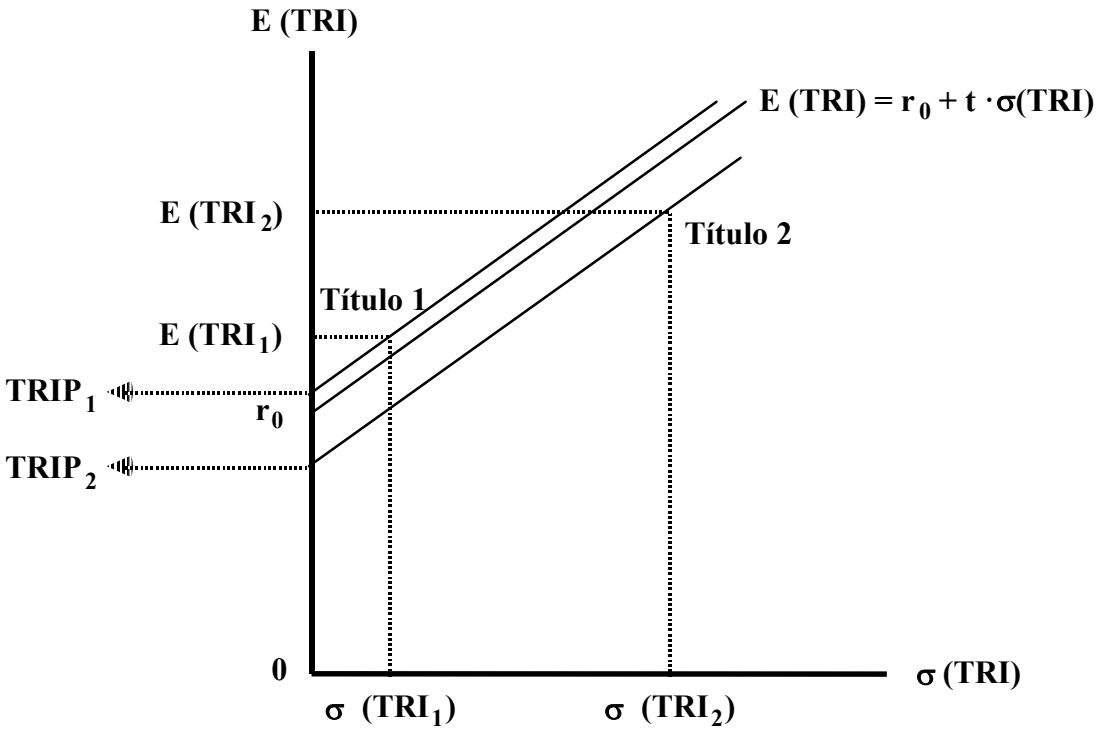


Figura B.6

La formulación de TRIP propuesta en [B.2] coincide con el índice de Sharpe, de donde se deduce que la utilización de Sharpe tiene las mismas limitaciones que esta versión de TRIP, es decir, hace un *ranking* de las posibles carteras en función de su probabilidad de que la rentabilidad caiga por debajo de r_0, y esto no parece un criterio suficiente.

APÉNDICE C: RELACIÓN ENTRE EL PARÁMETRO DE PENALIZACIÓN EN VAP Y TRIP

La pregunta que cabría hacerse es: a la hora de trabajar con la TRIP, ¿debemos utilizar la misma t que con el VAP? La cuestión tiene su importancia, ya que nosotros hemos defendido siempre que el valor de t que parecía razonable para el VAP estaría entre 1 y 2, lo que supone obtener un VAN mayor que el VAP con una garantía de entre el 84% y el 98%, aproximadamente, lo cual parece suficiente en la mayoría de los casos.

Sin embargo, al utilizar la TRIP en el análisis de las decisiones bursátiles, vemos que si empleamos estos valores no aceptamos nunca ningún título ni cartera, ni siquiera la cartera de mercado, por lo que trataremos de ver en primer lugar si deberían exigirse garantías diferentes en los dos criterios, para analizar después lo que ocurre con la TRIP.

Recordemos que estamos analizando proyectos uniperiodo como el de la figura C.1 (o convertidos en uniperiodo en la forma que indicábamos en el texto; es cuando tiene sentido utilizar la TRI, como en el caso de la Teoría de Cartera).

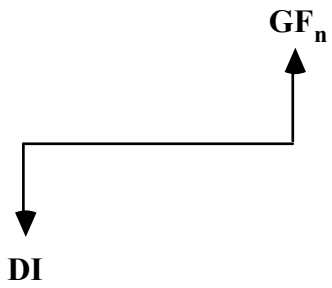


Figura C.1

En estas condiciones, ya hemos dicho que es indiferente utilizar VAN, TRI, o razonar en términos de riquezas actuales o finales, etc.

$$VAN = -DI + \frac{GF_n}{1 + k} \qquad [C.1]$$

$$GF_n = (VAN + DI) \cdot (1 + k) \qquad [C.2]$$

$$0 = -DI + \frac{GF_n}{1 + TRI} \quad \rightarrow \quad TRI = \frac{GF_n}{DI} - 1 \qquad [C.3]$$

$$GF_n = DI \cdot (1 + TRI) \qquad [C.4]$$

$$(VAN + DI) \cdot (1 + k) = DI \cdot (1 + TRI) \qquad [C.5]$$

$$VAN = \frac{DI \cdot (1 + TRI)}{(1 + k)} - DI = DI \cdot \left(\frac{1 + TRI}{1 + k} - 1\right) = DI \cdot \left(\frac{TRI - k}{1 + k}\right) \qquad [C.6]$$

Dado que suponemos que DI es conocido, así como el tipo "k" (sin riesgo) que hay que exigir al proyecto, vemos que si el VAN sigue una distribución normal, también lo hará la TRI (y viceversa), ya que no se trata más que de una transformación lineal. Puede intuirse que la t tiene que ser la misma en VAP y TRIP, como en efecto sucede, y al final de este apéndice lo demostraremos con rigor.

Para justificar que en el VAP usemos una t entre 0 y 2 (entre 1 y 2 en proyectos de cierta importancia), sabiendo que esto contradice la t más pequeña que puede observarse en el mercado bursátil (índice de Sharpe del mercado), pueden hacerse diferentes argumentaciones.

En primer lugar, la aplicación del VAP está pensada para las PYMES, que se enfrentan a mercados de capitales mucho más imperfectos: capital escaso, más posibilidades de bancarrota, etc., que les hace cubrirse más ante el riesgo. También vemos lógico que las grandes empresas actúen con mayor aversión al riesgo cuando en ello va su futuro, y eso es bastante frecuente cuando una PYME se enfrenta a un proyecto de inversión de cierto tamaño.

Por otro lado, el inversor en bolsa suele tener una parte pequeña de su patrimonio invertida en bolsa, frente a muchos accionistas de las PYMES que tienen en la empresa una parte muy alta de su patrimonio. Esto hace que sus posibilidades de diversificación sean pequeñas, y exijan una t mayor.

Además, tal como se puede ver en la figura C.2, la t del VAP (o de la TRIP), cuando se aplica a un proyecto empresarial no tiene por qué ser la misma que la t indicada por el índice de Sharpe del mercado. Así, para penalizar el proyecto P de la figura, siendo coherente con la forma de las curvas de indiferencia (líneas punteadas) debo utilizar la pendiente del ángulo α, que es mayor que la del ángulo α^*, que coincide con el índice de Sharpe del mercado. Y hemos de ser conscientes de que en los proyectos de las PYMES es bastante frecuente encontrarse con promedios y desviaciones superiores a los del mercado.

Para completar el comentario anterior, vemos en la figura que si al proyecto P le aplicáramos la penalización de α^* resultaría mucho más interesante que lo que realmente es a la vista de las curvas de indiferencia.

Y hay una última razón, que puede ser la más convincente. Es lógico que la pendiente de la LMC (Sharpe del mercado) aumente conforme lo hace el plazo de la inversión; esto es así, porque, aproximadamente, si el plazo pasa de un periodo a "n" periodos, la μ se multiplica por n y la σ por $\sqrt{n}$, con lo que la pendiente va creciendo. Así, una pendiente mensual de 0,2 pasaría (multiplicada por $\sqrt{12}$) a una anual de 0,69 y a una para cinco años de 1,55.

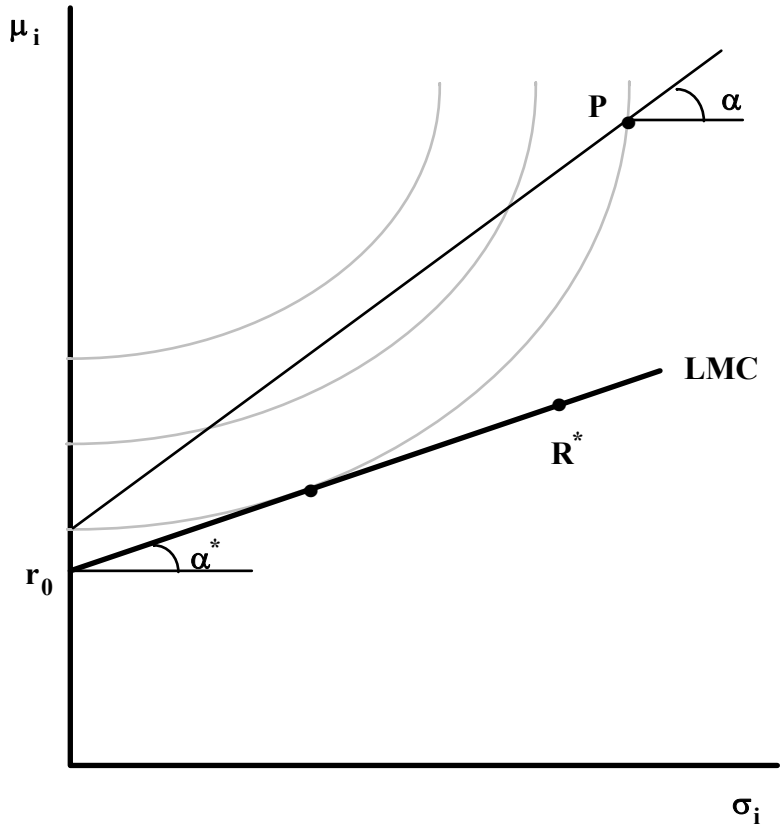


Figura C.2

Pero los proyectos de inversión empresarial que analizamos con el VAP suelen ser proyectos a largo plazo (por lo que la t tiene que ser alta). De hecho, si suponemos que reinvertimos las generaciones de fondos del proyecto al tipo de interés sin riesgo, llegaríamos a una distribución de riqueza final (en el año n) que actualizada al tipo de interés sin riesgo de esos n años, nos daría la distribución del VAN sobre la que se calcula el VAP; luego sería correcto considerar la inversión como equivalente a otra con un único periodo de n años.

• Algunas demostraciones matemáticas suponiendo proyectos uniperiodo.

Sea un periodo donde la riqueza final es $\tilde{R}_F$ y la inicial R_0. Si $\tilde{R}_F$ es N (μ_F , σ_F)[18] y $\tilde{r}$ es la rentabilidad del periodo:

$$\tilde{r} = \frac{\tilde{R}_F - R_0}{R_0} \qquad [C.7]$$

$$\tilde{r} \rightarrow N\left(\frac{\mu_F - R_0}{R_0}, \frac{\sigma_F}{R_0}\right) \qquad [C.8]$$

[18] Sigue la distribución normal con promedio μ_F y desviación típica σ_F.

Si calculo la TRI de la esperanza:

$$\frac{E\left(\tilde{R}_F\right)}{1 + TRI} = R_0 \quad \rightarrow \quad TRI = \frac{\mu_F - R_0}{R_0} = \mu_r \qquad [C.9]$$

luego la TRI de la esperanza es la esperanza de TRI.

Por otro lado, si calculo el VAN al tipo sin riesgo k:

$$\widetilde{VAN} = \frac{\tilde{R}_F}{1 + k} - R_0 \quad \rightarrow \quad N\left(\frac{\mu_F}{1 + k} - R_0 \, , \, \frac{\sigma_F}{1 + k}\right) \qquad [C.10]$$

Si quiero saber a cuántas desviaciones típicas estamos del cero de VAN:

$$\frac{\frac{\mu_F}{1 + k} - R_0}{\frac{\sigma_F}{1 + k}} = \frac{\mu_F - R_0 - R_0 \cdot k}{\sigma_F}$$

Si quiero saber a cuántas desviaciones está μ_r de k:

$$\frac{\mu_r - k}{\sigma_r} = \frac{\frac{\mu_F - R_0}{R_0} - k}{\frac{\sigma_F}{R_0}} = \frac{\mu_F - R_0 - R_0 \cdot k}{\sigma_F} \qquad \text{(que coincide con lo anterior)}$$

Luego queda muy lógico para un periodo (en cuanto a lo que ocurre con varios, puede consultarse el Apéndice D).

Finalmente, veamos qué ocurre en estas condiciones con la t utilizada en ambos criterios.

Para comprobar que la t usada en el VAP (en el caso de un periodo) coincide con la usada en la TRIP lo que hay que demostrar es que supuestos dos proyectos 1 y 2 con el mismo desembolso inicial (R_0) y con distintas distribuciones de riqueza final [(μ_{F1} , σ_{F1}) y (μ_{F2} , σ_{F2})], supuesto un valor de t, tiene que suceder que si $VAP_1 > VAP_2$ —> $TRIP_1 > TRIP_2$; en efecto:

$$VAP_i = E\,(VAN_i) - t \cdot \sigma\,(VAN_i) \qquad [C.11]$$

$$VAP_1 = \frac{\mu_{F1}}{1 + k} - R_0 - t \cdot \frac{\sigma_{F1}}{1 + k}$$

$$VAP_2 = \frac{\mu_{F2}}{1 + k} - R_0 - t \cdot \frac{\sigma_{F2}}{1 + k}$$

si $VAP_1 > VAP_2$, entonces:

$$\frac{\mu_{F1}}{1+k} - R_0 - t \cdot \frac{\sigma_{F1}}{1+k} > \frac{\mu_{F2}}{1+k} - R_0 - t \cdot \frac{\sigma_{F2}}{1+k} \qquad [C.12]$$

luego $\mu_{F1} - t \cdot \sigma_{F1} > \mu_{F2} - t \cdot \sigma_{F2}$

Por otro lado:

$$TRIP_i = E(TRI_i) - t \cdot \sigma(TRI_i) \qquad [C.13]$$

$$TRIP_1 = \frac{\mu_{F1} - R_0}{R_0} - t \cdot \frac{\sigma_{F1}}{R_0}$$

$$TRIP_2 = \frac{\mu_{F2} - R_0}{R_0} - t \cdot \frac{\sigma_{F2}}{R_0}$$

Si se cumple que $\mu_{F1} - t \cdot \sigma_{F1} > \mu_{F2} - t \cdot \sigma_{F2}$ es evidente que $TRIP_1 > TRIP_2$.

Luego supuesta una t para el VAP, al aplicarla en la TRIP llegamos a idénticos resultados. Por lo que se debe usar la misma t.

APÉNDICE D: ESTUDIO EMPÍRICO ACERCA DE LA NORMALIDAD DE VAN Y TRI

Así como la normalidad del VAN es más fácil de aceptar, apoyándonos, por ejemplo, en el Teorema Central del Límite, la normalidad de la TRI es más difícil de demostrar. En el Apéndice C veíamos cómo la hipótesis de normalidad de la TRI es fácil de aceptar cuando se trata de proyectos uniperiodo: en tal caso, y supuesta riqueza final del proyecto que sigue la distribución normal, tanto el VAN como la TRI seguirían también la distribución normal. Sin embargo, en el caso de proyectos multiperiodo (los más habituales en la gestión de la PYME), este tema no está tan claro. Abordaremos el tema desde una perspectiva empírica, y a continuación extraeremos algunas conclusiones, que trataremos de relacionar con la aproximación teórica de Hillier, que en determinadas condiciones, justifica la normalidad de TRI.

• Estudio empírico de la normalidad de VAN y TRI utilizando técnicas de simulación.

A continuación, presentaremos los resultados obtenidos al realizar un proceso de simulación (por el método de Montecarlo), en seis situaciones diferentes. Todas ellas tienen una serie de hipótesis de partida y de procedimientos de trabajo comunes, así como algunos elementos que cambian de una simulación a otra. A continuación, se describe brevemente el proceso realizado:

- Se define el desembolso inicial del proyecto, que se supone conocido: 1.000 unidades monetarias -u.m.- (en todos los casos).

- Se define la vida útil del proyecto, que se supone también conocida a priori (y que cambia en las diferentes simulaciones realizadas).

- Se define el tipo de descuento a utilizar (coste de los fondos), que se supone conocido e invariable a lo largo de la vida útil del proyecto (k = 10% en todos los casos).

- Se define el comportamiento de las generaciones de fondos asociadas al proyecto (la última incluye el valor residual), asumiéndose la normalidad de cada una de ellas. En concreto, se ha supuesto generaciones de fondos de promedio $\mu = 500$ y desviación típica $\sigma = 50$ (en todos los casos).

- En cada caso, se supone una determinada relación entre los flujos de fondos de los diferentes años (distinta en cada simulación).

- En cada simulación, se generan 50.000 valores de las variables simuladas, obteniendo por tanto 50.000 valores de VAN y otros tantos de TRI. A partir de estos valores simulados, se calcula el promedio y la desviación típica de VAN y TRI.

- En el caso de la TRI se comparan los valores de promedio obtenidos en cada simulación con los que se obtienen a partir de las generaciones de fondos esperadas.

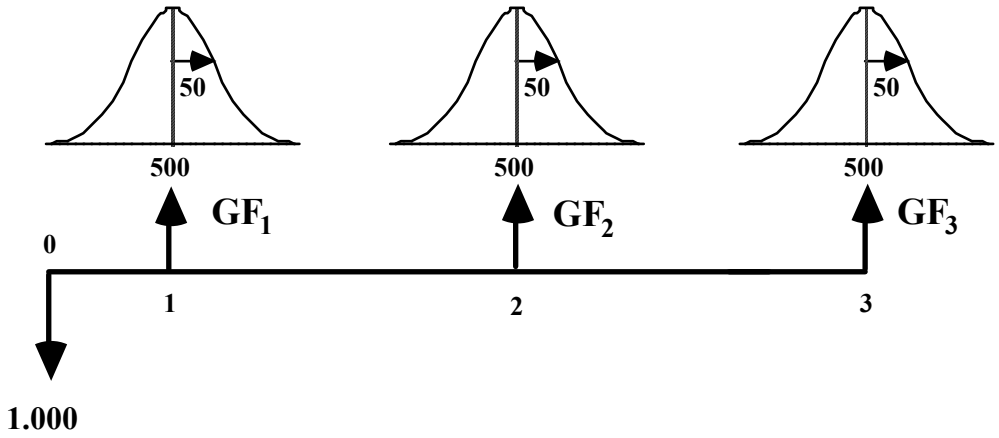
- En cada simulación, se realizan pruebas de hipótesis para comprobar si cabe aceptarse la normalidad de las distribuciones simuladas de VAN y TRI. Asimismo, se indica la distribución teórica que mejor se ajustaría a la obtenida desde el punto de vista experimental.

- En determinadas ocasiones, cuando se considera oportuno, se ofrecen también los resultados empíricos de asimetría y kurtosis (datos referidos a la distribución de la TRI).

Los resultados obtenidos en el proceso descrito son los siguientes:

• SIMULACIÓN Nº 1: Vida útil de tres años y correlación nula entre las generaciones de fondos de los distintos años.

El perfil de fondos sobre el que se trabaja es el siguiente:



Y los resultados obtenidos en el proceso descrito son los siguientes:

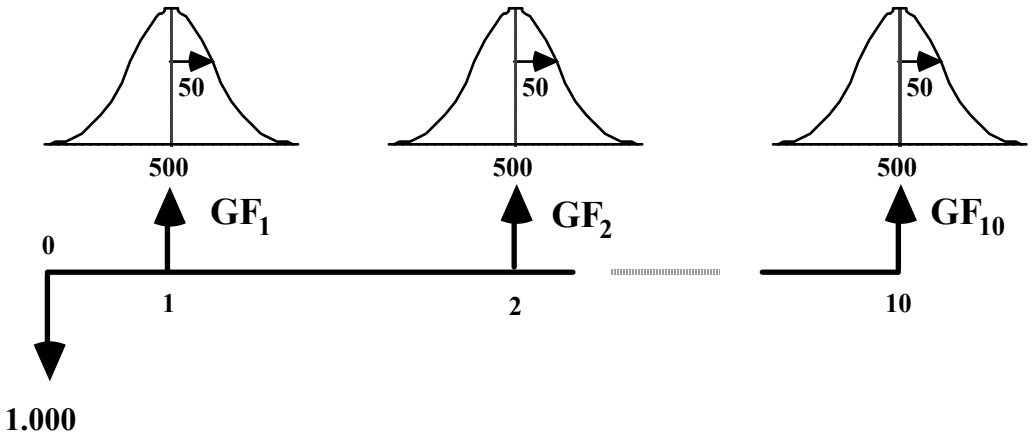
Concepto	Valor
Desembolso inicial	- 1.000
E (GF_1)	500
E (GF_2)	500
E (GF_3)	500
σ (GF_i)	50
Correlación entre GF_i	0
Coste de los fondos (k)	10%
VAN a partir de E (GF_i)	243,43
TRI a partir de E (GF_i)	23,38%
E (TRI) a partir de distribución simulada	23,37%

Análisis de la normalidad de las distribuciones simuladas:

Concepto	VAN	TRI
Kolmogorov-Smirnov[19]	0,003661339	0,003613211
Best Fit	Normal	Normal
Asimetría	-	-
Kurtosis	-	-

• **SIMULACIÓN Nº 2: Vida útil de diez años y correlación nula entre las generaciones de fondos de los distintos años.**

El perfil de fondos sobre el que se trabaja es el siguiente:



[19] Para un error α del 5%, se acepta la normalidad para valores inferiores a 0,0060821.

Y los resultados obtenidos en el proceso descrito son los siguientes:

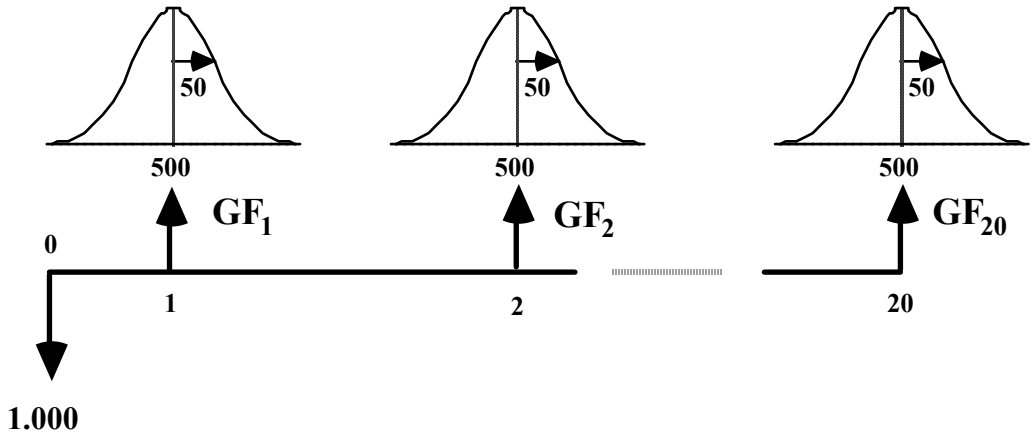
Concepto	Valor
Desembolso inicial	- 1.000
E (GF_1)	500
…	…
E (GF_{10})	500
σ (GF_i)	50
Correlación entre GF_i	0
Coste de los fondos (k)	10%
VAN a partir de E (GF_i)	2.072,28
TRI a partir de E (GF_i)	49,08%
E (TRI) a partir de distribución simulada	49,12%

Análisis de la normalidad de las distribuciones simuladas:

Concepto	VAN	TRI
Kolmogorov-Smirnov	0,003612903	0,007236383
Best Fit	Normal	Beta
Asimetría	-	0,11
Kurtosis	-	3,00

• SIMULACIÓN Nº 3: Vida útil de veinte años y correlación nula entre las generaciones de fondos de los distintos años.

El perfil de fondos sobre el que se trabaja es el siguiente:



Y los resultados obtenidos en el proceso descrito son los siguientes:

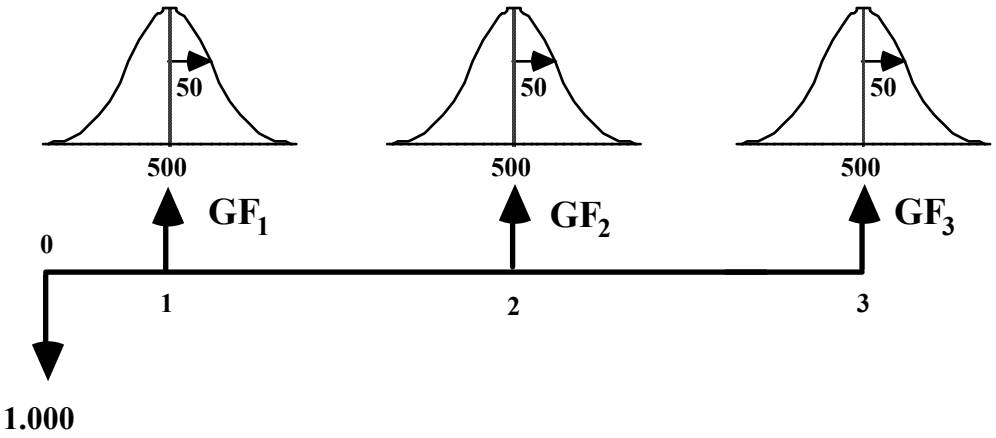
Concepto	Valor
Desembolso inicial	- 1.000
E (GF_1)	500
…	…
E (GF_{20})	500
σ (GF_i)	50
Correlación entre GF_i	0
Coste de los fondos (k)	10%
VAN a partir de E (GF_i)	3.256,78
TRI a partir de E (GF_i)	49,98%
E (TRI) a partir de distribución simulada	50,01%

Análisis de la normalidad de las distribuciones simuladas:

Concepto	VAN	TRI
Kolmogorov-Smirnov	0,002858793	0,008077458
Best Fit	Normal	Beta
Asimetría	-	0,10
Kurtosis	-	3,01

- **SIMULACIÓN Nº 4: Vida útil de tres años y correlación perfecta y positiva entre las generaciones de fondos de los distintos años.**

El perfil de fondos sobre el que se trabaja es el siguiente:



Y los resultados obtenidos en el proceso descrito son los siguientes:

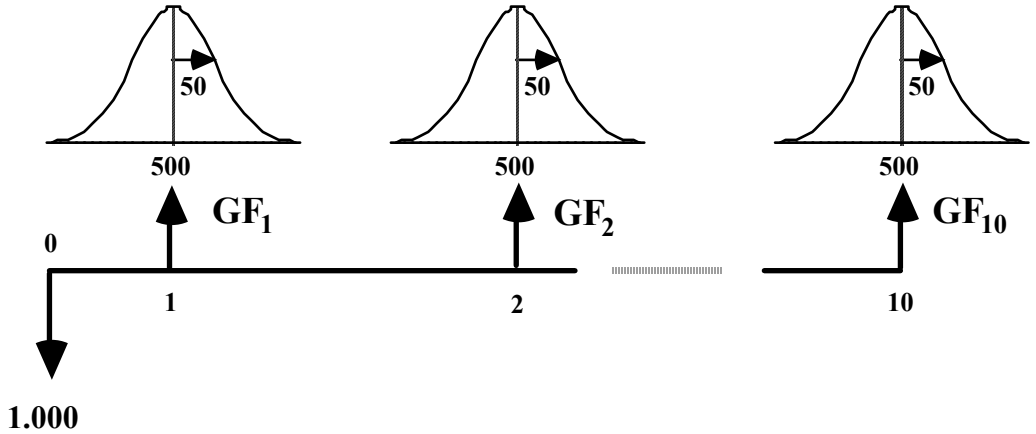
Concepto	Valor
Desembolso inicial	- 1.000
E (GF_1)	500
E (GF_2)	500
E (GF_3)	500
σ (GF_i)	50
Correlación entre GF_i	1
Coste de los fondos (k)	10%
VAN a partir de E (GF_i)	243,43
TRI a partir de E (GF_i)	23,38%
E (TRI) a partir de distribución simulada	23,27%

Análisis de la normalidad de las distribuciones simuladas:

Concepto	VAN	TRI
Kolmogorov-Smirnov	0,002842147	0,006112211
Best Fit	Normal	Normal
Asimetría	-	- 0,07
Kurtosis	-	3,00

- **SIMULACIÓN Nº 5: Vida útil de diez años y correlación perfecta y positiva entre las generaciones de fondos de los distintos años.**

El perfil de fondos sobre el que se trabaja es el siguiente:



Y los resultados obtenidos en el proceso descrito son los siguientes:

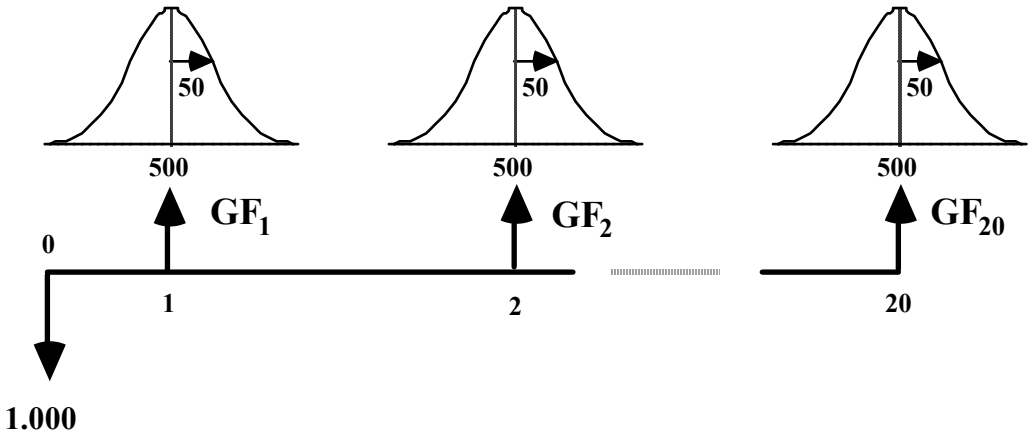
Concepto	Valor
Desembolso inicial	- 1.000
E (GF_1)	500
…	…
E (GF_{10})	500
σ (GF_i)	50
Correlación entre GF_i	1
Coste de los fondos (k)	10%
VAN a partir de E (GF_i)	2.072,28
TRI a partir de E (GF_i)	49,08%
E (TRI) a partir de distribución simulada	49,04%

Análisis de la normalidad de las distribuciones simuladas:

Concepto	VAN	TRI
Kolmogorov-Smirnov	0,001621271	0,002773545
Best Fit	Normal	Normal
Asimetría	-	-
Kurtosis	-	-

- **SIMULACIÓN Nº 6: Vida útil de veinte años y correlación perfecta y positiva entre las generaciones de fondos de los distintos años.**

El perfil de fondos sobre el que se trabaja es el siguiente:



Y los resultados obtenidos en el proceso descrito son los siguientes:

Concepto	Valor
Desembolso inicial	- 1.000
E (GF_1)	500
…	…
E (GF_{20})	500
σ (GF_i)	50
Correlación entre GF_i	1
Coste de los fondos (k)	10%
VAN a partir de E (GF_i)	3.256,78
TRI a partir de E (GF_i)	49,98%
E (TRI) a partir de distribución simulada	49,96%

Análisis de la normalidad de las distribuciones simuladas:

Concepto	VAN	TRI
Kolmogorov-Smirnov	0,001533372	0,001585839
Best Fit	Normal	Normal
Asimetría	-	-
Kurtosis	-	-

Conclusiones acerca de la normalidad de VAN y TRI

- En lo que se refiere al análisis empírico a través de la técnica de simulación, realizada bajo dos hipótesis extremas (correlación nula y correlación perfecta y positiva), y en tres escenarios en cuanto al número de generaciones de fondos (3, 10 y 20, respectivamente), podemos concluir lo siguiente:

    * Puede aceptarse la normalidad del VAN en todos los casos.

    * Sólo en algunos casos puede aceptarse la normalidad de la TRI, pero en cualquier caso, da la impresión de que la distribución empírica es muy similar a la normal, lo que supondría que el cálculo de probabilidades utilizando la curva normal no debe llevar a cometer grandes errores.

- Desde un punto de vista teórico, cabe referirnos al trabajo de Hillier[20], en el que el autor apunta que el VAN sigue la distribución normal si las generaciones de fondos lo hacen, con independencia del valor que tome la correlación entre los diferentes flujos de fondos[21]. Este resultado, además, resulta típico y lógico.

  Por otra parte, el autor razona que la TRI sigue también la distribución normal, apoyando su argumentación en una "sencilla" demostración matemática, que parte de unos supuestos que plantean problemas importantes en cuanto a su aceptación:

  * Por un lado, resulta claro que el promedio de VAN disminuye ante aumentos del tipo de descuento (k) -de hecho, la derivada del promedio con respecto a k es negativa-, pero Hillier supone que las disminuciones de promedio son iguales para cualquier valor de k.

  * Es claro que la varianza del VAN varía ante cambios en el tipo de descuento, pero Hillier supone que la varianza no cambia para cualquier valor de k.

  Así, aceptando las dos hipótesis apuntadas, puede demostrarse la normalidad de la TRI, si bien el propio autor señala las limitaciones de su planteamiento (que vienen dadas por el carácter restrictivo de las condiciones apuntadas).

Una última reflexión

En cuanto a la posibilidad de razonar e identificar el concepto de TRI esperada y la TRI de las generaciones de fondos esperadas, es importante resaltar que esto está totalmente justificado en proyectos uniperiodo. Y es precisamente en este caso en el que la TRI no presenta otros problemas teóricos importantes (como la hipótesis de reinversión a la propia TRI -que puede tener efectos especialmente dramáticos en el caso de que el proyecto devuelva los fondos a ritmos acelerados-, el de inconsistencia, etc.). Por lo tanto, entendemos que los razonamientos realizados a lo largo del artículo están justificados, ya que:

- En proyectos financieros es habitual suponer existencia de un único periodo (cfr. Teoría de Cartera de Markowitz y modelos construidos a partir de la misma).

- En proyectos empresariales, la utilización de TRI sin problemas exige que los proyectos sean uniperiodo. Dado que en muchos casos ello no es así, puede suponerse que trabajamos con la TRI modificada, que supone reinversión de los flujos de fondos al momento n (vida útil del proyecto) al coste de los fondos, y cálculo posterior de la TRI correspondiente a dicho proyecto uniperiodo.

---

[20] Hillier, F.S. (1963): "The derivation of probabilistic information for the evaluation of risky investments", *Management Science*, 9, Abril, págs. 443-457.

[21] Se debería entender aquí distribución normal multivariante.

PERFORMANCE AJUSTADA AL RIESGO: ÍNDICES CLÁSICOS Y NUEVAS MEDIDAS

por Fernando Gómez-Bezares, José A. Madariaga y Javier Santibáñez
Publicado en *Análisis Financiero*, nº 93, 2004 (Primer Cuatrimestre), págs. 6-16

1.- INTRODUCCIÓN

Para medir la bondad en la gestión de una cartera, o valorar los resultados de un título cotizado en bolsa, tradicionalmente la industria se ha fijado en la rentabilidad (Modigliani y Modigliani, 1997). Pero como muy bien dicen los autores citados, ésta es una mala medida de la *performance*, pues ignora el riesgo.

Para valorar el resultado de una inversión, lo correcto es tener en cuenta tres características: rentabilidad, riesgo y liquidez; si prescindimos de la última (por ser los títulos en bolsa suficientemente líquidos) nos quedan rentabilidad y riesgo como características relevantes[1].

La realidad es que a los inversores no les gusta el riesgo, y sólo aceptan correr riesgos si ello se ve compensado con una mayor rentabilidad esperada, pero eso lo veremos más despacio en el siguiente apartado.

2.- CONCEPTO DE RIESGO[2]

Al enfrentarnos ante una decisión, lo más habitual es que nos encontremos en lo que se conoce como "ambiente de riesgo". Este entorno se caracteriza por el hecho de que no sabemos exactamente qué ocurrirá, pero conocemos los posibles valores de las variables implicadas y las

[1] Se han encontrado primas de rentabilidad para compensar los problemas de iliquidez, tal como afirma el estudio clásico de Amihud y Mendelson (1991); sin embargo, nosotros prescindiremos de este problema y supondremos que los títulos son suficientemente líquidos.

[2] En el desarrollo de este punto nos basaremos, en ocasiones de manera literal, en nuestro trabajo Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (2001).

probabilidades asociadas a los mismos. Dicho de un modo algo más técnico, en ambiente de riesgo conocemos las distribuciones de probabilidad de las variables que afectan al problema que se pretende analizar.

En estas condiciones, el primer criterio que intuitivamente nos viene a la cabeza para valorar una decisión es el promedio o valor esperado (al que llamaremos μ), que se calcula ponderando los resultados posibles por las probabilidades correspondientes. Así, si nos ofrecen un juego (sin tener que pagar nada por él) en el que podemos ganar 1.000 ó 2.000 euros al 50% de probabilidad (si sale cara cobramos 1.000; y si sale cruz, 2.000), el valor del juego según el criterio del valor esperado sería:

$$\mu = 0{,}5 \cdot 1.000 + 0{,}5 \cdot 2.000 = 1.500$$

El problema del valor esperado es que es una medida de "posición", nos da un "valor central" asociado a la decisión, nos indica lo que como promedio ganaríamos cada vez si la decisión se repitiera un número suficientemente alto de veces; pero nada nos dice de la variabilidad de la decisión, de cómo se alejan los resultados posibles con respecto a dicho valor "central". Es decir, no nos informa acerca del "riesgo" asociado a la decisión, que en casos simplificados como éste podríamos evaluar con una medida sencilla de dispersión como el recorrido (diferencia entre los valores máximo y mínimo; en nuestro caso, Recorrido = 2.000 - 1.000 = 1.000).

En este sentido, podría ocurrir que tuviéramos que elegir entre varias decisiones, con idéntico promedio pero distinto riesgo; cabiendo preguntarse si la actitud esperable de los individuos es la de indiferencia entre ellas. Tratemos de verlo nuevamente con un ejemplo sencillo.

Supongamos que hemos ganado un premio de 10 millones de euros en la Lotería. Cuando vamos a cobrar el premio, se nos ofrece la posibilidad de jugarlos a doble o nada al 50% de probabilidad, es decir, si ganamos cobraremos 20 millones y si perdemos nos vamos sin nada. Parece obvio que nadie en su sano juicio aceptaría este juego, y sin embargo, es un juego "limpio", en el sentido de que su valor esperado es idéntico a la cantidad segura que apostamos. Y ello se debe a que la posibilidad de perder 10 millones es valorada más (negativamente) que la posibilidad de añadir 10 millones adicionales a nuestra riqueza[3]. Acabamos de ver intuitivamente el concepto de "aversión al riesgo": en finanzas decimos que lo lógico es que los individuos se comporten como enemigos del riesgo, lo que significa que, a igualdad de promedio, preferirán la decisión menos arriesgada.

[3] Esta idea no es otra cosa que el concepto de la utilidad marginal decreciente propuesto por la Teoría del Consumidor. Efectivamente, el punto de partida de dicha teoría es que, para bienes normales, la utilidad (medida de la satisfacción) asociada a unidades adicionales de dicho bien (es lo que se llama utilidad marginal, es decir, el aumento de utilidad) es siempre positiva pero decreciente. Dicho de otra forma, unidades adicionales de riqueza suponen aumentos siempre positivos de satisfacción, pero cada unidad añade una satisfacción inferior a la reportada por la unidad anterior. Es decir, que los sucesivos incrementos que añadimos a nuestra riqueza "cada vez nos hacen menos ilusión" (aunque siempre nos dan algo de alegría).

Esto no significa que no vayamos a aceptar riesgos en ningún caso. Si en el ejemplo propuesto, nos ofrecieran "jugarnos" los 10 millones a cambio de un juego en el que podemos ganar 5 ó 20 millones de euros (al 50% de probabilidad), es posible que haya individuos que acepten el juego. Y ello es debido a que ahora dicho juego ofrece lo que en finanzas llamamos "premio por riesgo". Efectivamente, el valor esperado del juego:

$$\mu = 0{,}5 \cdot 5.000.000 + 0{,}5 \cdot 20.000.000 = 12.500.000$$

es superior al importe jugado (10 millones); es decir, el juego ofrece más riesgo (15 millones, si lo medimos con el recorrido, frente a cero, que es el asociado a los 10 millones seguros), pero también más promedio de resultado. En estas condiciones, habrá individuos para los que el premio sea suficiente y acepten jugar, mientras otros optarán por los 10 millones seguros. Es decir, el concepto de aversión al riesgo es relativo, depende de las preferencias de cada individuo.

Lo importante de lo anterior es la idea de que si los individuos nos comportamos como enemigos del riesgo, sólo estaremos dispuestos a asumir riesgos si "esperamos" un premio por hacerlo. Por otro lado, en finanzas suele razonarse en función del binomio $\mu-\sigma$, es decir, del promedio y el riesgo asociados a las decisiones[4]. La σ (desviación típica del resultado) sustituye así a otras medidas sencillas de la variabilidad (como el recorrido), por ser una mejor medida desde el punto de vista estadístico.

Supuesto lo anterior, cuando un individuo invierte en bolsa una cantidad, le es indiferente hablar de riqueza final de un periodo o de riqueza inicial multiplicada por (1+r), donde r es la rentabilidad obtenida. Supuesta una riqueza inicial dada, lo que importa es la r, y por eso hablaremos de μ y σ de r. Los individuos deciden en función de μ y σ, y como son enemigos del riesgo, un aumento de σ supone un aumento en el promedio exigido.

Hemos visto que en Finanzas riesgo es variabilidad, y que la actitud lógica de los individuos sería la de aversión al riesgo. Sin embargo, no todos los riesgos son iguales. Así, en Finanzas distinguimos entre dos tipos fundamentales de riesgo: el riesgo sistemático y el riesgo diversificable. Tratemos nuevamente de ver el concepto desde un punto de vista intuitivo. Pensemos en un individuo que tiene una cartera de acciones compuesta por un único título, supongamos muy arriesgado (con mucha variabilidad en su rentabilidad), pero también con un alto valor esperado. Si decide añadir un título más a su cartera, es evidente que su rentabilidad esperada se verá afectada (al alza o a la baja, dependiendo de la rentabilidad esperada asociada al nuevo título, así como de los pesos que ambos tengan en la cartera), pero su riesgo no sólo no tiene por qué aumentar, sino que puede incluso disminuir. Efectivamente, si los dos títulos no tienen ninguna relación, lo normal es que se produzca un cierto efecto de compensación, de manera que será difícil que siempre que uno presente altas rentabilidades el otro lo haga también; y viceversa. Y este efecto de disminución del riesgo (de la variabilidad en su rentabilidad) se vería reforzado si el individuo sigue añadiendo a su cartera títulos cuyo comportamiento no está relacionado. A este efecto le llamamos diversificación del riesgo, y significa que el riesgo de una cartera disminuye al añadir títulos no relacionados entre sí.

[4] Es el planteamiento de la Teoría de Cartera (o modelo media-varianza) de Markowitz.

Sin embargo, hay una parte de la variabilidad de la rentabilidad que no puede eliminarse por muchos títulos que incluyamos en la cartera. Y es que todos los títulos tendrán alguna relación (unos mucha y otros poca) con la marcha general del mercado. A esta parte del riesgo no eliminable por diversificación se le llama riesgo sistemático, y es la parte de la variabilidad asociada a la rentabilidad de la cartera que no hay más remedio que asumir por el hecho de que los títulos se relacionan en cierta medida con la marcha general del mercado. Así, el riesgo total de una cartera puede descomponerse en los dos elementos comentados:

Riesgo total = Riesgo sistemático + Riesgo diversificable

Cada título incorporará cantidades diferentes de los dos tipos de riesgo. Habrá títulos que tengan poca relación con el mercado (tendrán poco riesgo sistemático, son los llamados títulos "defensivos"), mientras que otros tendrán una alta relación con él (tendrán mucho riesgo sistemático; son los títulos "agresivos").

Una forma de medir las cantidades de riesgo sistemático y diversificable de un título consiste en calcular la que llamamos Línea Característica del Título (LCT). Esta recta se obtiene mediante un ajuste de regresión entre las rentabilidades del título y las del mercado, de forma que la pendiente de dicha recta, a la que llamamos beta (β), representa la medida del riesgo sistemático asociado al título en cuestión.

Una vez aceptada la distinción planteada entre el riesgo sistemático y el diversificable, el Modelo de Valoración de Activos de Capital de Sharpe (más conocido por sus siglas en inglés, CAPM) deduce dos consecuencias fundamentales fácilmente intuibles: en primer lugar, que el riesgo diversificable no es relevante, ya que el individuo puede eliminarlo de su cartera simplemente añadiendo un número suficiente de títulos a la misma; y en segundo lugar, y dado que como indicábamos anteriormente, lo lógico es que los individuos se comporten como enemigos del riesgo, que a mayor riesgo sistemático (mayor beta) debería corresponder una rentabilidad esperada mayor. En las condiciones del modelo, la relación entre la rentabilidad esperada de un título y su beta (medida del riesgo sistemático) es lineal. Aceptada esta relación lineal, puede deducirse fácilmente la ecuación fundamental propuesta por el modelo:

$$E(R_i) = r_0 + [\mu^* - r_0] \cdot \beta_i$$

donde $E(R_i)$ sería la rentabilidad esperada del título i; r_0 es el tipo de interés sin riesgo; μ^* representa la rentabilidad esperada del mercado; y β_i es la cantidad de riesgo sistemático que presenta el título i[5].

[5] Para ampliar todo lo relativo a la Teoría de Cartera y al Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM) puede consultarse, por ejemplo, Gómez-Bezares (1991, caps. 4 y 5); o Gómez-Bezares (2000, caps. 3 a 5).

3.- LAS MEDIDAS CLÁSICAS DE *PERFORMANCE*

Presentaremos ahora las medidas clásicas de *performance* utilizadas habitualmente en el estudio del desempeño de los títulos y carteras en bolsa. En todos los casos, se trata de recoger la idea de que las rentabilidades obtenidas no son directamente comparables, ya que los riesgos asumidos pueden haber sido diferentes. Y las diferencias entre las distintas medidas están precisamente en el riesgo que consideran relevante, así como en la manera de medir la forma de batir al mercado.

Todas las medidas que presentaremos exigen disponer para su cálculo de unas series de rentabilidades suficientemente representativas de su comportamiento, de forma que podamos obtener el promedio de rentabilidad (μ), así como las medidas propuestas de riesgo (total, con la desviación típica σ, y sistemático, con la beta). Ello exige definir con carácter previo el periodo básico para el que se calcula cada rentabilidad (por ejemplo, mensual), así como la longitud del periodo total de análisis (supongamos cinco años).

• Índice de Sharpe[6]:

$$S_i = \frac{\mu_i - r_0}{\sigma_i}$$

donde μ_i es el promedio de rentabilidad obtenido por el título o cartera i; r_0 es el tipo de interés sin riesgo; y σ_i es el riesgo total (medido con la desviación típica de rentabilidad) del título o cartera i.

Como puede verse, el índice de Sharpe calcula el premio de rentabilidad obtenido por el título o cartera por unidad de riesgo total medido por la desviación típica (de la rentabilidad).

• Índice de Treynor[7]:

$$T_i = \frac{\mu_i - r_0}{\beta_i}$$

donde β_i es la medida del riesgo sistemático (propuesta por el CAPM) del título o cartera i.

Como puede verse, el índice de Treynor calcula el premio de rentabilidad obtenido por el título o cartera por unidad de riesgo sistemático soportado medido por beta.

---

[6] Sharpe (1966).

[7] Treynor (1965).

• Índice de Jensen[8]:

$$J_i = (\mu_i - r_0) - (\mu^* - r_0) \cdot \beta_i$$

donde μ^* es el promedio de rentabilidad obtenido por la cartera de mercado.

Como puede verse, el índice de Jensen calcula la diferencia entre el exceso de rentabilidad obtenido por el título o cartera i con respecto al título sin riesgo y el exceso que debería haber obtenido según el CAPM.

Así, y tal como puede deducirse de lo comentado anteriormente, el índice de Sharpe responde del riesgo total, por lo que debe usarse para evaluar "carteras" con vocación de eliminar el riesgo diversificable. Son carteras en las que el inversor invierte sin tener que preocuparse de diversificar posteriormente.

Los índices de Treynor y Jensen se utilizan para valorar carteras poco diversificadas (o títulos individuales). En estos casos (como el de las carteras sectoriales, por ejemplo) la responsabilidad de la diversificación queda en manos del inversor.

Por otro lado, las medidas de Sharpe y Treynor se comparan con los correspondientes índices de la cartera de mercado. Esto tiene sentido (igual que en el caso de Jensen) si se supone que el mercado es suficientemente eficiente. En ocasiones, se usan otros términos de comparación, pero en este trabajo supondremos que el *benchmark* es la cartera de mercado, donde están todos los títulos que cotizan en el mercado, y suele aproximarse con un índice de bolsa.

De esta manera, supuesto un índice de *performance*, es mejor el fondo que toma mayor valor en dicho índice. Y comparando el índice del fondo con el del mercado podemos saber si ha merecido o no la pena la gestión activa (frente a la pura gestión pasiva, cuyo máximo exponente sería la compra de un índice de bolsa suficientemente representativo del conjunto[9]).

4.- EL CRITERIO M^2

Franco y Leah Modigliani han desarrollado el criterio M^2 (véase Modigliani y Modigliani, 1997), que, aun coincidiendo en el *ranking* con los resultados de Sharpe, es más fácil de entender. La idea es sencilla: el M^2 es la rentabilidad, apalancada o desapalancada, de un fondo,

[8] Jensen (1968 y 1969).

[9] Obsérvese que, en este contexto, estamos asociando la gestión pasiva a la estrategia clásica de "comprar y mantener" (*buy and hold*), lo que en el contexto de la teoría de cartera, supuestos enemigos del riesgo, nos llevaría a adquirir un índice representativo del mercado que permitiera eliminar todo el riesgo diversificable. Frente a esta estrategia, la gestión activa, que supondría analizar en cada momento la conveniencia de comprar y vender títulos, ajustando continuamente la cartera, sólo se justificará si con ella mejora la *performance* del fondo, es decir, si bate al mercado (después de considerar el riesgo asumido -y, evidentemente, los gastos correspondientes-).

de tal manera que tenga el mismo riesgo σ que el mercado, y sea comparable con la rentabilidad de éste último. Veámoslo más despacio.

Una cartera, un fondo de inversión, en un periodo de tiempo, ha dado lugar a una rentabilidad promedio μ_i y un riesgo σ_i.

Pero yo puedo apalancar o desapalancar esa cartera: si añado al fondo una cantidad d_i (positiva o negativa, en tanto por uno) de título sin riesgo, y llamando μ (i) y σ (i) a los valores correspondientes a la nueva cartera, tendré:

$$\mu (i) = \mu_i \cdot (1 + d_i) - d_i \cdot r_0$$
$$\sigma (i) = (1 + d_i) \cdot \sigma_i$$

Si igualamos la σ (i) a la σ^* (riesgo de la cartera de mercado) para que la nueva cartera tenga el mismo riesgo que el mercado y sean así comparables:

$$(1 + d_i) \cdot \sigma_i = \sigma^* \quad \rightarrow \quad d_i = \frac{\sigma^*}{\sigma_i} - 1$$

luego: $$M^2 = \mu (i) = \mu_i \cdot \frac{\sigma^*}{\sigma_i} - \left(\frac{\sigma^*}{\sigma_i} - 1 \right) \cdot r_0 = \frac{\sigma^*}{\sigma_i} \cdot (\mu_i - r_0) + r_0$$

M^2 sería por lo tanto la rentabilidad ajustada al riesgo, la rentabilidad de una cartera construida a partir de la original, apalancando o desapalancando para que tenga el mismo riesgo que el mercado; en consecuencia, M^2 es una medida de *performance* directamente comparable con la rentabilidad media del mercado μ^*.

Modigliani y Modigliani opinan que en base a M^2 podemos buscar la mejor cartera, y que luego el inversor, dependiendo del riesgo que desee, ajustará su cartera apalancando o desapalancando la cartera original, hasta conseguir el riesgo deseado. Hay por lo tanto una separación entre la decisión de elección de la cartera (que debería ser la misma para todos los inversores si tienen la misma información) y el riesgo que corre cada uno (lo que se conseguirá apalancando o desapalancando dicha posición).

El *ranking* obtenido por M^2 y por Sharpe es el mismo (tal como explicaremos a continuación a partir de la figura 1), la ventaja es que M^2 viene medido en puntos básicos (son rentabilidades), por lo que es más fácil de entender por el inversor medio.

En la figura 1 aparecen dos carteras (A y B), así como la cartera de mercado (R^*), con sus correspondientes valores de μ y σ. Trasladándonos a lo largo de las rectas que unen las carteras (A y B) con el título sin riesgo (r_0) -eso es apalancar o desapalancar- podemos, en cada caso, encontrar el punto con el mismo riesgo que la cartera de mercado (σ^*), lo que da lugar a los valores M_A^2 y M_B^2, que son las medidas de la *performance* de esas dos carteras. Estos valores se comparan entre sí y con μ^* para ver cuál es la mejor cartera.

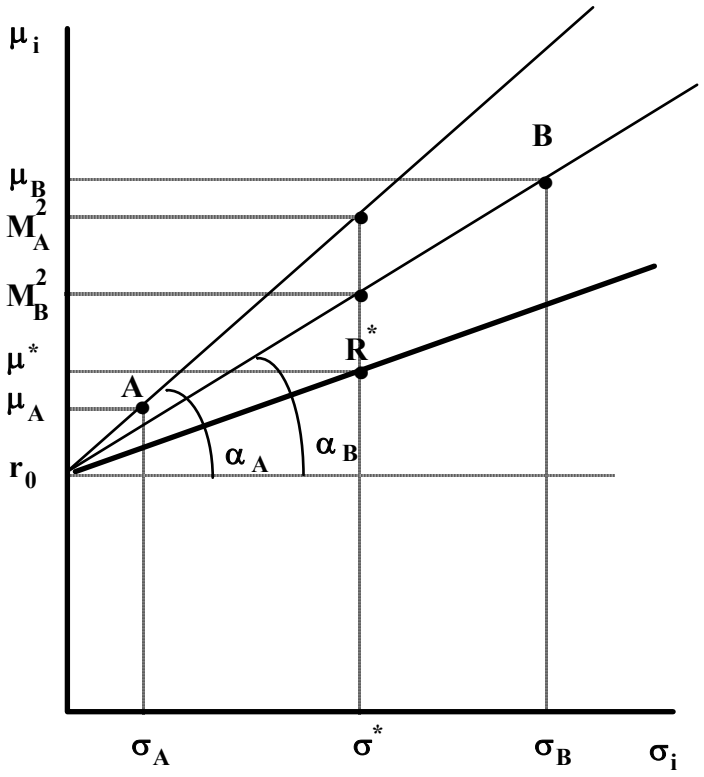


Figura 1

Aplicando el índice de Sharpe, que coincide para cada cartera con el valor de la tangente del ángulo indicado en la figura[10], llegamos a idéntico *ranking* de fondos que con el criterio M^2:

Sharpe: $$\text{tg}\,\alpha_A = \frac{\mu_A - r_0}{\sigma_A} > \text{tg}\,\alpha_B = \frac{\mu_B - r_0}{\sigma_B}$$

M^2: $$M_A^2 > M_B^2$$

[10] Es fácil comprobar que tg α_A es el valor del índice de Sharpe para la cartera A, y lo mismo sucede con tg α_B, que es el valor de dicho índice para la cartera B. Al ser el ángulo A mayor que el ángulo B, también lo será su tangente, y, en consecuencia, también será mayor el índice de Sharpe de A que el de B.

El argumento en el que se basa M^2 es muy fuerte, pues, en teoría, el apalancamiento siempre es posible. En consecuencia, siempre se podría conseguir, partiendo de la cartera A, una cartera con igual riesgo y mayor promedio que la cartera B.

5.- M^2 PARA BETA

Leah Modigliani (1997) propone una adaptación de M^2 para usar el riesgo sistemático en lugar del total: M^2 para beta, que da el mismo *ranking* que el índice de Treynor (tal como veremos en la figura 2). La idea es similar a M^2, apalancamos o desapalancamos la cartera para que tenga la misma beta que el mercado, comparando después las rentabilidades de las carteras resultantes. Partiendo de que β_i es la beta de una cartera, la apalancamos o desapalancamos para obtener la beta del mercado β^*:

$$\beta^* = (1 + d_i) \cdot \beta_i - d_i \cdot 0 \qquad (\beta_0 = 0 \longrightarrow \text{beta del título sin riesgo})$$

$$d_i = \frac{\beta^*}{\beta_i} - 1$$

y así podemos comparar en función del M^2 para beta; aplicando la fórmula de μ (i) del apartado anterior, y sustituyendo el valor de d_i que acabamos de calcular:

$$M^2 \text{ para beta} = (1 + d_i) \cdot \mu_i - d_i \cdot r_0 = \frac{\beta^*}{\beta_i} \cdot \mu_i - \left(\frac{\beta^*}{\beta_i} - 1 \right) \cdot r_0 =$$

$$= r_0 + \frac{\beta^*}{\beta_i} \cdot (\mu_i - r_0) = r_0 + \frac{(\mu_i - r_0)}{\beta_i}$$

para dar este último paso, es preciso recordar que el riesgo sistemático del mercado, β^*, vale siempre la unidad.

En la figura 2 planteamos como ejes el promedio (μ) y el riesgo sistemático (β), y aparecen así ubicadas unas carteras (A y B) y la cartera de mercado (R^*) con sus correspondientes valores de μ y β. Igual que ocurría en la figura 1, apalancar o desapalancar se traduce en trasladarnos en el gráfico a lo largo de las rectas que unen las carteras A y B con el título sin riesgo (r_0), con lo que podemos encontrar, en cada caso, el punto con la misma β que el mercado -que será la unidad-, lo que dará lugar a los valores de M^2 para beta de A y B, que son las medidas de *performance* de esas dos carteras.

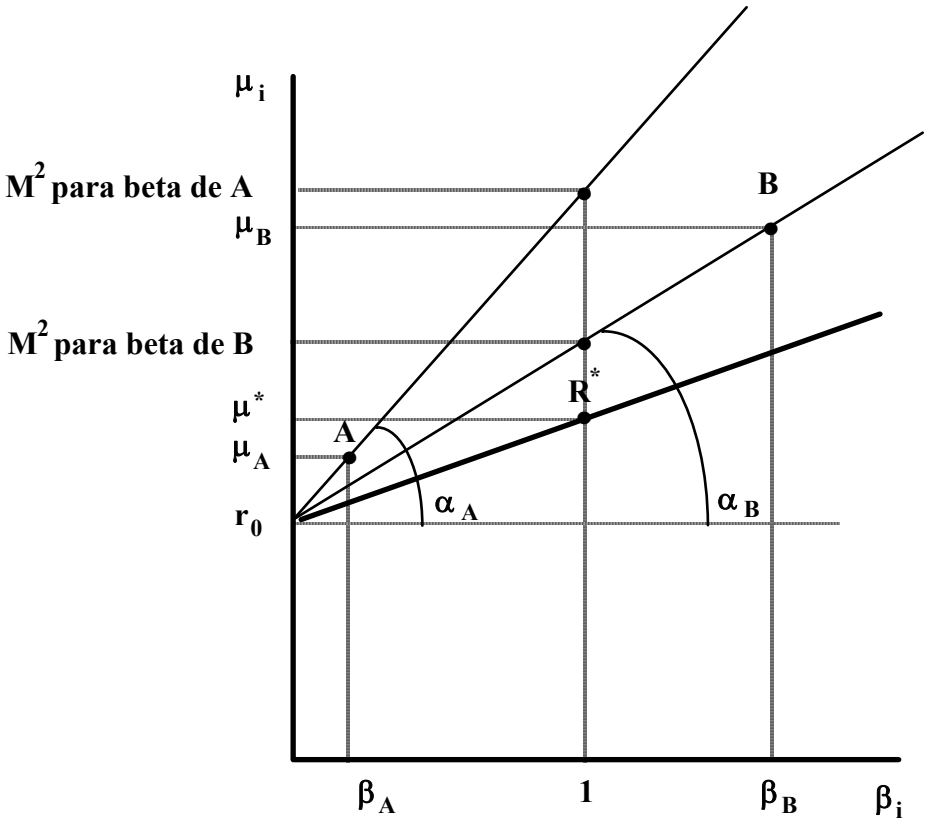


Figura 2

El índice de Treynor coincide con el valor de la tangente del ángulo α_A para la cartera A y del ángulo α_B para la B; con lo que es fácil comprobar que llegamos al mismo *ranking* utilizando Treynor o M^2 para beta:

$$\text{Treynor:} \qquad \text{tg}\,\alpha_A = \frac{\mu_A - r_0}{\beta_A} > \text{tg}\,\alpha_B = \frac{\mu_B - r_0}{\beta_B}$$

M^2 para beta de A > M^2 para beta de B

El M^2 para beta tiene ventajas similares al M^2: es un criterio que se basa en una cartera que se puede construir apalancando o desapalancando, y esto parece poco discutible, al menos en teoría; además, es más fácil de entender que Treynor, al medirse en puntos básicos. Respecto a esto último, el interés de las medidas M^2 y M^2 para beta (que técnicamente coinciden con Sharpe y Treynor, respectivamente) consiste fundamentalmente, a nuestro entender, en medirse como rentabilidades, lo que es mucho más fácil de comprender por el inversor medio que los premios por unidad de riesgo de Sharpe y Treynor, que gráficamente son tangentes.

Respecto a cuál de las dos medidas M^2 debemos utilizar, parece claro que M^2 para beta sería útil en los casos en que consideráramos Treynor interesante, por ser β el riesgo relevante, quedando M^2 para el caso en que lo relevante es el riesgo total.

Por otro lado, Leah Modigliani (1997) critica el α de Jensen (el índice de Jensen), que sería el criterio competidor de Treynor o de M^2 para beta por fijarse en el mismo riesgo relevante, pues opina que no se pueden comparar diferencias de rentabilidad cuando los riesgos son muy distintos. Esto quizá lo veamos luego más claro cuando hablemos del *tracking error*.

Leah Modigliani (1997) considera que el α de Jensen es correcto para valorar la *performance* de un fondo, pero no para hacer *rankings*. Sin embargo, M^2 para beta es una buena medida, pues primero iguala el riesgo -medido por beta- de las carteras (mediante el apalancamiento) y luego compara. Igual que en M^2, primero iguala los riesgos (en este caso para β=1), y luego compara los rendimientos. Dicho de otra manera, si una cartera A bate a una cartera B en una de las medidas M^2 (aquella que consideremos apropiada en función de cuál es el riesgo relevante), definido el nivel de riesgo deseado por el inversor, siempre se podrá construir partiendo de A una cartera que tenga ese riesgo y que supere en rentabilidad a la cartera con ese mismo riesgo construida a partir de B.

6.- EL *TRACKING ERROR*

Definiremos *tracking error* como la diferencia entre la rentabilidad que en un mes (u otro periodo básico) obtiene el fondo y la del *benchmark* (Roll, 1992). La variabilidad del *tracking error* es la dispersión de dichas diferencias.

Modigliani y Modigliani (1997) dicen que el "ratio de información" es una medida de *performance* que está ganando popularidad; lo definen como el cociente entre el *tracking error* medio y la variabilidad (σ) del *tracking error*. Puede comprobarse que, asumiendo distribuciones de probabilidad aproximadamente normales, el ratio de información nos indica la probabilidad de que el *tracking error* sea negativo, es decir, la probabilidad de que el fondo o cartera rinda menos que el *benchmark*[11].

El *tracking error*, y el ratio de información, son importantes para los gestores de carteras que suelen ser juzgados por su capacidad para batir al mercado (o a otro *benchmark*). Un ratio de

[11] Efectivamente, supuesto que el *tracking error* sigue una distribución normal de promedio μ_{TE} y desviación típica σ_{TE}, si queremos calcular la probabilidad de que el *tracking error* sea igual o menor que cero, tendremos que tipificar el valor correspondiente (0):

$$t_\alpha = \frac{0 - \mu_{TE}}{\sigma_{TE}}$$

donde t_α es en este caso el número de desviaciones típicas que el cero se aleja del promedio; siendo la probabilidad "α" a su izquierda tanto menor cuanto mayor sea (cambiado de signo) el valor obtenido de t_α. Obsérvese que el "ratio de información" coincide con el valor de t_α definido (cambiado de signo), y por tanto, a mayor ratio de información, menor probabilidad de que el *tracking error* sea negativo.

información alto indica que la probabilidad de caer por debajo del *benchmark* es muy baja, lo que dará tranquilidad al gestor. Sin embargo, Modigliani y Modigliani (1997) no lo consideran una buena medida de *performance*, al no tener en cuenta la totalidad del riesgo.

Muralidhar (2000) cree que medidas como M^2 o el índice de Sharpe ajustan por el riesgo, pero se olvidan del *tracking error*. Muralidhar (2000), cuando habla del *tracking error*, se refiere a lo que antes hemos denominado σ del *tracking error*, σ_{TE}, pero nosotros mantendremos nuestra nomenclatura. Cuando un fondo bate al mercado (ajustado por el riesgo) pero con una σ_{TE} importante, las probabilidades de que eso se haya producido por azar, o de que en el futuro nos encontremos por debajo del *benchmark*, son grandes; esta es una de las razones que hacen que la correlación entre la cartera a valorar y el *benchmark* sea importante. Por estas razones, Muralidhar (2000) propone que el inversor dé una σ_{TE} objetivo que quiere conseguir para su cartera, y forme una cartera compuesta por el fondo a valorar, el *benchmark* y el título sin riesgo, tal que se consiga para el conjunto la σ_{TE} requerida y la misma σ que el *benchmark*. A la rentabilidad de esta nueva cartera la denomina r (CAP) -*Correlation-adjusted portfolio*-, y es la medida que utiliza para hacer el *ranking*, que no tiene por qué coincidir con M^2. Muralidhar (2001) confirma la idea de que su trabajo anterior, además de un sistema de *ranking*, permite una forma de inversión inteligente en la que se construye una cartera compuesta por un fondo, el *benchmark* (lo que identifica con gestión pasiva) y el título sin riesgo, que tiene una σ_{TE} controlada y la misma σ que el *benchmark*. Además, extiende su trabajo anterior a la selección de un conjunto de fondos.

Roll (1992) habla de buscar la cartera con mínima σ^2_{TE} para un determinado *tracking error* esperado. Esto sería, sin duda, interesante para los gestores de carteras.

7.- LA TRIP

A mediados de los años ochenta, el profesor Gómez-Bezares planteaba el criterio VAP (Valor Actualizado Penalizado), que frente a los criterios clásicos de tratamiento del riesgo (ajuste del tipo de descuento y equivalente de certeza), proponía penalizar directamente el promedio del VAN (Valor Actualizado Neto) con su desviación típica[12]; y de entre las diferentes formas posibles de penalización, el autor se decanta por la penalización lineal[13]. En los años posteriores, hemos venido trabajando en el Departamento de Finanzas de la Universidad Comercial de Deusto sobre esta idea original[14].

De esta manera, en una comunicación presentada al III Foro de Finanzas celebrado en los meses de noviembre y diciembre de 1995 en la Universidad Comercial de Deusto (Bilbao), tratábamos de desarrollar un criterio apoyado en la idea anterior, la TRIP (Tasa de Rentabilidad Interna Penalizada), coherente con ella, y que trataba de conectarlo con los criterios clásicos de

[12] Véase Gómez-Bezares (1984).

[13] Para un mayor detalle, véase, por ejemplo, Gómez-Bezares (2002, capítulo 6), o Gómez-Bezares (1993).

[14] Pueden verse, a modo de ejemplo, Gómez-Bezares (1991, cap. X), Santibáñez (1995) o, desde un punto de vista más práctico, Santibáñez y Gómez-Bezares (1999, cap. 7).

tratamiento de la decisión de inversión en condiciones de riesgo que citábamos anteriormente (ajuste del tipo de descuento y equivalente de certeza)[15]. Lo que intentamos ahora es conectar la TRIP con otra línea interesante de trabajo desarrollada en Finanzas a la que hemos hecho referencia anteriormente, la Teoría de cartera, así como con uno de los modelos desarrollados a partir de aquella (el *Capital Asset Pricing Model*) y con las medidas de *performance* más utilizadas, y que encuentran su justificación en los modelos citados.

Para enemigos del riesgo podemos considerar que la rentabilidad equivalente cierta se consigue "penalizando" la rentabilidad esperada en función de la desviación típica de la rentabilidad, y nosotros proponemos una penalización lineal.

Supongamos un fondo de inversión que a lo largo del tiempo ha obtenido una determinada rentabilidad media μ_{TRI} (promedio de su Tasa de Rentabilidad Interna -TRI-, donde la TRI es simplemente la rentabilidad de cada periodo básico de análisis, como puede ser el mes), con un determinado riesgo σ_{TRI}[16]. La penalización que proponemos consistirá en restar al promedio de rentabilidad (μ_{TRI}) un valor "t" de desviaciones típicas (σ_{TRI}), dando lugar a la TRIP, tal como se ve en la siguiente fórmula:

$$TRIP = \mu_{TRI} - t \cdot \sigma_{TRI}$$

La TRIP sería, en nuestra interpretación, el valor equivalente cierto de la rentabilidad de una inversión caracterizada por que su rentabilidad sigue una distribución con promedio μ_{TRI} y desviación σ_{TRI}. Es decir, para el inversor enemigo del riesgo, le es indiferente la citada inversión, o una inversión segura (por eso la denominamos equivalente cierto) de rentabilidad TRIP. En consecuencia, lo que proponemos es que el *ranking* de fondos se haga en base a esta nueva medida de *performance*, la TRIP. El inversor podrá graduar la t en función de su mayor o menor aversión al riesgo[17].

Pero podemos entender que el mercado ya nos está proponiendo un valor de t. En efecto, sabiendo que los agentes, en un mercado eficiente y siguiendo la teoría de cartera (puede verse Gómez-Bezares, 2000, cap. 3), invertirían en título sin riesgo (r_0), en cartera de mercado (μ^*, σ^*) o en combinaciones de ambos, según sus preferencias, creemos que no es un desatino suponer que para el mercado en su conjunto el título sin riesgo es el "equivalente cierto" de la cartera de mercado, es decir, en nuestro lenguaje, la TRIP; luego, aplicando la fórmula:

---

[15] Laka y Santibáñez (1995). Pueden encontrarse aquí las hipótesis de partida del criterio, la justificación teórica, y la coherencia del mismo con los mencionados criterios clásicos de tratamiento del riesgo.

[16] Si la riqueza final obtenida con una inversión en un periodo de tiempo sigue la distribución normal, la rentabilidad, la TRI, seguirá también la normal (puede verse Gómez-Bezares, 1991, pág. 114).

[17] Puede demostrarse que esta forma de penalización lineal es equivalente a utilizar rectas de indiferencia (puede verse Gómez-Bezares, 2002, págs. 286 y ss), lo que es una simplificación, pues lo correcto es manejar curvas de indiferencia (puede verse, por ejemplo, Gómez-Bezares, 1991, págs. 114 y ss, y también págs. 283 y ss); esto da lugar a que el criterio TRIP sea más discutible cuanto más diferentes son los riesgos de las inversiones que comparamos. Por otro lado, si la TRI sigue la normal, el valor del parámetro "t" sirve para indicarnos las probabilidades de que la TRI realmente obtenida quede por debajo de la TRIP.

$$r_0 = \mu^* - t \cdot \sigma^*$$

y despejando:

$$\frac{\mu^* - r_0}{\sigma^*} = t$$

que es el valor del índice de Sharpe del mercado (y nos indica el premio por unidad de riesgo medido por σ que pide dicho mercado). En consecuencia, podemos suponer que el índice de Sharpe del mercado es el valor del parámetro de penalización t, y tendremos:

$$TRIP = \mu_{TRI} - \left(\frac{\mu^* - r_0}{\sigma^*} \right) \cdot \sigma_{TRI}$$

El criterio TRIP puede discrepar, a la hora de hacer un *ranking* de fondos, con el índice de Sharpe -que también utiliza el riesgo total para penalizar- y, en consecuencia, con M^2, tal como puede verse en la figura 3.

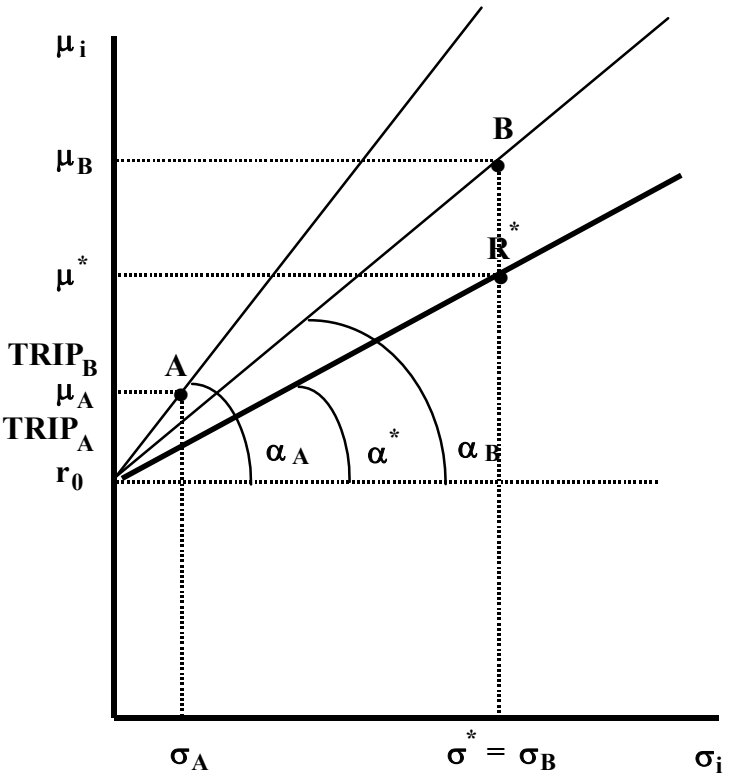


Figura 3

En dicha figura 3 tenemos unas carteras A y B y la cartera de mercado (R^*) con sus correspondientes valores de μ y σ. El índice de Sharpe coincide con el valor de la tangente del ángulo correspondiente a cada cartera (α_A, α_B, α^*), y el valor de las TRIPs aparece gráficamente en el corte con el eje de ordenadas de la recta (punteada en la figura), que siendo paralela a la recta que une R^* con r_0[18] pasa por la cartera correspondiente (A ó B). Vemos cómo el *ranking* de Sharpe y de TRIP discrepan en este caso:

$$\text{Sharpe:} \qquad \text{tg}\,\alpha_A = \frac{\mu_A - r_0}{\sigma_A} > \text{tg}\,\alpha_B = \frac{\mu_B - r_0}{\sigma_B}$$

$$\text{TRIP:} \qquad TRIP_B > TRIP_A$$

A favor del criterio TRIP juega el hecho de que la penalización es lineal, lo que tiene importantes ventajas[19]. Y también el que, al igual que M^2, da la *performance* en puntos básicos, lo que es más fácil de entender para el inversor medio.

Sin embargo, a favor del criterio M^2, y por lo tanto del *ranking* de Sharpe, está el que, por el sistema de apalancamiento o desapalancamiento, se puede conseguir una cartera (a partir de la primera del *ranking*) que sin duda domine a las otras. Volviendo a la figura 3, apalancando A está claro que se puede superar a B (situándose, por ejemplo, con el mismo riesgo y mayor rentabilidad), aunque $TRIP_B > TRIP_A$. Pero esto creemos que, aunque parece un argumento fuerte, no es definitivo: en efecto, el que los fondos A y B hayan quedado como lo han hecho en la figura, sólo permitiría al inversor apalancar A para superar a B si a priori hubiera conocido tal situación, pero eso no sucede así cuando juzgamos fondos a posteriori. Por otro lado, las posibilidades reales de apalancamiento no son ilimitadas, ni su coste es r_0, que es lo que suponen Modigliani y Modigliani.

Leah Modigliani (1997), al criticar el índice de Jensen, está criticando en realidad la penalización lineal, por lo que su crítica se podría extender a la TRIP. El problema podemos comentarlo desde la perspectiva del *tracking error*; inversiones con alto riesgo, si no están muy correlacionadas con el *benchmark*, tendrán una alta σ_{TE} y podrá ocurrir que una TRIP alta se dé por azar y que, con una gestión similar, una TRIP alta un año pase a ser baja al año siguiente. Esta dificultad es cierta, y la asumimos como tal. Creemos que podría arreglarse utilizando parámetros de penalización t crecientes conforme aumenta la variabilidad de la TRIP.

Para ilustrar las diferencias que pueden aparecer entre los *rankings* obtenidos con las diferentes medidas, pensamos que puede ser interesante incluir aquí el cuadro ofrecido por Modigliani y Modigliani (1997, pág. 50), añadiendo a sus cálculos los correspondientes a la

[18] En consecuencia, la pendiente de las rectas punteadas coincide con la de la que une R^* con r_0, que es el índice de Sharpe del mercado y, por lo tanto, el valor t que proponíamos.

[19] La penalización por cociente, como hace Sharpe, si suponemos distribuciones normales, equivale a hacer el *ranking* en función de la probabilidad de que la rentabilidad sea menor que r_0; cuanto menor es esa probabilidad, mejor sería el fondo. Esto, así dicho, parece discutible, pues a un inversor eso no es lo único que le preocupa: un fondo con una probabilidad de que su rentabilidad caiga por debajo de r_0 de una millonésima, no es necesariamente peor que otro que tenga para ese caso una probabilidad de una diezmillonésima.

TRIP. Para ello, es preciso calcular el valor de "t" a utilizar; tal como indicábamos anteriormente, entenderemos que dicho valor nos lo proporciona el propio mercado:

$$t \text{ (en base anual)} = \frac{\mu^* - r_0}{\sigma^*} = \frac{14{,}1 - 5{,}5}{7{,}2 \cdot 2} = 0{,}5972222$$

donde los datos los hemos tomado del propio artículo citado: el tipo de interés sin riesgo (r_0) viene dado por el rendimiento anual de la renta fija del estado (*T-Bill*); y el rendimiento medio y el riesgo (anualizado) del mercado (μ^* y σ^*, respectivamente) los hemos asociado a los valores ofrecidos por el S&P 500, índice que el artículo toma como referencia de mercado. Así, los resultados obtenidos son los siguientes:

Fondo	Rentabilidad Promedio (anualizada)	Desviación típica de rentabilidad	Índice de Sharpe (trimestral)	*Risk-adjusted Performance* (anual)	TRIP (anual)
S&P 500	14,1	7,2	0,30	14,1	5,5
AIM Constellation	19,7	12,3	0,29	13,9	5,01
20th Century Vista Investors	16,7	14,0	0,20	11,3	- 0,02
T. Rowe Price New Horizon	16,0	11,3	0,23	12,2	2,50
Fidelity Magellan	15,4	8,6	0,29	13,8	5,13
Vanguard Windsor	13,0	7,5	0,25	12,7	4,04
Fidelity Puritan	12,0	4,7	0,34	15,4	6,39
Income Fund of America	11,3	4,0	0,36	15,9	6,52
T-Bill	5,5				

Obsérvese que se producen algunas diferencias (mínimas en este caso, y referidas a los fondos clasificados en tercer y cuarto lugar) entre los *rankings* obtenidos por Sharpe (coherente con la medida propuesta por Modigliani y Modigliani, el RAP -*Risk-Adjusted Performance*-, que nosotros hemos llamado M^2, al igual que otros autores) y el que reporta la TRIP, debidas a las razones comentadas anteriormente.

Una adaptación interesante de la TRIP es la TRIP para beta, que penalizaría en función de beta:

$$\text{TRIP para beta} = \mu_{TRI} - t' \cdot \beta_{TRI}$$

Haciendo una suposición similar a la que hacíamos antes, podemos entender que la t' nos la marca el mercado con el índice de Treynor de dicho mercado:

$$t' = \frac{\mu^* - r_0}{\beta^*} = \frac{\mu^* - r_0}{1}$$

luego:

$$\text{TRIP para beta} = \mu_{TRI} - (\mu^* - r_0) \cdot \beta_{TRI}$$

por lo que vemos claramente que el *ranking* al que lleva TRIP para beta es el mismo que el de Jensen, con sus ventajas e inconvenientes.

8.- COMENTARIOS FINALES

Hemos repasado en este trabajo los índices clásicos de *performance* y los hemos comparado con algunos de los aparecidos en los últimos años, a la vez que hemos planteado un nuevo criterio, la TRIP, en sus versiones de riesgo total y para beta. Sin duda puede haber argumentos a favor de uno u otro sistema de medir la *performance*, y creemos que una ventaja importante es la sencillez de la medida y la facilidad de comprensión de sus resultados por el inversor medio. Por otro lado, pensamos que la penalización lineal propuesta por la TRIP tiene ventajas sobre un sistema de cociente como el M^2.

Una pregunta que debemos hacernos es por qué un fondo bate al mercado, después de ajustar por el riesgo. Una razón puede ser el que sus gestores son más habilidosos, y eso es lo que tratan de detectar los índices de *performance*, pero también puede ocurrir que se bata por suerte, por lo que es muy importante el estudio del *tracking error*.

En ocasiones, y para periodos cortos, pueden darse situaciones anómalas, como que $r_0 > \mu^*$, lo que puede dificultar la interpretación de los índices, pero no entraremos ahora en ello[20].

BIBLIOGRAFÍA

AMIHUD, Y. y H. MENDELSON (1991): "La liquidez y rentabilidad de las acciones", *Análisis financiero*, 55, págs. 24-29.

FERRUZ, L. y J.L. SARTO (1997): "Revisión crítica de las medidas clásicas de performance de carteras y propuesta de índices alternativos. Aplicación a fondos de inversión españoles (1990-1995)", *Boletín de Estudios Económicos*, Vol. LII, no. 162, Diciembre, págs. 549-573.

[20] Puede verse, en relación con el problema planteado, Ferruz y Sarto (1997), donde se proponen otras medidas alternativas a las clásicas, y que tratan de superar dicho problema.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1984): "Algunos modelos básicos para la selección de inversiones con flujos relacionados", *XIV Congreso de la SEIO*, Caja de Ahorros de Granada, Granada, vol. 1, págs. 40-51.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1991): *Dirección financiera*, Desclée de Brouwer, Bilbao, 2ª ed.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1993): "Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions", en Aggarwal, ed., *Capital budgeting under uncertainty* (1993), Prentice - Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, págs. 91-102.

GÓMEZ-BEZARES, F. (2000): *Gestión de Carteras,* Desclée de Brouwer, Bilbao, 2ª ed.

GÓMEZ-BEZARES, F. (2002): *Las decisiones financieras en la práctica*, Desclée de Brouwer, Bilbao, 8ª ed.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2001): "La decisión de inversión en entornos de riesgo", *Estudios Empresariales*, nº 107, Tercer Cuatrimestre, págs. 22-37.

JENSEN, M.C. (1968): "The performance of mutual funds in the period 1945-1964", *Journal of finance*, Mayo, págs. 389-416.

JENSEN, M.C. (1969): "Risk, the pricing of capital assets, and the evaluation of investment portfolios", *Journal of business*, Abril, págs. 167-247.

LAKA, J.P. y J. SANTIBAÑEZ (1995): "Algunas reflexiones sobre el Valor Actualizado Penalizado (VAP)", Comunicación presentada en el *III Foro de Finanzas*, Bilbao, Noviembre-Diciembre. Publicada en Gómez-Bezares, F. y J.V. Ugarte, ed., *III Foro de Finanzas (1995)*, Bilbao, págs. 75-91.

MODIGLIANI, L. (1997): "Don't Pick Your Managers By Their Alphas", *U.S. Investment Research, U.S Strategy*, Morgan Stanley Dean Witter, June.

MODIGLIANI, F. and L. MODIGLIANI (1997): "Risk-Adjusted Performance", *Journal of Portfolio Management*, vol. 23, no. 2, Winter, pp. 45-54.

MURALIDHAR, A. (2000): "Risk-Adjusted Performance: The Correlation Correction", *Financial Analysts Journal*, vol. 56, no. 5, September/October, pp. 63-71.

MURALIDHAR, A. (2001): "Optimal Risk-Adjusted Portfolios with Multiple Managers", *Journal of Portfolio Management*, vol 27, no. 3, Spring, pp. 97-104.

ROLL, R. (1992): "A Mean/Variance Analysis of Tracking Error", *Journal of Portfolio Management*, vol. 18, no. 4, Summer, pp. 13-22.

SANTIBAÑEZ, J. (1995): "El tratamiento del riesgo en la decisión de inversión: VAP y distribuciones no conocidas", *Boletín de Estudios Económicos*, 154, Abril, págs. 119-140.

SANTIBAÑEZ, J. y F. GOMEZ-BEZARES (1999): *Ejercicios de Teoría y Política Financiera*, Desclée de Brouwer, Bilbao.

SHARPE, W.F. (1966): "Mutual fund performance", *Journal of business*, Enero, págs. 119-138.

TREYNOR, J.L. (1965): "How to rate management of investment funds", *Harvard business review*, Enero-Febrero, págs. 63-75.

ÍNDICES DE *PERFORMANCE*, GESTIÓN ACTIVA Y EFICIENCIA. UN ANÁLISIS EMPÍRICO

por F. Gómez-Bezares, J.A. Madariaga, J. Santibáñez y A. Apraiz
Publicado en *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, vol. 16, nº 2, 2007, págs. 21-40

INTRODUCCIÓN

Según un viejo y conocido aforismo bursátil, son interesantes las inversiones que cumplen con unas condiciones adecuadas en términos de rentabilidad, riesgo y liquidez. Si nos centramos en las inversiones financieras, y supuestos mercados suficientemente competitivos, ágiles y eficientes, la liquidez podría considerarse suficiente, con lo que el análisis de dichas inversiones debería centrarse en el binomio rentabilidad – riesgo. Este es el punto de partida de los modernos planteamientos teóricos en finanzas (como la teoría de cartera y los modelos que se desarrollan sobre la base de la misma), que han estudiado ampliamente dicha relación, produciéndose avances interesantes desde comienzos de los años cincuenta hasta nuestros días.

Desde un punto de vista teórico, suele aceptarse que los individuos nos comportamos como enemigos del riesgo, lo que significa que sólo estaremos dispuestos a asumir riesgos si esperamos ser premiados por ello. Así, las rentabilidades de los títulos o carteras no pueden ser comparadas sin tener en cuenta el riesgo asumido, lo que nos devuelve al estudio del binomio rentabilidad – riesgo.

En línea con todo lo anterior, y desde un punto de vista práctico, el proceso de globalización que a todos los niveles ha venido produciéndose en los últimos años no habría sido posible sin los avances tecnológicos recientes, y de manera especialmente importante en el terreno financiero, los acaecidos en el mundo informático, que permiten agilizar enormemente las transacciones y conectar inversores y mercados situados en lugares remotos, lo que redunda en una mayor eficiencia de los mercados, a la vez que amplía las posibilidades de diversificación de riesgos. De esta manera, la realidad nos lleva nuevamente al análisis del binomio promedio – riesgo de rentabilidad en el análisis de la *performance* (o desempeño) de títulos, carteras, fondos, e incluso, de los gestores de fondos.

Existen medidas clásicas que tratan de evaluar y clasificar la *performance* de títulos y carteras en función de la rentabilidad obtenida, convenientemente ajustada por el riesgo. En este sentido, son conocidos y frecuentemente utilizados los índices clásicos de Sharpe (1966), Treynor (1965) y Jensen (1968 y 1969). Más recientemente, los trabajos de Modigliani (1997) y Modigliani y Modigliani (1997), permiten introducir matizaciones interesantes sobre las medidas clásicas, apareciendo las medidas M^2 y M^2 para beta, que permiten fundamentalmente una comprensión y utilización más sencilla y clara de los índices de Sharpe y Treynor. De especial interés son las

aportaciones aún más recientes de Muralidhar (2000 y 2001), que permiten considerar además los efectos del *tracking error*, siempre con la intención de mejorar la evaluación de la *performance* de fondos y carteras, y por ende, las decisiones de cara al futuro del gestor de carteras.

También nosotros hemos venido trabajando en los últimos años en esta misma línea. Así, en algunos de nuestros últimos trabajos (Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 2003 y 2004) proponíamos algunas medidas adicionales que, apoyadas en los planteamientos de la Teoría de cartera y en los modelos que se han construido sobre ella, tratan de complementar el análisis de la *performance* de títulos, carteras y fondos.

El objetivo del presente trabajo es analizar las ventajas e inconvenientes que dichas medidas pueden plantear frente a las clásicas desde un punto de vista estrictamente empírico. Así, estudiaremos la coherencia de las clasificaciones obtenidas según los distintos índices, así como las ventajas e inconvenientes de cada una de ellas, analizando las posibilidades de batir al mercado con estas herramientas. De alguna manera, puede también considerarse el análisis como un estudio de la eficiencia de los mercados (en concreto, de la eficiencia en sentido débil), en la medida en que si es posible batir al mercado utilizando las clasificaciones obtenidas a partir de los índices de *performance*, estaríamos justificando una gestión activa de las carteras y fondos en base a información puramente histórica.

DESCRIPCIÓN DE LA BASE DE DATOS, ANÁLISIS DE LAS RENTABILIDADES Y OTROS ELEMENTOS PREVIOS

Descripción de la base de datos y obtención de las rentabilidades mensuales de los fondos y de la cartera de mercado

Tomamos en un primer paso las rentabilidades semanales de 983 fondos de renta variable comercializados en Europa en el periodo comprendido entre febrero de 1999 y octubre de 2005[1]. Y elegimos como tipo de interés sin riesgo el asociado al índice confeccionado por AFI como media de los fondos comercializados en España que invierten su dinero en activos del mercado monetario (también semanal) en la zona euro durante el mismo periodo de tiempo considerado. Puede ser interesante también indicar, para comprender mejor algunas decisiones adoptadas posteriormente, que las rentabilidades de los fondos incluyen reinversión (en su caso) de los dividendos y tienen en cuenta los efectos de las comisiones. A partir de los datos anteriores, se construyó la rentabilidad de lo que consideramos como "cartera de mercado" (que como veremos

[1] Quedan así fuera del estudio todos aquellos fondos que no presenten la antigüedad indicada; también fueron eliminados algunos que presentaban "huecos" en la información disponible. Con todo, puede considerarse la muestra como extraordinariamente representativa de los fondos de renta variable comercializados a nivel europeo. En concreto, se recogen prácticamente todos los fondos, que no han sido eliminados por lo anteriormente expuesto, comercializados en Bélgica, Francia, Alemania, Irlanda, Italia, Luxemburgo, Holanda, España, Suiza y Reino Unido.

después, actuará como *benchmark* a todos los efectos) como media aritmética simple (no ponderada) de todos los fondos de renta variable considerados[2].

A la vista de algunas conclusiones obtenidas en el análisis de periodos anteriores (véase por ejemplo, Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 1994, entre otros), relativas a una mejor adaptabilidad de los modelos que constituyen la base de los índices de *performance* que analizaremos posteriormente, decidimos trabajar con las rentabilidades mensuales de los distintos fondos, para lo que consideramos periodos de cuatro semanas (lo que significa que obtenemos 13 rentabilidades mensuales para cada fondo -y para el índice de mercado y el título sin riesgo- y año completo). El cálculo se realizó simplemente acumulando las rentabilidades semanales correspondientes bajo la hipótesis de interés compuesto:

$$\text{Rentabilidad}_{i,\,periodo\ mensual\ j} = \prod_{t=1}^{t=4}(1 + R_{it}) - 1$$

donde R_{it} es la rentabilidad del fondo i en la semana t y R_{ij} es la rentabilidad del fondo i en el mes j. El proceso descrito nos permite disponer de un total de 88 rentabilidades mensuales en todo el periodo considerado. Todas las rentabilidades están calculadas en euros.

El tracking error. Determinación del benchmark

A continuación, calculamos también el *tracking error*, tomando como *benchmark*[3] la cartera de mercado calculada previamente de acuerdo a lo indicado (media aritmética simple de las rentabilidades de todos los fondos de renta variable considerados). Como es sabido, el *tracking error* no es otra cosa que la diferencia entre la rentabilidad del fondo y la del *benchmark* en un determinado periodo[4]:

$$TE_{ij} = R_{ij} - R_{mj}$$

donde TE_{ij} es el *tracking error* obtenido por el fondo i en el mes j, y R_{ij} y R_{mj} son, respectivamente, las rentabilidades del fondo i y el mercado en dicho mes j.

Periodos analizados. División del periodo total estudiado

El siguiente paso consiste en descomponer el periodo total 1999-2005 en dos subperiodos: el primero de ellos (99-02) lo utilizaremos para realizar diferentes cálculos y estimaciones (tanto de las rentabilidades promedio y riesgo -sistemático y total-, como de los diferentes índices

[2] Es bastante frecuente utilizar como *benchmark* índices del tipo Eurostoxx 50 (o, en nuestro caso, y dado que consideramos fondos comercializados en toda Europa y no sólo en la zona euro, el índice compuesto por los cincuenta títulos más importantes a nivel europeo); nosotros entendemos que es más coherente utilizar la aproximación propuesta, ya que en caso contrario se introduciría una distorsión provocada por los dividendos (que no son considerados en dichos índices); más discutible es el tema de las comisiones, en el sentido de que si pretendemos comparar una gestión activa frente a otra pasiva, éstas serían un elemento diferencial.

[3] Entendemos, como es habitual, que el *benchmark* es la referencia con respecto a la que mediremos la "calidad" de los fondos; es decir, como cartera a batir.

[4] Roll (1992). Si bien algunos autores utilizan el término *tracking error* para referirse a la desviación típica de dicha diferencia entre las rentabilidades del fondo y el mercado, nosotros nos decantamos por la definición propuesta; y hablaremos de σ de *tracking error* para referirnos a la desviación típica indicada.

estudiados) que nos permitirán realizar la clasificación de los fondos en función de cada índice, con la intención de analizar la relación entre todas ellas, las ventajas e inconvenientes que en su caso pudieran presentar, y las posibilidades de diseñar estrategias que nos lleven, si ello es posible, a batir al mercado en el segundo subperiodo (03-05).

Medidas de estadística descriptiva y análisis de las distribuciones de rentabilidades mensuales

Una vez realizada la partición del periodo total, obtenemos algunas medidas importantes de estadística descriptiva (para cada uno de los dos subperiodos y para el periodo total), relativas a las rentabilidades de los diferentes fondos, la cartera de mercado y el título sin riesgo: concretamente, promedio y desviación típica de rentabilidad (que utilizaremos como medida del riesgo total del fondo), así como los coeficientes a_3 y a_4 de asimetría y curtosis, respectivamente.

- **Promedio de rentabilidad** mensual del fondo i (μ_i):

$$\mu_i = \sum_{j=1}^{j=n} \frac{R_{ij}}{n}$$

donde R_{ij} es la rentabilidad del fondo i en el mes j, y n es el número total de meses del periodo correspondiente (51 en el primer subperiodo; 37 en el segundo; y 88 si nos referimos al periodo total).

- **Desviación típica (riesgo total)** de rentabilidad mensual del fondo i (σ_i):

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{j=n} \frac{(R_{ij} - \mu_i)^2}{n}}$$

- **Coeficiente a_3 de asimetría** de la distribución de rentabilidades mensuales del fondo i:

$$a_{3i} = \frac{\sum_{j=1}^{j=n} (R_{ij} - \mu_i)^3 \Big/ n}{\sigma_i^3}$$

- **Coeficiente a_4 de curtosis** de la distribución de rentabilidades mensuales del fondo i:

$$a_{4i} = \frac{\sum_{j=1}^{j=n} (R_{ij} - \mu_i)^4 \Big/ n}{\sigma_i^4} - 3$$

El siguiente paso consistía en estudiar la forma de las distribuciones de rentabilidad. Para que cualquier planteamiento apoyado en la teoría de cartera tenga todo su sentido es importante que las rentabilidades estén normalmente distribuidas: sólo en ese caso (salvo que se produjeran una

serie de curiosas coincidencias) estaría justificado tomar decisiones en función únicamente de μ y σ.

Para contrastar la normalidad de las distribuciones de rentabilidades mensuales decidimos utilizar un contraste empleado de manera creciente, el test de Jarque-Bera, que se centra en la estimación del estadístico:

$$JB = \frac{n}{6} \cdot \left(a_3{}^2 + \frac{a_4{}^2}{4} \right)$$

donde n es el número total de observaciones (en nuestro caso, y tal como indicábamos anteriormente, el número de rentabilidades mensuales en cada periodo estudiado -51 en el primer subperiodo, 37 en el segundo, y 88 en el periodo total-); y a_3 y a_4 son los coeficientes de asimetría y curtosis, respectivamente (ambos definidos anteriormente), siempre en el periodo considerado. El estadístico JB sigue una *Chi cuadrado* con dos grados de libertad (para n > 200, desde un punto de vista estricto; aunque la aproximación puede considerarse aceptable para valores de n inferiores, como el nuestro). Desde un punto de vista teórico estricto, habría que decir que este test contrasta simultáneamente si la distribución es simétrica y mesocúrtica, lo que suele considerarse como suficiente para aceptar la hipótesis de normalidad (sobre todo a nuestros efectos).

Estimación del modelo de mercado y de las ecuaciones fundamentales de la teoría de cartera y el CAPM

Aceptada la normalidad de las distribuciones de rentabilidades[5] (lo que es coherente con muchos estudios previos; véase, por ejemplo, Fama, 1976, o más recientemente, Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 1994, entre otros) y eliminados los fondos que no cumplen con la hipótesis, procedemos a estimar el modelo de mercado para cada fondo y periodo analizados. El modelo de mercado consiste en estimar la ecuación de la Línea Característica del Título (LCT):

$$R_{ij} = \alpha_i + \beta_i \cdot R_{mj} + \varepsilon_{ij}$$

donde α_i y β_i son la ordenada y pendiente de la recta de regresión que mejor se ajusta a la nube de puntos formada por las rentabilidades mensuales de cada fondo en relación al mercado; R_{ij} y R_{mj} son las rentabilidades del fondo y el mercado, respectivamente, en el mes j; y ε_{ij} es el término de error o perturbación aleatoria. La estimación del modelo por la técnica de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) nos lleva a la siguiente formulación:

$$\beta_i = \frac{COV\left(R_i, R_m\right)}{\sigma_m^2}$$

donde COV (R_i , R_m) es la covarianza entre las rentabilidades del fondo i y el mercado, y σ^2_m es la varianza de la rentabilidad del mercado. La covarianza señalada se calcula con la fórmula clásica:

[5] Como veremos posteriormente.

$$COV\,(R_i\,,R_m)=\frac{\sum_{j=1}^{j=n}(R_{ij}-\mu_i)\cdot(R_{mj}-\mu_m)}{n}$$

donde μ_m es el promedio de rentabilidad de la cartera de mercado en el periodo estudiado. También es fácil obtener el coeficiente de correlación de Pearson (ρ_{im}) entre las rentabilidades de cada fondo y el mercado:

$$\rho_{im}=\frac{COV\,(R_i\,,R_m)}{\sigma_i\cdot\sigma_m}$$

El coeficiente β_i propuesto es la medida del riesgo sistemático del fondo (el que no puede eliminarse por diversificación) según el modelo. En cuanto a la ordenada en el origen del ajuste, ésta se calcula mediante la expresión:

$$\alpha_i=\mu_i-\beta_i\cdot\mu_m$$

Recordemos ahora que, según la teoría de cartera, existiría un premio por unidad de riesgo total, que sería el asociado a la cartera de mercado (en relación al título sin riesgo). Dicho premio aparecería reflejado en la ecuación de la Línea del Mercado de Capitales (LMC):

$$\mu_i=r_0+\frac{\mu_m-r_0}{\sigma_m}\cdot\sigma_i$$

donde r_0 es la rentabilidad del título sin riesgo, y el resto de nomenclatura ha sido definida anteriormente. En dicha LMC se situarían todas las carteras eficientes, es decir, aquellas que sólo tienen riesgo sistemático (combinaciones entre la cartera de mercado -que incluye todas las inversiones con riesgo existentes en el mercado, y con los pesos que éstas tienen sobre el total- y título sin riesgo). Sobre la base de lo anterior, el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) propone la ecuación de valoración fundamental del modelo, que puede expresarse en la Línea del Mercado de Títulos (LMT):

$$\mu_i=r_0+(\mu_m-r_0)\cdot\beta_i$$

Según el modelo, todos los títulos y carteras (y los fondos, evidentemente) deberían ajustarse exactamente a la LMT.

Estudio de la estabilidad de las betas del modelo de mercado

Es frecuente utilizar información histórica para aproximar los valores de determinadas variables que posteriormente nos ayuden a tomar mejor las decisiones en el futuro (sería el caso, por ejemplo, del promedio y riesgo de un fondo); y para que ello esté justificado, es importante que sea aceptable que dichos parámetros se mantienen de manera razonable en el tiempo. En este sentido, es importante que exista una estabilidad suficiente en las betas, la medida del riesgo

sistemático según el modelo. Para testar este extremo utilizamos el test de Chow, que exige calcular el estadístico[6]:

$$\frac{(SCRR - SCRNR) / k \cdot (m-1)}{SCRNR / (n - k \cdot m)}$$

donde SCRR es la suma de los cuadrados de residuos (diferencia entre la rentabilidad del mes j y la que debería haberse producido según la LCT) obtenidos en el ajuste considerando el periodo total y SCRNR es la suma de los cuadrados de residuos obtenidos en cada uno de los ajustes parciales; m es el número de subperiodos (dos en nuestro caso), n el número total de datos (considerando todos los subperiodos, 88 en nuestro caso) y k el número de parámetros a estimar en la ecuación, incluido el término independiente (en nuestro caso, dos, ordenada y pendiente del ajuste).

El estadístico propuesto sigue una F de Fisher con $k_1 = k \cdot (m-1)$ y $k_2 = n - k \cdot m$ grados de libertad.

LAS MEDIDAS DE *PERFORMANCE* UTILIZADAS

Presentaremos muy brevemente las medidas utilizadas en este trabajo, sin intención de realizar la justificación teórica de las mismas (remitimos al lector interesado a nuestros dos trabajos anteriormente mencionados, Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 2003 y 2004, en los que se exponen ampliamente las bases teóricas de todas ellas).

- **Índice de Sharpe**.

  Consiste en ajustar la rentabilidad de los fondos por el riesgo total soportado. Se define como el premio de rentabilidad (sobre el tipo de interés sin riesgo) obtenido por unidad de riesgo total:

$$S_i = \frac{\mu_i - r_0}{\sigma_i}$$

  donde S_i es el índice de Sharpe obtenido por el fondo i en el periodo analizado; μ_i y σ_i son el promedio de rentabilidad y riesgo total (medido con la desviación típica) obtenidos por el fondo i; y r_0 es el tipo de interés sin riesgo. La utilización de *rankings* basados en esta medida se justificaría en el caso de fondos con vocación de diversificación, es decir, cuando no pueda suponerse que la inversión vaya a formar parte de una cartera suficientemente diversificada.

[6] En realidad, el test es más exigente, ya que contrasta simultáneamente la estabilidad de los dos parámetros del modelo de regresión, ordenada y pendiente del ajuste.

- **Índice de Treynor**.

  En este caso, la rentabilidad se ajusta en función del riesgo sistemático:

$$T_i = \frac{\mu_i - r_0}{\beta_i}$$

  donde T_i es el índice de Treynor obtenido por el fondo i en el periodo analizado; y a la nomenclatura anterior se añade β_i, que es la medida del riesgo sistemático aportado por el fondo. La medida sería utilizada para analizar carteras y fondos que no tienen vocación de diversificación; o dicho de otra forma, la diversificación sería responsabilidad del inversor, lo que permite centrarse en el estudio del premio obtenido por unidad de riesgo sistemático, supuesto que la inversión pasará a formar parte de una cartera suficientemente diversificada.

- **Índice de Jensen**.

  Compara el premio por riesgo obtenido por el fondo con el que debería, según el CAPM, haber reportado:

$$J_i = (\mu_i - r_0) - (\mu_m - r_0) \cdot \beta_i$$

  donde J_i es el índice de Jensen obtenido por el fondo i en el periodo analizado; y μ_m es la rentabilidad obtenida en el periodo por la cartera de mercado. Nuevamente, sería una medida a utilizar para inversiones con vocación de incorporarse posteriormente a carteras suficientemente diversificadas.

- **Índice de Jensen dividido por beta**.

  Es una variante del índice anterior, que se obtiene simplemente dividiendo la expresión propuesta por el riesgo sistemático del fondo analizado:

$$\frac{J_i}{\beta_i} = \frac{(\mu_i - r_0)}{\beta_i} - \frac{(\mu_m - r_0)}{\beta_i} \cdot \beta_i$$

  donde J_i / β_i es el índice de Jensen dividido por beta obtenido por el fondo i en el periodo analizado; es fácil ver que, en realidad, lo que hace el índice propuesto es comparar los índices de Treynor del fondo analizado y el mercado, siendo la expresión anterior equivalente a la siguiente:

$$\frac{J_i}{\beta_i} = T_i - T_m$$

- **Índice M^2 de Modigliani y Modigliani**.

  Consiste en apalancar o desapalancar, utilizando el título sin riesgo, la rentabilidad del fondo analizado, de modo que tenga el mismo riesgo total que el mercado, lo que hace

que su rentabilidad sea directamente comparable con la de este último. Es decir, consiste en calcular la rentabilidad de una nueva cartera que incluya el fondo analizado y el título sin riesgo, en las proporciones necesarias para que su riesgo total coincida con el del mercado. Mediante un sencillo proceso matemático llegaríamos a la siguiente expresión:

$$M^2_i = \frac{\sigma_m}{\sigma_i} \cdot (\mu_i - r_0) + r_0$$

donde M^2_i es el valor del índice correspondiente al fondo analizado, σ_m es el riesgo total asociado a la cartera de mercado, y el resto de nomenclatura ha sido definida anteriormente.

- **Índice M² para beta**.

Es una variante del índice anterior, pero tomando como riesgo relevante el sistemático (medido por beta). La idea es muy similar a la anterior: apalancar o desapalancar (utilizando el título sin riesgo) la rentabilidad del fondo analizado para que su riesgo sistemático (medido por beta) coincida con el del mercado, lo que permitirá que sus rentabilidades sean directamente comparables. Partiendo de lo anterior, es también muy sencillo llegar a la expresión:

$$M^2 \ para \ beta_i = \frac{(\mu_i - r_0)}{\beta_i} + r_0$$

donde M^2 para $beta_i$ es el valor del índice obtenido en el periodo considerado por el fondo i.

- **TRIP coherente con Sharpe**.

Consiste en obtener la rentabilidad "equivalente cierta" asociada al fondo analizado, penalizando la rentabilidad promedio obtenida por su riesgo total, y utilizando para realizar dicha penalización la pendiente de la Línea del Mercado de Capitales (LMC), o lo que es lo mismo, el índice de Sharpe asociado a la cartera de mercado:

$$TRIP\ (Sharpe)_i = \mu_i - t \cdot \sigma_i$$

donde TRIP $(Sharpe)_i$ (al que normalmente nos referiremos como TRIP-S_i) es el valor obtenido por el fondo i en el periodo considerado; y t es el parámetro de penalización, que en nuestro caso sería, como decíamos, la pendiente de la LMC:

$$t = \frac{\mu_m - r_0}{\sigma_m}$$

- **TRIP coherente con Treynor**.

  Similar a la anterior, pero tomando como relevante el riesgo sistemático medido por beta. Su formulación sería la siguiente:

$$TRIP\,(Treynor)_i = \mu_i - t' \cdot \beta_i$$

  donde t' es nuevamente el parámetro de penalización, que en este caso coincidiría con la pendiente de la Línea del Mercado de Títulos (LMT) propuesta por el CAPM, es decir, el premio por unidad de riesgo sistemático ofrecido por el mercado sobre el tipo de interés sin riesgo:

$$t' = \mu_m - r_0$$

- **Ratio de información**.

  Es el cociente entre el promedio (μ_{TE}) y la desviación típica (σ_{TE}) del *tracking error* obtenidos por el fondo i en el periodo considerado:

$$RI_i = \frac{\mu_{TE_i}}{\sigma_{TE_i}}$$

  Si suponemos que el *tracking error* está normalmente distribuido, el RI puede asociarse a la probabilidad de superar en rentabilidad al mercado. En nuestros cuadros nosotros sustituiremos siempre el valor del ratio por dicha probabilidad.

ANÁLISIS DE LA *PERFORMANCE* DE LOS FONDOS EN EL PERIODO ANALIZADO

A continuación, estudiamos la *performance* de los fondos finalmente considerados (eliminados los que planteaban problemas de normalidad en sus rentabilidades mensuales o en la estabilidad de sus betas) según los distintos índices de *performance* analizados. En este sentido, puede ser interesante recordar que, si bien las distintas medidas pueden tener sus ventajas e inconvenientes en cuanto a su interpretación o incluso en relación a su aplicabilidad por personas no expertas en temas financieros, hay clasificaciones necesariamente coincidentes (por lo que sería redundante considerar todos los índices propuestos). Así:

- Sharpe (S) y M^2 dan la misma clasificación (aunque S es un premio por unidad de riesgo total y M^2 una rentabilidad).

- Treynor (T), M^2 para beta y Jensen/beta (J/β) llevan a idéntica clasificación. En relación a T y M^2 para beta podemos decir lo mismo que en el apartado anterior (T indica el premio

por unidad de riesgo sistemático, mientras que M^2 para beta compara rentabilidades); y la diferencia entre T y J/β es únicamente de medida, en el sentido de que el último incorpora la comparación con el mercado.

- Jensen (J) y TRIP (Treynor) -TRIP(T)- llevan a la misma clasificación, ya que para ambos índices son mejores los fondos que más se alejan (en vertical) de la LMT. La diferencia radica en que, mientras TRIP-T indica la ordenada en el origen de la recta con idéntica pendiente que la LMT en la que el fondo nos permite situarnos, siendo tanto mejores los fondos cuanto más se alejen hacia arriba de la ordenada asociada a la LMT (el tipo de interés sin riesgo), J da directamente la diferencia entre la rentabilidad obtenida por el fondo y la que debería haber dado según el CAPM (es decir, si se hubiera situado en la propia LMT), siendo mejores los fondos que más se alejen de la recta.

Teniendo en cuenta lo anterior, nos centraremos en el análisis de las diferencias obtenidas a través de cinco *rankings* (en los que como vemos se resumen también los demás):

- Sharpe (S).
- Treynor (T).
- Jensen (J).
- TRIP coherente con Sharpe (TRIP-S).
- Ratio de información (R.I.).

Analizaremos en primer lugar la coherencia entre las ordenaciones obtenidas mediante los cinco índices dentro de cada uno de los dos subperiodos, para continuar con el estudio de la coherencia entre las ordenaciones obtenidas por un mismo índice en los dos subperiodos. Estas pruebas las realizaremos mediante pruebas de hipótesis basadas en el índice de correlación de rango de Spearman y el coeficiente de correlación de Pearson. En lo que se refiere al primero, ello exige en primer lugar realizar la ordenación de los fondos en función de cada índice, asignando (siempre para cada uno de ellos) el número de orden que a cada fondo le corresponde. A partir de aquí, calculamos para cada par de índices el coeficiente de correlación de rango de Spearman anteriormente mencionado:

$$r_s = 1 - \frac{6 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} d_i^{\,2}}{n^3 - n}$$

donde r_s es el coeficiente de correlación de rango de Spearman, d_i es la diferencia entre los rangos (números de orden) que el fondo i alcanza en los dos índices comparados, y n es el número total de fondos. Para comprobar la significación del valor obtenido (es decir, si podemos rechazar que sea cero) utilizamos el estadístico:

$$t = r_s \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-(r_s)^2}}$$

que sigue una distribución t de Student con k = n-2 grados de libertad.

En cuanto a la relación existente entre los valores obtenidos por los fondos en los distintos índices en un determinado periodo, o la que existe entre los valores obtenidos con un índice en los dos periodos considerados, ésta se analiza con el coeficiente de correlación de Pearson anteriormente mencionado (cuya formulación ha sido también presentada con anterioridad):

$$r_{X,Y} = \frac{COV\,(X\,,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

donde COV (X,Y) es la covarianza entre las variables X e Y, y σ_X y σ_Y son las desviaciones típicas de ambas variables. Para comprobar la significación del coeficiente de correlación obtenido analizamos el estadístico t presentado anteriormente, aplicado ahora sobre la base del coeficiente de correlación de Pearson:

$$t = r \cdot \sqrt{\frac{n-2}{1-r^{2}}}$$

con idéntica interpretación que antes: n es el número total de datos (los fondos analizados); y el estadístico sigue una distribución t de Student con k = n-2 grados de libertad.

En lo que se refiere a las posibilidades de batir al mercado con la utilización de los diferentes índices, realizamos un análisis del comportamiento de los 50 fondos que aparecen en el primer subperiodo (99-02) como más interesantes, viendo su clasificación en el segundo (03-05), analizando cuántos de ellos baten al mercado, y estudiando también si el fondo que los incluye a todos de manera equiponderada bate o no al mercado. Realizamos también la misma operación con los cincuenta fondos que en el primer subperiodo aparecen clasificados como los peores, viendo cuál es su comportamiento en el segundo subperiodo, siempre en relación con el *benchmark* elegido (la cartera de mercado). Y todo ello lo hicimos también con el siguiente grupo de cincuenta fondos (los "50 segundos mejores" y los "50 segundos peores", que en opinión de algunos autores, serían los que mantendrían más claramente su comportamiento y experimentarían menos distorsiones).

Consideramos también que podría ser de interés ver qué había ocurrido en el periodo 99-02 con los fondos que aparecían clasificados en los cuatro grupos mencionados (como mejores y peores) en los distintos índices en el periodo 03-05. Es decir, el proceso descrito en el párrafo anterior lo realizamos también a la inversa, viendo si en el primer subperiodo los fondos que aparecen seleccionados en función de su comportamiento en el segundo habrían batido o no al mercado.

Para poder dar también algo de luz sobre las posibles relaciones entre unos índices y otros calculamos así mismo los coeficientes de correlación de Pearson entre algunas variables que nos pueden ayudar a interpretar mejor los resultados. Así, obtuvimos la relación entre el riesgo total (medido por la σ de cada fondo) y el riesgo sistemático (β), así como con el promedio y desviación típica del *tracking error* (μ_{TE} y σ_{TE}).

RESUMEN DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Ofrecemos a continuación un comentario resumen de los principales resultados obtenidos. Dado que el número de fondos analizados es muy grande, prescindiremos de la presentación de resultados obtenidos en los cálculos de estadística descriptiva, así como de las betas y otras medidas realizadas para cada fondo, centrándonos en las conclusiones fundamentales del análisis y ofreciendo algunos datos resumidos en el apéndice de tablas que se incluye al final del trabajo.

Análisis de la normalidad de las distribuciones y de la estabilidad de las betas

Comenzaremos por indicar los resultados obtenidos en el análisis de la normalidad de las distribuciones de rentabilidad y del *tracking error*. En el siguiente cuadro aparece el número de fondos, de los 983 inicialmente considerados, que superan el test de Jarque-Bera (para un error alfa del 1%).

Test de normalidad	99-02	03-05	En ambos
Rentabilidades	947	931	898
Tracking error	628	943	607
$\mathbf{R_m}$	SÍ	SÍ	SÍ

Entendemos que la normalidad del *tracking error* no es una condición imprescindible (salvo para que tenga sentido estricto la interpretación del ratio de información en términos de probabilidad de batir al *benchmark*), por lo que no utilizamos la información correspondiente para eliminar fondos del estudio. En cuanto a la estabilidad de las betas, los resultados obtenidos en la aplicación del test de Chow (nuevamente considerando un error alfa del 1%) pueden resumirse, junto con los anteriores de normalidad, en el siguiente cuadro:

Se acepta estabilidad	Se acepta normalidad	Ambas
977	898	893

Es decir, que de los 983 fondos inicialmente considerados fueron eliminados 90, por presentar problemas de normalidad en sus distribuciones de rentabilidad (en cualquiera de los periodos considerados) o de estabilidad en sus betas.

El eliminar los fondos con problemas de estabilidad en sus betas obedece al deseo de no considerar aquellos fondos que, de un subperiodo a otro, han cambiado de forma considerable su "vocación". Así, el test de Chow nos permite eliminar este tipo de fondos. Es cierto, como ya hemos comentado antes, que este test no nos dice si ha cambiado α o β, lo que podría originar un sesgo de supervivencia, pues el cambio en α podría estar asociado, simplemente, a un cambio (a

mejor o a peor) en la *performance* del fondo. Podemos sospechar que tal sesgo sería, en todo caso, pequeño, pues sólo 5 fondos se eliminan de manera exclusiva por el test de Chow[7].

En general creemos que, en el conjunto de nuestro trabajo, de existir algún sesgo de supervivencia, éste sería mínimo, tal como puede deducirse de la metodología seguida.

Comportamiento de la cartera de mercado, del título sin riesgo y de las carteras seleccionadas como mejores y peores

En las tablas 1, 2 y 3 presentamos, por la importancia que tiene en todo el estudio, el comportamiento de lo que hemos considerado como *benchmark* (la cartera de mercado, compuesta por todos los fondos considerados con idéntica ponderación) y como título sin riesgo, así como el de las cuatro carteras construidas con cada índice (las compuestas por los 50 primeros -T1-, los 50 segundos -T2-, los 50 penúltimos -B2- y los 50 últimos -B1-).

Sólo un brevísimo comentario en relación al comportamiento de la cartera de mercado en el primero de los dos subperiodos considerados (99-02). Como puede verse, a posteriori, el premio por riesgo ha resultado ser negativo para el conjunto del mercado (lo que evidentemente no podría ocurrir a priori, si suponemos enemigos del riesgo). Ello no causa demasiados problemas para nuestros propósitos, ya que sigue teniendo todo el sentido tratar de detectar fondos que se hayan comportado mejor que el mercado, intentando utilizar dicha información para batirlo en el periodo siguiente (si suponemos que un buen gestor en un mercado bajista lo sigue siendo en un mercado alcista). El problema conceptual aparece cuando consideramos que en los índices de Jensen y TRIP-S, el premio por riesgo del mercado ha resultado negativo, y, por lo tanto, a más riesgo, más *performance*. Hemos de considerar que estos dos índices razonan de la siguiente manera: dado que el mercado ha pagado negativamente por el riesgo, a más riesgo, más *performance*; otra forma de verlo es considerar que lo que hacen estos índices es clasificar los fondos en función de la distancia, en vertical, entre la rentabilidad obtenida por la cartera y la de aquella de igual riesgo (σ o β, según corresponda) que se forma apalancando o desapalancando la cartera de mercado con el tipo sin riesgo, por lo que, como tal rentabilidad va decreciendo con el riesgo (el premio es negativo), dada una rentabilidad del fondo a evaluar, la *performance* correspondiente será mayor cuanto mayor sea el riesgo.

En el caso de los índices de Sharpe y Treynor, en nuestro caso, no se produce problema, pues los fondos mejor clasificados tienen premios positivos.

Pero otros fondos, y en concreto, los peor clasificados, además de compartir el comportamiento algo peculiar de los índices de Jensen y TRIP-S en mercados bajistas, tienen premios negativos por riesgo, lo que se traduce en que un aumento del riesgo (medido por σ o β) da lugar a un valor más alto de Sharpe o Treynor. En nuestra opinión esto es justificable, pues puede interpretarse como peor un premio negativo en un fondo de poco riesgo que en uno de mucho riesgo.

Sin lugar a dudas, el comportamiento de estos índices en mercados bajistas (para el caso de Jensen y TRIP-S) o con fondos con premios negativos (para el caso de Sharpe y Treynor) es discutible, aunque también defendible. Existen alternativas para considerar estos casos (véase, por ejemplo, Ferruz y Sarto, 1997), pero nosotros no las consideraremos en nuestro trabajo.

[7] Comprobado posteriormente con una adaptación del test, verificamos que los cinco fondos han sido eliminados por inestabilidad en la beta, lo que elimina esta fuente de sesgo de supervivencia.

Relación entre algunas variables analizadas y análisis de significación de los coeficientes obtenidos

En la tabla 4 se ofrecen los coeficientes de correlación de Pearson (así como el análisis de su significación) entre algunas medidas interesantes (riesgos total y sistemático, y promedio y desviación típica de *tracking error*; todo ello en los dos subperiodos analizados, 99-02 y 03-05).

Coherencia, en cada periodo, entre los distintos índices estudiados

En las tablas 5 y 6 se presenta un resumen del análisis realizado acerca de la relación existente entre los diferentes índices analizados en cada uno de los dos subperiodos estudiados. Así, en la tabla 5 se presentan los coeficientes de correlación de Spearman entre los *rankings* obtenidos con los distintos índices, así como el estudio de su significación estadística; y en la tabla 6 ofrecemos los coeficientes de correlación de Pearson obtenidos entre las medidas alcanzadas por los fondos en los distintos índices. Y todo ello para los dos subperiodos estudiados.

Coherencia de cada uno de los índices en los dos periodos

En la tabla 7 se ofrecen los principales resultados relativos al estudio de la coherencia de cada índice entre los dos subperiodos: coeficientes de correlación de rango de Spearman entre los *rankings* obtenidos con un mismo índice en los dos subperiodos; y coeficientes de correlación de Pearson entre las medidas obtenidas por los fondos con cada índice en los dos subperiodos.

CONCLUSIONES

A la vista de los resultados obtenidos, podemos destacar algunas conclusiones interesantes:

- Se acepta en la inmensa mayoría de los casos la normalidad de las distribuciones de rentabilidades mensuales (rechazándose sólo en 85 de los 983 fondos inicialmente considerados -menos del 10%-; lo que es un resultado habitual en los estudios clásicos).

- Algún mayor problema presenta la aceptación de la normalidad del *tracking error* (hipótesis que se rechazaría, en algún periodo, en 376 fondos, lo que se acerca al 40% del total). No deja de ser una circunstancia cuando menos curiosa, si tenemos en cuenta que se acepta con facilidad la normalidad de la rentabilidad de los fondos y la del mercado, pero no profundizaremos en ello, ya que afecta únicamente a la interpretación que podamos dar al ratio de información (y no a los resultados obtenidos, ni siquiera con dicho índice).

- Sólo se rechaza la hipótesis de estabilidad de las betas en 6 de los 983 fondos analizados.

- La relación entre los *rankings* obtenidos en cada periodo con los distintos índices (tabla 5) es muy elevada: en el periodo 99-02 todos los coeficientes son significativos (y superiores a 0,89); mientras que en 03-05, si prescindimos del R.I., el resto de índices presentan también valores en el coeficiente de correlación de rango de Spearman superiores a 0,92 (el R.I. presenta valores de correlación siempre superiores a 0,74); resultando todos ellos claramente significativos.

- En cuanto a la relación entre los valores obtenidos por los fondos en los distintos índices (tabla 6), hay que decir que nuevamente la coherencia es muy alta. Así, los coeficientes de correlación de Pearson son siempre superiores a 0,86 en el periodo 99-02 (y mayores que 0,94 si prescindimos del R.I.) y claramente significativos; algo más bajos son los valores obtenidos en el periodo 03-05, aunque también claramente significativos (superiores a 0,87, si prescindimos del R.I., y mayores que 0,74 en éste último).

- La coherencia entre periodos que presentan los *rankings* y valores obtenidos por los fondos según cada índice (tabla 7) vuelve a ser alta, aunque menor: en relación a los *rankings*, los coeficientes de correlación de rango de Spearman presentan valores elevados en R.I. (0,51) y Treynor y Jensen (0,47 y 0,49, respectivamente), y algo menores en Sharpe y TRIP-Sharpe (0,46 y 0,41, respectivamente) -todos ellos claramente significativos, en cualquier caso-; mientras que si nos referimos a los coeficientes de correlación de Pearson, las conclusiones son similares, resultando nuevamente todos ellos claramente significativos.

- En cuanto a la capacidad de los índices para detectar fondos que, quedando clasificados entre los 50 mejores en el primer subperiodo, vuelvan a hacerlo en el segundo (tabla 8), Treynor, Jensen y TRIP-Sharpe muestran una mayor capacidad (17, 19 y 16, respectivamente), que se mantiene también en el segundo grupo (con la excepción de TRIP-Sharpe, que reduce claramente su cifra hasta 6); el grado de acierto baja significativamente en los fondos peor clasificados (salvo en el caso de R.I.). Sin embargo, ello no parece demasiado importante, en la medida en que los fondos y carteras obtenidas con ellos batan al mercado (siguiente punto).

- En cuanto a la capacidad para batir al mercado, debemos decir que los resultados son sorprendentes: los índices de Treynor y Jensen presentan una elevadísima capacidad para batir al mercado en el primer grupo (42 de los 50 elegidos), y también el R.I. (40), bajando en Sharpe y TRIP-Sharpe. Lo mismo puede decirse de los fondos clasificados en el segundo grupo (T2): aunque las cifras bajan muy ligeramente, la gran mayoría de los elegidos por Treynor, Jensen y R.I. baten también al mercado en el segundo subperiodo. Y hay que decir que los fondos clasificados en los grupos de cola presentan una mucho menor capacidad de batir al mercado.

- En cualquier caso, puede verse cómo las dos carteras de cabeza (T1 y T2), construidas con cualquiera de los índices, baten siempre al mercado (véase nuevamente la tabla 8). Ello no deja de ser sorprendente, en la medida en que supone una prueba en contra de la eficiencia débil del mercado. Seguiremos investigando las razones que pudieran explicar este comportamiento, pero en el periodo analizado la conclusión es clara: la utilización de índices de *performance* (cualquiera de los estudiados) para diseñar estrategias que mejoren la gestión pasiva representada por la compra de un índice de mercado es eficaz, al menos sobre los datos utilizados (recordemos que nuestra forma de cálculo de la

cartera de mercado perjudica la gestión pasiva, al construirse sobre la base de datos que restan previamente las comisiones). Por otro lado, el análisis "a la inversa", es decir, el estudio de cómo se habían comportado en 99-02 los mejores y peores fondos seleccionados en el periodo 03-05 (tabla 9) es absolutamente coherente con todo lo anterior (mejorando, incluso, la capacidad de batir al mercado mostrada por los índices de Sharpe y TRIP-Sharpe).

- Finalmente, hemos hecho una prueba de robustez del estudio, reduciendo drásticamente el tipo de interés sin riesgo. Las conclusiones son muy similares, con lo que debemos concluir que el estudio es muy poco sensible al tipo sin riesgo elegido.

BIBLIOGRAFÍA

FAMA, E.F. (1976): *Foundations of Finance*, Basic Books, Nueva York.

FERRUZ, L. y J.L. SARTO (1997): "Revisión crítica de las medidas clásicas de performance de carteras y propuesta de índices alternativos. Aplicación a fondos de inversión españoles (1990-1995)", *Boletín de Estudios Económicos*, Vol. LII, no. 162, Diciembre, págs. 549-573.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (1994): Valoración de acciones en la Bolsa Española. Un análisis de la relación entre la rentabilidad y el riesgo, Desclée de Brouwer, Bilbao.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2003): "Medidas de performance: Algunos índices clásicos y relación de la TRIP con la teoría de cartera", *Análisis Financiero Internacional*, nº 113, Tercer Trimestre, págs. 5-19.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2004): "Performance ajustada al riesgo: Índices clásicos y nuevas medidas", *Análisis Financiero*, nº 93, Primer Cuatrimestre, págs. 6-16.

JENSEN, M.C. (1968): "The performance of mutual funds in the period 1945-1964", *Journal of finance*, Mayo, págs. 389-416.

JENSEN, M.C. (1969): "Risk, the pricing of capital assets, and the evaluation of investment portfolios", *Journal of business*, Abril, págs. 167-247.

MODIGLIANI, L. (1997): "Don't Pick Your Managers By Their Alphas", *U.S. Investment Research, U.S Strategy*, Morgan Stanley Dean Witter, June.

MODIGLIANI, F. and L. MODIGLIANI (1997): "Risk-Adjusted Performance", *Journal of Portfolio Management*, vol. 23, no. 2, Winter, pp. 45-54.

MURALIDHAR, A. (2000): "Risk-Adjusted Performance: The Correlation Correction", *Financial Analysts Journal*, vol. 56, no. 5, September/October, pp. 63-71.

MURALIDHAR, A. (2001): "Optimal Risk-Adjusted Portfolios with Multiple Managers", *Journal of Portfolio Management*, vol 27, no. 3, Spring, pp. 97-104.

ROLL, R. (1992): "A Mean/Variance Analysis of Tracking Error", *Journal of Portfolio Management*, vol. 18, no. 4, Summer, pp. 13-22.

SHARPE, W.F. (1966): "Mutual fund performance", *Journal of business*, Enero, págs. 119-138.

TREYNOR, J.L. (1965): "How to rate management of investment funds", *Harvard business review*, Enero-Febrero, págs. 63-75.

APÉNDICE DE TABLAS

Tabla 1

Comportamiento, en cada periodo, del índice de mercado y del título sin riesgo

	En 99-02	μ	σ	β	μ TE	σ TE
	Fondo	Promedio	Desviación	R. sistemát.	E(*track.error*)	Des. *Tr. Error*
R_m	Media aritmética no pon	-0,29%	4,98%	1	0,00%	0,00%
R_0	AFI Media FIAMM	0,28%	0,11%	-0,00828441	0,58%	5,02%

	En 99-02	S	T	J	TRIP-S	R.I.
	Fondo	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	Rat. Info.
R_m	Media aritmética no pon	-0,116	-0,006	0,000	0,003	-
R_0	AFI Media FIAMM	0,000	0,000	0,000	0,003	0,546

	En 03-05	μ	σ	β	μ TE	σ TE
	Fondo	Promedio	Desviación	R. sistemát.	E(*track.error*)	Des. *Tr. Error*
R_m	Media aritmética no pon	1,24%	2,67%	1	0,00%	0,00%
R_0	AFI Media FIAMM	0,17%	0,06%	-0,00142075	-1,07%	2,67%

	En 03-05	S	T	J	TRIP-S	R.I.
	Fondo	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	Rat. Info.
R_m	Media aritmética no pon	0,400	0,011	0,000	0,002	-
R_0	AFI Media FIAMM	0,000	0,000	0,000	0,001	0,345

Tabla 2

Comportamiento, en cada periodo, de las carteras construidas con los 100 mejores (en dos grupos, T1 y T2) y los 100 peores (en dos grupos, B2 y B1); fondos elegidos según su comportamiento en los diferentes índices en el periodo 1999-2002

Según índice	En 99-02 Fondo	μ Promedio	σ Desviación	β R. sistemát.	μ_{TE} E(*track.error*)	σ_{TE} Des. *Tr. Error*
S	**50 T1 (primeros)**	0,86%	5,26%	0,94940074	1,15%	2,33%
S	**50 T2 (segundos)**	0,35%	5,28%	0,9992389	0,65%	1,76%
S	**50 B2 (penúltimos)**	-0,71%	4,76%	0,93948849	-0,42%	0,96%
S	**50 B1 (últimos)**	-0,95%	4,89%	0,96896978	-0,66%	0,84%
T	**50 T1 (primeros)**	0,86%	5,22%	0,94401637	1,15%	2,28%
T	**50 T2 (segundos)**	0,35%	5,38%	1,01493058	0,65%	1,85%
T	**50 B2 (penúltimos)**	-0,76%	4,87%	0,96478976	-0,46%	0,84%
T	**50 B1 (últimos)**	-0,88%	4,52%	0,88940474	-0,59%	1,06%
J	**50 T1 (primeros)**	0,84%	6,22%	1,11761229	1,13%	2,84%
J	**50 T2 (segundos)**	0,31%	5,45%	1,03827155	0,60%	1,75%
J	**50 B2 (penúltimos)**	-0,71%	4,73%	0,9326466	-0,42%	0,97%
J	**50 B1 (últimos)**	-1,05%	5,47%	1,08521916	-0,76%	0,96%
TRIP-S	**50 T1 (primeros)**	0,82%	6,38%	1,13992773	1,12%	3,00%
TRIP-S	**50 T2 (segundos)**	0,29%	5,51%	1,04977389	0,58%	1,78%
TRIP-S	**50 B2 (penúltimos)**	-0,72%	4,87%	0,96100662	-0,43%	0,93%
TRIP-S	**50 B1 (últimos)**	-1,04%	5,36%	1,06247263	-0,74%	0,94%
R.I.	**50 T1 (primeros)**	0,77%	4,95%	0,90652738	1,07%	2,09%
R.I.	**50 T2 (segundos)**	0,32%	4,88%	0,95071697	0,61%	1,22%
R.I.	**50 B2 (penúltimos)**	-0,82%	5,47%	1,08149003	-0,53%	1,05%
R.I.	**50 B1 (últimos)**	-0,89%	5,08%	1,00223488	-0,60%	0,95%

Según índice	En 99-02 Fondo	S Sharpe	T Treynor	J Jensen	TRIP-S TRIP-Sharpe	R.I. Rat. Info.
S	**50 T1 (primeros)**	0,110	0,006	0,011	0,015	0,690
S	**50 T2 (segundos)**	0,013	0,001	0,006	0,010	0,643
S	**50 B2 (penúltimos)**	-0,209	-0,011	-0,005	-0,002	0,331
S	**50 B1 (últimos)**	-0,252	-0,013	-0,007	-0,004	0,219
T	**50 T1 (primeros)**	0,110	0,006	0,011	0,015	0,693
T	**50 T2 (segundos)**	0,013	0,001	0,007	0,010	0,637
T	**50 B2 (penúltimos)**	-0,213	-0,011	-0,005	-0,002	0,291
T	**50 B1 (últimos)**	-0,258	-0,013	-0,007	-0,004	0,290
J	**50 T1 (primeros)**	0,089	0,005	0,012	0,016	0,655
J	**50 T2 (segundos)**	0,004	0,000	0,006	0,009	0,634
J	**50 B2 (penúltimos)**	-0,211	-0,011	-0,005	-0,002	0,332
J	**50 B1 (últimos)**	-0,244	-0,012	-0,007	-0,004	0,216
TRIP-S	**50 T1 (primeros)**	0,085	0,005	0,012	0,016	0,645
TRIP-S	**50 T2 (segundos)**	0,001	0,000	0,006	0,009	0,628
TRIP-S	**50 B2 (penúltimos)**	-0,207	-0,010	-0,005	-0,002	0,322
TRIP-S	**50 B1 (últimos)**	-0,246	-0,012	-0,007	-0,004	0,213
R.I.	**50 T1 (primeros)**	0,099	0,005	0,010	0,013	0,695
R.I.	**50 T2 (segundos)**	0,007	0,000	0,006	0,009	0,691
R.I.	**50 B2 (penúltimos)**	-0,201	-0,010	-0,005	-0,002	0,308
R.I.	**50 B1 (últimos)**	-0,232	-0,012	-0,006	-0,003	0,264

Tabla 2 (Continuación)

Según índice	En 03-05 Fondo	μ Promedio	σ Desviación	β R. sistemát.	μ TE E(*track.error*)	σ TE Des. *Tr. Error*
S	**50 T1 (primeros)**	1,85%	3,34%	1,11538598	0,61%	1,54%
S	**50 T2 (segundos)**	1,67%	3,14%	1,09781089	0,43%	1,16%
S	**50 B2 (penúltimos)**	0,98%	2,53%	0,93062416	-0,26%	0,50%
S	**50 B1 (últimos)**	1,01%	2,58%	0,95245772	-0,23%	0,44%
T	**50 T1 (primeros)**	1,84%	3,32%	1,11838218	0,60%	1,50%
T	**50 T2 (segundos)**	1,67%	3,15%	1,09766451	0,43%	1,20%
T	**50 B2 (penúltimos)**	0,98%	2,56%	0,94315225	-0,26%	0,49%
T	**50 B1 (últimos)**	1,02%	2,47%	0,9135734	-0,22%	0,45%
J	**50 T1 (primeros)**	1,98%	3,74%	1,21663996	0,74%	1,94%
J	**50 T2 (segundos)**	1,60%	3,04%	1,07441853	0,36%	1,03%
J	**50 B2 (penúltimos)**	0,99%	2,53%	0,93315613	-0,25%	0,47%
J	**50 B1 (últimos)**	1,08%	2,81%	1,04029076	-0,17%	0,47%
TRIP-S	**50 T1 (primeros)**	2,00%	3,82%	1,23155224	0,76%	2,04%
TRIP-S	**50 T2 (segundos)**	1,69%	3,12%	1,10156167	0,45%	1,09%
TRIP-S	**50 B2 (penúltimos)**	1,01%	2,58%	0,95215236	-0,23%	0,48%
TRIP-S	**50 B1 (últimos)**	1,04%	2,74%	1,01266636	-0,20%	0,47%
R.I.	**50 T1 (primeros)**	1,64%	3,20%	1,09672764	0,40%	1,32%
R.I.	**50 T2 (segundos)**	1,55%	2,76%	1,00154114	0,31%	0,71%
R.I.	**50 B2 (penúltimos)**	1,06%	2,74%	1,00564466	-0,18%	0,57%
R.I.	**50 B1 (últimos)**	1,00%	2,73%	1,00047725	-0,24%	0,55%

Según índice	En 03-05 Fondo	S Sharpe	T Treynor	J Jensen	TRIP-S TRIP-Sharpe	R.I. Rat. Info.
S	**50 T1 (primeros)**	0,504	0,015	0,005	0,005	0,655
S	**50 T2 (segundos)**	0,475	0,014	0,003	0,004	0,643
S	**50 B2 (penúltimos)**	0,321	0,009	-0,002	0,000	0,306
S	**50 B1 (últimos)**	0,325	0,009	-0,002	0,000	0,299
T	**50 T1 (primeros)**	0,502	0,015	0,005	0,005	0,656
T	**50 T2 (segundos)**	0,475	0,014	0,003	0,004	0,640
T	**50 B2 (penúltimos)**	0,314	0,009	-0,002	0,000	0,294
T	**50 B1 (últimos)**	0,344	0,009	-0,001	0,000	0,311
J	**50 T1 (primeros)**	0,484	0,015	0,005	0,005	0,649
J	**50 T2 (segundos)**	0,468	0,013	0,003	0,004	0,635
J	**50 B2 (penúltimos)**	0,324	0,009	-0,002	0,000	0,296
J	**50 B1 (últimos)**	0,321	0,009	-0,002	0,000	0,361
TRIP-S	**50 T1 (primeros)**	0,480	0,015	0,005	0,005	0,646
TRIP-S	**50 T2 (segundos)**	0,484	0,014	0,003	0,004	0,658
TRIP-S	**50 B2 (penúltimos)**	0,326	0,009	-0,002	0,000	0,317
TRIP-S	**50 B1 (últimos)**	0,315	0,009	-0,002	-0,001	0,334
R.I.	**50 T1 (primeros)**	0,460	0,013	0,003	0,004	0,620
R.I.	**50 T2 (segundos)**	0,498	0,014	0,003	0,004	0,669
R.I.	**50 B2 (penúltimos)**	0,325	0,009	-0,002	0,000	0,380
R.I.	**50 B1 (últimos)**	0,302	0,008	-0,002	-0,001	0,330

Tabla 3

Comportamiento, en cada periodo, de las carteras construidas con los 100 mejores (en dos grupos, T1 y T2) y los 100 peores (en dos grupos, B2 y B1); fondos elegidos según su comportamiento en los diferentes índices en el periodo 2003-2005

Según índice	En 99-02 Fondo	μ Promedio	σ Desviación	β R. sistemát.	μ TE E(*track.error*)	σ TE Des. *Tr. Error*
S	**50 T1 (primeros)**	0,14%	5,66%	1,08107707	0,43%	1,79%
S	**50 T2 (segundos)**	-0,03%	5,59%	1,09432935	0,26%	1,37%
S	**50 B2 (penúltimos)**	-0,52%	5,00%	0,99269103	-0,23%	0,78%
S	**50 B1 (últimos)**	-0,54%	5,19%	1,03225766	-0,25%	0,76%
T	**50 T1 (primeros)**	0,25%	5,60%	1,04791058	0,55%	2,05%
T	**50 T2 (segundos)**	0,08%	5,64%	1,078518	0,37%	1,77%
T	**50 B2 (penúltimos)**	-0,57%	5,02%	0,99107763	-0,27%	0,92%
T	**50 B1 (últimos)**	-0,59%	5,34%	1,05954137	-0,30%	0,90%
J	**50 T1 (primeros)**	0,26%	6,05%	1,12086199	0,55%	2,42%
J	**50 T2 (segundos)**	0,00%	5,90%	1,11657977	0,29%	2,06%
J	**50 B2 (penúltimos)**	-0,63%	5,43%	1,07552516	-0,34%	1,01%
J	**50 B1 (últimos)**	-0,56%	5,53%	1,09545817	-0,27%	1,05%
TRIP-S	**50 T1 (primeros)**	0,21%	6,00%	1,13181209	0,50%	2,16%
TRIP-S	**50 T2 (segundos)**	-0,10%	5,32%	1,04514098	0,20%	1,14%
TRIP-S	**50 B2 (penúltimos)**	-0,48%	5,40%	1,07757273	-0,18%	0,78%
TRIP-S	**50 B1 (últimos)**	-0,50%	5,48%	1,08792043	-0,21%	0,94%
R.I.	**50 T1 (primeros)**	0,05%	6,77%	1,255663	0,34%	2,91%
R.I.	**50 T2 (segundos)**	0,12%	5,91%	1,12278417	0,41%	2,02%
R.I.	**50 B2 (penúltimos)**	-0,59%	4,94%	0,97792983	-0,30%	0,83%
R.I.	**50 B1 (últimos)**	-0,59%	4,78%	0,94199578	-0,30%	0,98%

Según índice	En 99-02 Fondo	S Sharpe	T Treynor	J Jensen	TRIP-S TRIP-Sharpe	R.I. Rat. Info.
S	**50 T1 (primeros)**	-0,026	-0,001	0,005	0,008	0,595
S	**50 T2 (segundos)**	-0,056	-0,003	0,003	0,006	0,576
S	**50 B2 (penúltimos)**	-0,161	-0,008	-0,002	0,001	0,385
S	**50 B1 (últimos)**	-0,159	-0,008	-0,002	0,001	0,371
T	**50 T1 (primeros)**	-0,006	0,000	0,006	0,009	0,605
T	**50 T2 (segundos)**	-0,036	-0,002	0,004	0,007	0,584
T	**50 B2 (penúltimos)**	-0,170	-0,009	-0,003	0,000	0,383
T	**50 B1 (últimos)**	-0,164	-0,008	-0,003	0,000	0,370
J	**50 T1 (primeros)**	-0,004	0,000	0,006	0,010	0,590
J	**50 T2 (segundos)**	-0,048	-0,003	0,004	0,007	0,557
J	**50 B2 (penúltimos)**	-0,168	-0,008	-0,003	0,000	0,370
J	**50 B1 (últimos)**	-0,153	-0,008	-0,002	0,001	0,399
TRIP-S	**50 T1 (primeros)**	-0,012	-0,001	0,006	0,009	0,592
TRIP-S	**50 T2 (segundos)**	-0,072	-0,004	0,002	0,005	0,568
TRIP-S	**50 B2 (penúltimos)**	-0,141	-0,007	-0,001	0,002	0,407
TRIP-S	**50 B1 (últimos)**	-0,143	-0,007	-0,002	0,001	0,413
R.I.	**50 T1 (primeros)**	-0,034	-0,002	0,005	0,008	0,547
R.I.	**50 T2 (segundos)**	-0,028	-0,001	0,005	0,008	0,581
R.I.	**50 B2 (penúltimos)**	-0,177	-0,009	-0,003	0,000	0,362
R.I.	**50 B1 (últimos)**	-0,183	-0,009	-0,003	0,000	0,381

Tabla 3 (Continuación)

Según índice	En 03-05 Fondo	μ Promedio	σ Desviación	β R. sistemát.	μ TE E(*track.error*)	σ TE Des. *Tr. Error*
S	**50 T1 (primeros)**	2,02%	2,79%	0,98195601	0,78%	0,96%
S	**50 T2 (segundos)**	1,77%	2,88%	1,03899526	0,53%	0,77%
S	**50 B2 (penúltimos)**	0,89%	2,84%	1,03188912	-0,35%	0,72%
S	**50 B1 (últimos)**	0,75%	2,91%	1,06660297	-0,49%	0,62%
T	**50 T1 (primeros)**	2,12%	2,92%	0,97386682	0,88%	1,33%
T	**50 T2 (segundos)**	1,82%	3,04%	1,07181237	0,58%	1,06%
T	**50 B2 (penúltimos)**	0,88%	2,86%	1,04114447	-0,36%	0,70%
T	**50 B1 (últimos)**	0,75%	2,92%	1,0680874	-0,49%	0,68%
J	**50 T1 (primeros)**	2,23%	3,16%	1,06321962	0,99%	1,41%
J	**50 T2 (segundos)**	1,85%	3,17%	1,09173454	0,61%	1,27%
J	**50 B2 (penúltimos)**	0,93%	3,04%	1,09815897	-0,31%	0,85%
J	**50 B1 (últimos)**	0,80%	3,11%	1,13087891	-0,44%	0,83%
TRIP-S	**50 T1 (primeros)**	2,16%	3,01%	1,04300413	0,92%	1,14%
TRIP-S	**50 T2 (segundos)**	1,70%	2,76%	1,00390844	0,46%	0,69%
TRIP-S	**50 B2 (penúltimos)**	1,01%	3,13%	1,14401364	-0,23%	0,78%
TRIP-S	**50 B1 (últimos)**	0,87%	3,16%	1,15160542	-0,37%	0,84%
R.I.	**50 T1 (primeros)**	2,20%	3,30%	1,13914275	0,96%	1,33%
R.I.	**50 T2 (segundos)**	1,92%	3,38%	1,17468165	0,68%	1,35%
R.I.	**50 B2 (penúltimos)**	0,83%	2,53%	0,91825326	-0,41%	0,66%
R.I.	**50 B1 (últimos)**	0,73%	2,40%	0,87864188	-0,51%	0,61%

Según índice	En 03-05 Fondo	S Sharpe	T Treynor	J Jensen	TRIP-S TRIP-Sharpe	R.I. Rat. Info.
S	**50 T1 (primeros)**	0,663	0,019	0,008	0,009	0,793
S	**50 T2 (segundos)**	0,555	0,015	0,005	0,006	0,753
S	**50 B2 (penúltimos)**	0,252	0,007	-0,004	-0,002	0,314
S	**50 B1 (últimos)**	0,199	0,005	-0,006	-0,004	0,216
T	**50 T1 (primeros)**	0,668	0,020	0,009	0,010	0,747
T	**50 T2 (segundos)**	0,541	0,015	0,005	0,006	0,708
T	**50 B2 (penúltimos)**	0,246	0,007	-0,004	-0,003	0,301
T	**50 B1 (últimos)**	0,197	0,005	-0,006	-0,004	0,234
J	**50 T1 (primeros)**	0,650	0,019	0,009	0,010	0,759
J	**50 T2 (segundos)**	0,530	0,015	0,005	0,006	0,684
J	**50 B2 (penúltimos)**	0,250	0,007	-0,004	-0,003	0,358
J	**50 B1 (últimos)**	0,202	0,006	-0,006	-0,004	0,299
TRIP-S	**50 T1 (primeros)**	0,661	0,019	0,009	0,010	0,790
TRIP-S	**50 T2 (segundos)**	0,551	0,015	0,005	0,006	0,747
TRIP-S	**50 B2 (penúltimos)**	0,268	0,007	-0,004	-0,002	0,383
TRIP-S	**50 B1 (últimos)**	0,219	0,006	-0,005	-0,004	0,327
R.I.	**50 T1 (primeros)**	0,614	0,018	0,008	0,009	0,764
R.I.	**50 T2 (segundos)**	0,518	0,015	0,005	0,006	0,694
R.I.	**50 B2 (penúltimos)**	0,261	0,007	-0,003	-0,002	0,269
R.I.	**50 B1 (últimos)**	0,234	0,006	-0,004	-0,002	0,202

Tabla 4

Relación entre algunas variables analizadas y análisis de significación de los coeficientes obtenidos

Periodo 1999-2002

Coef. Correl. Pearson	**σ**	**β**	**μ TE**	**σ TE**
Riesgo total	1			
Riesgo sistemático	0,90523882	1		
Promedio *tracking error*	0,03980525	-0,19229553	1	
Desviación *tracking error*	0,7176228	0,37286308	0,35591879	1

Valor t de Student	**σ**	**β**	**μ TE**	**σ TE**
Riesgo total	-			
Riesgo sistemático	63,5934043	-		
Promedio *tracking error*	1,18911401	-5,84911078	-	
Desviación *tracking error*	30,7578782	11,9948117	11,3684856	-

Probabilidad (2 colas)	**σ**	**β**	**μ TE**	**σ TE**
Riesgo total	-			
Riesgo sistemático	0,000000	-		
Promedio *tracking error*	0,234712	0,000000	-	
Desviación *tracking error*	0,000000	0,000000	0,000000	-

Periodo 2003-2005

Coef. Correl. Pearson	**σ**	**β**	**μ TE**	**σ TE**
Riesgo total	1			
Riesgo sistemático	0,85010962	1		
Promedio *tracking error*	0,62910766	0,45195483	1	
Desviación *tracking error*	0,8573866	0,47809441	0,60747204	1

Valor t de Student	**σ**	**β**	**μ TE**	**σ TE**
Riesgo total	-			
Riesgo sistemático	48,18681	-		
Promedio *tracking error*	24,1582237	15,1233901	-	
Desviación *tracking error*	49,7260805	16,2482075	22,8274887	-

Probabilidad (2 colas)	**σ**	**β**	**μ TE**	**σ TE**
Riesgo total	-			
Riesgo sistemático	0,000000	-		
Promedio *tracking error*	0,000000	0,000000	-	
Desviación *tracking error*	0,000000	0,000000	0,000000	-

Tabla 5

Relación entre los *rankings* obtenidos en cada periodo con los distintos índices y significación de los coeficientes obtenidos (Spearman)

Periodo 1999-2002

r_s	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Sharpe	1				
Treynor	0,98432271	1			
Jensen	0,98576702	0,98900358	1		
TRIP - Sharpe	0,9944728	0,97732814	0,99157413	1	
R.I.	0,93815773	0,89834892	0,92902079	0,94276083	1

t Student	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Sharpe	-				
Treynor	166,584549	-			
Jensen	175,025369	199,615076	-		
TRIP - Sharpe	282,725569	137,7832	228,485375	-	
R.I.	80,8867598	61,0435639	74,9428599	84,3886549	-

Pr. (2 colas)	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Sharpe	-				
Treynor	0,000000	-			
Jensen	0,000000	0,000000	-		
TRIP - Sharpe	0,000000	0,000000	0,000000	-	
R.I.	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-

Periodo 2003-2005

r_s	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Sharpe	1				
Treynor	0,95316536	1			
Jensen	0,9477488	0,99525498	1		
TRIP - Sharpe	0,98261597	0,92224978	0,92668847	1	
R.I.	0,83317325	0,85269631	0,83126848	0,74312147	1

t Student	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Sharpe	-				
Treynor	94,0706157	-			
Jensen	88,6783265	305,319661	-		
TRIP - Sharpe	157,989455	71,2084767	73,6004931	-	
R.I.	44,9717281	48,72191	44,6381349	33,1490381	-

Pr. (2 colas)	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Sharpe	-				
Treynor	0,000000	-			
Jensen	0,000000	0,000000	-		
TRIP - Sharpe	0,000000	0,000000	0,000000	-	
R.I.	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-

Tabla 6

Relación entre los valores obtenidos en cada periodo con los distintos índices y significación de los coeficientes obtenidos (Pearson)

Periodo 1999-2002

r	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Sharpe	1				
Treynor	0,97735465	1			
Jensen	0,96131793	0,95018436	1		
TRIP - Sharpe	0,96470472	0,94452581	0,99314499	1	
R.I.	0,92228843	0,86817131	0,87794282	0,87187806	1

t Student	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Sharpe	-				
Treynor	137,86665	-			
Jensen	104,178245	90,9967798	-		
TRIP - Sharpe	109,351896	85,8420993	253,616866	-	
R.I.	71,2284506	52,2192905	54,7371559	53,1427557	-

Pr. (2 colas)	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Sharpe	-				
Treynor	0,000000	-			
Jensen	0,000000	0,000000	-		
TRIP - Sharpe	0,000000	0,000000	0,000000	-	
R.I.	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-

Periodo 2003-2005

r	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Sharpe	1				
Treynor	0,89482434	1			
Jensen	0,90850923	0,97001328	1		
TRIP - Sharpe	0,96656544	0,8701906	0,90946624	1	
R.I.	0,84437352	0,80013948	0,82330056	0,74840273	1

t Student	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Sharpe	-				
Treynor	59,8321409	-			
Jensen	64,8981642	119,12899	-		
TRIP - Sharpe	112,516987	52,7177936	65,2926311	-	
R.I.	47,0443285	39,8187823	43,2962754	33,6822046	-

Pr. (2 colas)	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Sharpe	-				
Treynor	0,000000	-			
Jensen	0,000000	0,000000	-		
TRIP - Sharpe	0,000000	0,000000	0,000000	-	
R.I.	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	-

Tabla 7

Relación entre los *rankings* obtenidos (Spearman) y significación de los coeficientes obtenidos

r_s	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-S	R.I.
Periodo 99-02 vs 03-05	0,459725781	0,46940289	0,4853347	0,41466148	0,51219955

t de Student	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-S	R.I.
Periodo 99-02 vs 03-05	15,45236469	15,8683485	16,5693545	13,6019986	17,8013276

Probabilidad (2 colas)	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-S	R.I.
Periodo 99-02 vs 03-05	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

Relación entre los valores obtenidos en los distintos índices (Pearson) y significación de los coeficientes obtenidos

r	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Periodo 99-02 vs 03-05	0,437121777	0,45943692	0,49579993	0,3466628	0,50392322

t de Student	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Periodo 99-02 vs 03-05	14,5073232	15,4400567	17,041472	11,0318402	17,4146979

Probabilidad (2 colas)	Sharpe	Treynor	Jensen	TRIP-Sharpe	R.I.
Periodo 99-02 vs 03-05	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

Tabla 8

Resumen estadístico: comportamiento en 2003-2005 de las carteras formadas en función del comportamiento en los distintos índices en 1999-2002

	S	T	J	TRIPS	RI
Nº de fondos T1 (en 99-02) que repiten grupo T1 en 03-05	13	17	19	16	9
Nº de fondos T2 (en 99-02) que repiten grupo T2 en 03-05	4	16	13	6	7
Nº de fondos B2 (en 99-02) que repiten grupo B2 en 03-05	6	6	4	5	11
Nº de fondos B1 (en 99-02) que repiten grupo B1 en 03-05	6	6	9	7	7

	S	T	J	TRIPS	RI
Nº de fondos T1 (en 99-02) que baten al mercado en 03-05	27	42	42	25	40
Nº de fondos T2 (en 99-02) que baten al mercado en 03-05	23	39	37	24	36
Nº de fondos B2 (en 99-02) que baten al mercado en 03-05	3	10	13	4	10
Nº de fondos B1 (en 99-02) que baten al mercado en 03-05	4	14	8	3	7

	S	T	J	TRIPS	RI
La cartera T1 (según 99-02) bate al mercado en 03-05	SI	SI	SI	SI	SI
La cartera T2 (según 99-02) bate al mercado en 03-05	SI	SI	SI	SI	SI
La cartera B2 (según 99-02) bate al mercado en 03-05	NO	NO	NO	NO	NO
La cartera B1 (según 99-02) bate al mercado en 03-05	NO	NO	NO	NO	NO

nº	S	S	T	T	J	J	TRIP-S	TRIP-S	R.I.	R.I.
1	**S**	**50 T1**	S	50 T1	TRIP-S	50 T1	S	50 T1	**R.I.**	**50 T2**
2	T	50 T1	**T**	**50 T1**	**J**	**50 T1**	T	50 T1	TRIP-S	50 T2
3	R.I.	50 T2	J	50 T1	S	50 T1	J	50 T1	T	50 T1
4	J	50 T1	TRIP-S	50 T1	T	50 T1	**TRIP-S**	**50 T1**	S	50 T1
5	TRIP-S	50 T2	R.I.	50 T2	TRIP-S	50 T2	R.I.	50 T2	J	50 T1
6	TRIP-S	50 T1	TRIP-S	50 T2	T	50 T2	**TRIP-S**	**50 T2**	TRIP-S	50 T1
7	**S**	**50 T2**	**T**	**50 T2**	S	50 T2	T	50 T2	S	50 T2
8	T	50 T2	S	50 T2	R.I.	50 T2	S	50 T2	T	50 T2
9	J	50 T2	R.I.	50 T1	R.I.	50 T1	J	50 T2	J	50 T2
10	R.I.	50 T1	J	50 T2	**J**	**50 T2**	R.I.	50 T1	**R.I.**	**50 T1**
11	**R_m**	**R_m**	**R_m**	**R_m**	R_0	R_0	**R_m**	**R_m**	**R_m**	**R_m**
12	*T*	*50 B1*	***T***	***50 B1***	**R_m**	**R_m**	*R_0*	*R_0*	***R.I.***	***50 B2***
13	*TRIP-S*	*50 B2*	*R.I.*	*50 B2*	*T*	*50 B1*	*T*	*50 B1*	*J*	*50 B1*
14	*R.I.*	*50 B2*	*TRIP-S*	*50 B2*	*TRIP-S*	*50 B2*	***TRIP-S***	***50 B2***	*R_0*	*R_0*
15	***S***	***50 B1***	*S*	*50 B1*	***J***	***50 B2***	*J*	*50 B2*	*TRIP-S*	*50 B1*
16	*J*	*50 B2*	*J*	*50 B2*	*S*	*50 B1*	*S*	*50 B1*	***R.I.***	***50 B1***
17	***S***	***50 B2***	*S*	*50 B2*	*S*	*50 B2*	*S*	*50 B2*	*TRIP-S*	*50 B2*
18	*J*	*50 B1*	*J*	*50 B1*	*R.I.*	*50 B2*	*R.I.*	*50 B2*	*T*	*50 B1*
19	*TRIP-S*	*50 B1*	*TRIP-S*	*50 B1*	*T*	*50 B2*	*T*	*50 B2*	*S*	*50 B2*
20	*T*	*50 B2*	***T***	***50 B2***	***J***	***50 B1***	*J*	*50 B1*	*S*	*50 B1*
21	*R.I.*	*50 B1*	*R.I.*	*50 B1*	*TRIP-S*	*50 B1*	***TRIP-S***	***50 B1***	*J*	*50 B2*
22	*R_0*	*R_0*	*R_0*	*R_0*	*R.I.*	*50 B1*	*R.I.*	*50 B1*	*T*	*50 B2*

Tabla 9

Resumen estadístico: comportamiento en 1999-2002 de las carteras formadas en función del comportamiento en los distintos índices en 2003-2005

	S	**T**	**J**	**TRIPS**	**RI**
Nº de fondos T1 (en 03-05) que estaban en T1 en 99-02	13	17	19	16	9
Nº de fondos T2 (en 03-05) que estaban en T2 en 99-02	4	16	13	6	7
Nº de fondos B2 (en 03-05) que estaban en B2 en 99-02	6	6	4	5	11
Nº de fondos B1 (en 03-05) que estaban en B1 en 99-02	6	6	9	7	7

	S	**T**	**J**	**TRIPS**	**RI**
Nº de fondos T1 (en 03-05) que batieron al mercado en 99-02	44	43	45	44	37
Nº de fondos T2 (en 03-05) que batieron al mercado en 99-02	37	41	38	37	41
Nº de fondos B2 (en 03-05) que batieron al mercado en 99-02	10	4	3	12	6
Nº de fondos B1 (en 03-05) que batieron al mercado en 99-02	10	6	9	14	4

	S	**T**	**J**	**TRIPS**	**RI**
La cartera T1 (según 03-05) habría batido al mercado en 99-02	SI	SI	SI	SI	SI
La cartera T2 (según 03-05) habría batido al mercado en 99-02	SI	SI	SI	SI	SI
La cartera B2 (según 03-05) habría batido al mercado en 99-02	NO	NO	NO	NO	NO
La cartera B1 (según 03-05) habría batido al mercado en 99-02	NO	NO	NO	NO	NO

nº	**S**	**S**	**T**	**T**	**J**	**J**	**TRIP-S**	**TRIP-S**	**R.I.**	**R.I.**
1	R_0	R_0	R_0	R_0	**J**	**50 T1**	J	50 T1	T	50 T1
2	J	50 T1	J	50 T1	TRIP-S	50 T1	**TRIP-S**	**50 T1**	S	50 T1
3	T	50 T1	**T**	**50 T1**	T	50 T1	T	50 T1	TRIP-S	50 T1
4	TRIP-S	50 T1	TRIP-S	50 T1	R.I.	50 T1	R.I.	50 T1	J	50 T1
5	**S**	**50 T1**	S	50 T1	R.I.	50 T2	R.I.	50 T2	T	50 T2
6	R.I.	50 T2	R.I.	50 T2	S	50 T1	S	50 T1	**R.I.**	**50 T2**
7	R.I.	50 T1	R.I.	50 T1	T	50 T2	T	50 T2	S	50 T2
8	T	50 T2	**T**	**50 T2**	**J**	**50 T2**	J	50 T2	TRIP-S	50 T2
9	J	50 T2	J	50 T2	S	50 T2	S	50 T2	J	50 T2
10	**S**	**50 T2**	S	50 T2	TRIP-S	50 T2	**TRIP-S**	**50 T2**	**R.I.**	**50 T1**
11	TRIP-S	50 T2	TRIP-S	50 T2	**R_m**	**R_m**	R_0	R_0	R_0	R_0
12	**R_m**	**R_m**	**R_m**	**R_m**	*R_0*	*R_0*	**R_m**	**R_m**	**R_m**	**R_m**
13	*TRIP-S*	*50 B2*	*TRIP-S*	*50 B2*	*TRIP-S*	*50 B2*	***TRIP-S***	***50 B2***	*TRIP-S*	*50 B1*
14	*TRIP-S*	*50 B1*	*TRIP-S*	*50 B1*	*TRIP-S*	*50 B1*	***TRIP-S***	***50 B1***	*TRIP-S*	*50 B2*
15	*J*	*50 B1*	*J*	*50 B1*	***J***	***50 B1***	*J*	*50 B1*	*J*	*50 B1*
16	***S***	***50 B1***	*S*	*50 B1*	*S*	*50 B2*	*S*	*50 B2*	*S*	*50 B2*
17	***S***	***50 B2***	*S*	*50 B2*	*S*	*50 B1*	*S*	*50 B1*	*T*	*50 B2*
18	*T*	*50 B1*	***T***	***50 B1***	*T*	*50 B1*	*T*	*50 B1*	***R.I.***	***50 B1***
19	*J*	*50 B2*	*J*	*50 B2*	*T*	*50 B2*	*T*	*50 B2*	*S*	*50 B1*
20	*T*	*50 B2*	***T***	***50 B2***	***J***	***50 B2***	*J*	*50 B2*	*J*	*50 B2*
21	*R.I.*	*50 B2*	*R.I.*	*50 B2*	*R.I.*	*50 B2*	*R.I.*	*50 B2*	*T*	*50 B1*
22	*R.I.*	*50 B1*	*R.I.*	*50 B1*	*R.I.*	*50 B1*	*R.I.*	*50 B1*	***R.I.***	***50 B2***

ÍNDICES DE *PERFORMANCE*, GESTIÓN ACTIVA Y EFICIENCIA. UN ANÁLISIS DE SENSITIVIDAD Y DEL FENÓMENO DE LA PERSISTENCIA

por F. Gómez-Bezares, J.A. Madariaga, J. Santibáñez y A. Apraiz
El original de este artículo se publicó en la Revista *Ekonomiaz* (Año 2007, nº 66, pp. 220-245), siendo la Administración General de la Comunidad Autónoma de Euskadi la titular de los derechos de propiedad intelectual

1. INTRODUCCIÓN

Hace ya bastantes años que existe un gran interés por conocer la calidad en la gestión de las inversiones en bolsa: fondos de inversión, carteras gestionadas, etc. A la hora de calificar como buena o mala su gestión, supuesta la liquidez de estas inversiones, nos deberemos fijar en su rentabilidad y en su riesgo. Todavía existen inversores, e incluso algunos profesionales, que se fijan fundamentalmente en la rentabilidad, y esto no es correcto en un contexto de enemigos del riesgo: dado que somos enemigos del riesgo (tal como ha supuesto desde hace años la literatura financiera) deberemos comparar la rentabilidad obtenida con el riesgo soportado por el inversor. Esto es lo que hacen los índices de *performance*, y por eso son interesantes para inversores, gestores de carteras, etc.

Una pregunta razonable es qué índice utilizar, dado que hay muchos posibles. En este trabajo comprobaremos cómo los cinco utilizados llegan a resultados similares. Otro tema interesante es el denominado fenómeno de la persistencia, o "manos calientes"; según esta hipótesis los fondos bien gestionados en un periodo, lo suelen ser también en el siguiente, y al revés. Si esto fuera así, el saberlo tendría un interés indudable para los inversores y para la industria de fondos en general.

También se plantea con frecuencia si pequeños cambios en las carteras tomadas como referencia alterarán las conclusiones. Este tipo de preguntas se las hacen con frecuencia los profesionales de la gestión de carteras, y en este trabajo tratamos de colaborar a su contestación.

El interés por comparar los índices de *performance* ha sido clásico en la literatura sobre el tema. Más recientemente se han intensificado los trabajos sobre el fenómeno de la persistencia, con estudios ya clásicos como el de Malkiel (1995) u otros más recientes como Busse y Irvine (2006) o Kosowski, Timmermann, Wermers y White (2006).

En un trabajo anterior ("Índices de *performance*, gestión activa y eficiencia. Un análisis empírico", publicado en 2007 en la *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*) analizábamos la consistencia de los principales índices utilizados en el análisis de la *performance*

de títulos y carteras en bolsa (tanto la que los distintos índices presentan entre sí en un determinado periodo, como la que cada uno muestra en dos periodos consecutivos), y estudiábamos también las posibilidades de batir al mercado con carteras diseñadas a partir de los mencionados índices. Los resultados obtenidos apuntaban entonces a la existencia de una elevada coherencia de las diferentes medidas de *performance*, así como a la posibilidad de batir al mercado utilizando estrategias basadas en la información proporcionada por los índices estudiados (conclusión ésta última que podría interpretarse como una evidencia en contra de la hipótesis de eficiencia débil del mercado, en la medida en que sería posible obtener rentabilidades extraordinarias partiendo de información histórica).

En el presente artículo nos proponemos profundizar algo más en el análisis de las conclusiones apuntadas (que pueden considerarse como sorprendentes), lo que haremos desde una doble perspectiva: por un lado, estudiando la sensibilidad de los resultados obtenidos (en lo que se refiere al tipo de interés sin riesgo empleado; a la utilización de índices de mercado como *benchmarks* o carteras a batir –en lugar de la cartera equiponderada formada por todos los fondos intervinientes–; o a la consideración de la semana en lugar del mes como periodo básico de análisis); y por otro, analizando de manera más rigurosa desde un punto de vista estadístico lo que se conoce como "fenómeno de persistencia" (es decir, el hecho de que el comportamiento presentado por los fondos en un periodo tienda a mantenerse en el siguiente), comprobando hasta qué punto los resultados obtenidos en el trabajo anterior pudieran deberse al azar.

La estructura del artículo es la siguiente: en el segundo apartado resumiremos brevemente los aspectos más relevantes del trabajo anterior (tanto en lo que se refiere a la descripción de la base de datos utilizada y a los principales aspectos metodológicos empleados como a las conclusiones más destacables); en el tercer apartado se realiza un análisis de sensitividad de los resultados obtenidos previamente, replicando íntegramente el trabajo original con rentabilidades semanales y sustituyendo el título sin riesgo empleado por otro distinto, de menor rendimiento; el cuarto apartado recoge las principales conclusiones obtenidas en el estudio del fenómeno de la persistencia, realizándose también en este caso un análisis de sensitividad relativo al *benchmark* utilizado; finalmente, en el quinto y último apartado mostraremos un resumen de las principales conclusiones alcanzadas.

Prescindiremos en este artículo de la justificación teórica e interpretación de los índices utilizados, que puede encontrarse en el trabajo al que nos hemos referido (Gómez-Bezares, Madariaga, Santibáñez y Apraiz, 2007), así como en otros anteriores que se centraban en el tema desde un punto de vista más teórico (Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 2003 y 2004, entre otros).

2. RESUMEN DE LA METODOLOGÍA EMPLEADA Y PRINCIPALES CONCLUSIONES OBTENIDAS EN EL TRABAJO ANTERIOR

2.1. Descripción de la base de datos y metodología utilizada

La base de datos original sobre la que se realizó el estudio estaba constituida por las rentabilidades semanales (calculadas en euros) correspondientes a 983 fondos de renta variable comercializados en Europa en el periodo comprendido entre febrero de 1999 y octubre de 2005 (muestra que puede considerarse como extraordinariamente representativa, al incluir la práctica

totalidad de los fondos de renta variable comercializados en Bélgica, Francia, Alemania, Irlanda, Italia, Luxemburgo, Holanda, España, Suiza y Reino Unido que presentaban la antigüedad indicada, una vez eliminados algunos que mostraban "huecos" en la información disponible). En cuanto a la alternativa de inversión considerada como suficientemente segura (la que actuaría como "título sin riesgo"), nos decantamos por el índice confeccionado por AFI como media de los fondos comercializados en España que invierten su dinero en activos del mercado monetario en la zona euro durante el mismo periodo de tiempo considerado (también semanal). Finalmente, tomamos como "*benchmark*" (o alternativa a batir mediante una gestión activa) una "cartera de mercado" confeccionada como media equiponderada de las rentabilidades de los 983 fondos considerados[1].

Partiendo de lo anterior, y a la vista de que los estudios clásicos muestran una mejor adaptación de los modelos que constituyen la base de los principales índices de *performance* utilizados si se trabaja en base mensual[2], procedimos a obtener las rentabilidades mensuales correspondientes (de los 983 fondos originales, así como de la cartera de mercado –a la que llamaremos R_m– y del título sin riesgo –al que nos referiremos como R_0–), para lo que supusimos meses de cuatro semanas (lo que permite obtener 13 rentabilidades mensuales por fondo o cartera y año considerados).

El siguiente paso consistía en dividir el periodo total en dos subperiodos: el comprendido entre 1999 y 2002; y el que abarca los años 2003 a 2005. Ello permitiría posteriormente estudiar dos cosas: la coherencia que un mismo índice de *performance* muestra entre los dos periodos analizados; y la posibilidad de utilizar la información obtenida en el primer periodo para construir carteras que batan al mercado en el segundo.

Con carácter previo, se realizó un estudio de la normalidad de las rentabilidades mensuales obtenidas, así como de la estabilidad de las betas utilizadas (que como es sabido, son la medida de riesgo sistemático utilizada por algunos de los índices de *performance* considerados). Una vez eliminados aquellos fondos que no cumplían con las características impuestas (menos del 10% del total, como veremos después), procedimos a calcular, para cada periodo, el valor que los distintos fondos presentaban en cada uno de los índices de *performance* considerados en el estudio; a saber:

- Índice de Sharpe (S_i). Premio de rentabilidad por unidad de riesgo total (medido con la desviación típica) ofrecido por el fondo[3].
- Índice de Treynor (T_i). Premio por unidad de riesgo sistemático (medido por beta) ofrecido por el fondo[4].
- Índice de Jensen (J_i). Diferencia entre el premio por riesgo obtenido por el fondo y el que debería haber dado según el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM)[5].
- TRIP coherente con Sharpe (TRIP-S_i)[6]. Rentabilidad equivalente cierta obtenida por el fondo "i" sobre la base de la Línea del Mercado de Capitales (LMC)[7].

[1] De esta manera usamos, tanto como tipo sin riesgo, como para *benchmark*, medias de fondos, relacionando cada fondo con el conjunto de la industria.
[2] Véase Fama (1976) o Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (1994).
[3] Véase Sharpe (1966). Puede verse un planteamiento alternativo en Modigliani y Modigliani (1997).
[4] Véase Treynor (1965). Puede verse un planteamiento alternativo en Modigliani (1997).
[5] Véanse Jensen (1968 y 1969). Pueden verse planteamientos alternativos a los índices clásicos de Sharpe, Treynor y Jensen en Ferruz y Sarto (1997).
[6] Cuya formulación incluimos aquí por tratarse del índice de *performance* menos conocido de los utilizados:

- Ratio de Información (RI_i) entendido como cociente entre el promedio y el riesgo del *tracking error* (TE, diferencia, en cada mes, entre la rentabilidad obtenida por el fondo y la cartera que actúa como *benchmark*)[8].

Obtenidos los valores que los fondos estudiados alcanzaban en cada índice (y en cada uno de los dos subperiodos considerados) procedimos a confeccionar los *rankings* correspondientes (es decir, el número de orden que los fondos ocupaban en cada índice y en cada periodo). Ello nos permitía realizar el análisis de la coherencia de las medidas de *performance* utilizadas desde una doble perspectiva y a través de dos caminos distintos:

- Coherencia entre los distintos índices de *performance* en un mismo periodo:
    - Análisis del valor, signo y significación estadística del coeficiente de correlación de Pearson obtenido entre los valores en cada par de índices.
    - Análisis del valor, signo y significación estadística del coeficiente de correlación de rango de Spearman obtenido entre los *rankings* correspondientes a cada par de índices.

- Coherencia de cada índice de *performance* en los dos subperiodos analizados:
    - Análisis del valor, signo y significación estadística del coeficiente de correlación de Pearson calculado con las puntuaciones de los fondos en un mismo índice en cada uno de los dos periodos considerados.
    - Análisis del valor, signo y significación estadística del coeficiente de correlación de rango de Spearman calculado entre los *rankings* obtenidos con un mismo índice en los dos periodos estudiados.

La segunda parte de lo anterior constituía así una primera aproximación al estudio del "fenómeno de la persistencia". Para profundizar en el estudio del mencionado fenómeno construimos, para cada uno de los cinco índices considerados, y partiendo de los *rankings* obtenidos en el primer subperiodo, cuatro carteras:

- Cartera T1. Constituida por los cincuenta mejores fondos en cada índice (los situados en los puestos 1 a 50 en el *ranking* correspondiente).
- Cartera B1. Constituida por los cincuenta peores fondos (los que ocupan las cincuenta últimas posiciones en el *ranking* correspondiente).
- Cartera T2. Constituida por los cincuenta mejores fondos una vez eliminados los cincuenta primeros (es decir, los fondos clasificados como T1).
- Cartera B2. Formada por los cincuenta fondos peor situados en cada índice después de eliminar los que constituyen la cartera B1.

Nuestra intención era la de estudiar el comportamiento en el segundo subperiodo de las carteras formadas por los fondos que aparecían como "mejores" y "peores" en el primero (siempre con cada uno de los cinco índices de *performance* considerados), analizando si existían diferencias

---

$$\text{TRIP-S}_i = \mu_i - \frac{\mu_m - R_0}{\sigma_m}\sigma_i$$

[7] Véanse Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (2003 y 2004).

[8] Puede verse formulado en Modigliani y Modigliani (1997). Sobre el TE pueden verse también Roll (1992) ó Muralidhar (2000 y 2001).

entre ellas en lo que se refiere a su capacidad de batir a la cartera utilizada como *benchmark* (R_m, tal como hemos indicado).

2.2. Resumen de las principales conclusiones obtenidas

Con carácter previo, y para comprender mejor el alcance de algunos de los elementos que se destacan después, presentamos en la figura 1 el comportamiento de la cartera de mercado y del título sin riesgo en cada uno de los dos subperiodos analizados: como puede verse, en el primero de ellos asistimos a un mercado bajista (con una rentabilidad media negativa), mientras que en el segundo el mercado bate al título sin riesgo (como es lógico esperar a priori, supuesta aversión al riesgo). Ello hace que la conclusión de que puede batirse al mercado en un periodo utilizando la información correspondiente al anterior sea en nuestro caso aún más sorprendente, en la medida en que supondría que los buenos gestores de fondos en periodos bajistas también lo son en periodos alcistas.

Las principales conclusiones alcanzadas en el trabajo previo pueden resumirse en los siguientes términos:

- La hipótesis de normalidad de las rentabilidades mensuales (contrastada con el test de Jarque-Bera) se acepta en la inmensa mayoría de los casos (lo que es coherente con los estudios clásicos): para un error alfa del 1% sólo 85 de los 983 fondos originales no pasan la prueba de normalidad.

- La hipótesis de estabilidad de beta (que contrastamos con el test de Chow) se acepta en 977 de los 983 fondos originales analizados (siempre para un error alfa del 1%). Así, el número total de fondos que superan simultáneamente las pruebas de normalidad y estabilidad de beta es de 893, que fueron los que consideramos finalmente en el resto del estudio[9].

- La coherencia entre los *rankings* obtenidos en un mismo periodo con los distintos índices de *performance* utilizados es muy elevada (correlaciones de rango de Spearman en todos los casos superiores a 0,89 en el periodo 99-02; y mayores que 0,92 –salvo con el Ratio de Información, con valores siempre superiores a 0,74– en 03-05; valores todos ellos estadísticamente significativos).

- También la coherencia entre los valores obtenidos por los fondos en los distintos índices de *performance* analizados dentro de un mismo periodo es muy alta: si prescindimos del Ratio de Información, los coeficientes de correlación de Pearson en los periodos 99-02 y 03-05 son superiores a 0,94 y 0,87, respectivamente; y mayores que 0,86 y 0,74 si consideramos dicho índice; valores todos ellos nuevamente significativos desde un punto de vista estadístico.

- En cuanto a la consistencia que un mismo índice presenta en los dos periodos analizados, ésta es también alta, aunque algo menor. Así, por ejemplo, el coeficiente de correlación de rango de Spearman más elevado es el asociado a los *rankings* obtenidos con el Ratio de Información (0,51), siendo el más bajo el asociado al índice TRIP-Sharpe (0,41);

[9] La razón de eliminar los fondos en los que variaba beta se debe a que entendimos que tales fondos habían cambiado su "vocación".

conclusiones similares se obtienen al analizar los coeficientes de correlación de Pearson entre los valores obtenidos por los fondos con un mismo índice en los dos periodos (si bien el valor correspondiente al índice TRIP-Sharpe baja hasta 0,35), resultando estadísticamente significativos todos los valores obtenidos.

- En lo que se refiere al comportamiento que los 100 mejores y los 100 peores fondos del periodo 99-02 muestran en 03-05 (con cada uno de los índices analizados y repartidos en carteras de 50 fondos) los resultados obtenidos se presentan de manera resumida en las figuras 2 y 3. Como puede verse en la primera, el número de fondos que "repiten grupo" en los dos periodos es elevado entre los mejor clasificados, y baja significativamente entre los últimos; por otro lado, y en lo referente a la posibilidad de batir al mercado en el segundo periodo, los fondos mejor clasificados en el primero muestran un alto grado de capacidad en este sentido, que baja también significativamente en el caso de los fondos peor clasificados. En cualquier caso, y tal como puede comprobarse en la figura 3, las carteras T1 y T2 baten siempre al mercado en el segundo periodo (con todos los índices), mientras que las carteras B1 y B2 no lo hacen en ningún caso; lo que podría considerarse como una evidencia a favor de la utilidad de los índices estudiados a la hora de gestionar carteras (y en contra, tal como hemos dicho, de la hipótesis de eficiencia débil del mercado).

Conviene recordar que la propia metodología utilizada supone trabajar con rentabilidades de fondos que incluyen, en su caso, reinversión de dividendos (o de cualquier otra posible fuente de rentabilidad, como la venta de derechos de suscripción preferente, etc.), así como la corrección correspondiente a las comisiones de gestión. De esta manera, el índice de mercado elegido como *benchmark* (la media no ponderada de las rentabilidades de todos los fondos de renta variable considerados) incluiría también, tanto la corrección por dividendos, como las comisiones correspondientes. Es por ello que nos planteamos si la utilización de un *benchmark* distinto (por ejemplo, un índice de mercado suficientemente representativo del conjunto, a elegir de entre los más frecuentemente empleados) no podría tal vez influir en algunas de las conclusiones alcanzadas; como veremos más tarde, todo el fenómeno de la persistencia lo analizamos sobre la base de los resultados obtenidos con tres *benchmarks* distintos.

3. UN PRIMER ANÁLISIS DE LA ROBUSTEZ DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS EN EL TRABAJO ANTERIOR ANTE CAMBIOS EN EL TÍTULO SIN RIESGO O EN EL PERIODO BÁSICO DE ANÁLISIS UTILIZADOS

Como hemos indicado anteriormente, y con independencia de que continuemos después estudiando la sensibilidad del fenómeno de la persistencia ante cambios en el *benchmark* utilizado, decidimos en primer lugar estudiar si las principales conclusiones alcanzadas cambiarían al optar por un título sin riesgo distinto del considerado en el trabajo original, así como si se supone un periodo básico de análisis diferente al inicialmente empleado. De hecho, una parte importante de las críticas que suelen plantearse a la hora de valorar los resultados de este tipo de estudios se refieren a aspectos metodológicos de partida (siempre discutibles) y que podrían matizar la validez de algunas de sus conclusiones.

Así, replicamos en primer lugar todo el análisis con un tipo de interés sin riesgo sensiblemente inferior al original, y que podría asociarse al rendimiento ofrecido por un depósito de baja

remuneración; y posteriormente realizamos el trabajo completo con el tipo de interés original, pero en base semanal. Aunque en este último caso hay diferencias de importancia en cuanto a la aceptación de la hipótesis de normalidad (lo que también es coherente con los estudios clásicos en la materia), decidimos en el caso de rentabilidades semanales no eliminar ningún fondo (tampoco por falta de estabilidad en las betas, en cuyo caso las diferencias son mucho menores), con la intención de ir comprobando también hasta qué punto las conclusiones son o no sensibles a la eliminación de fondos por los motivos apuntados (aunque nuevamente ello presente también ventajas e inconvenientes).

Las diferencias provocadas por la utilización de un tipo de interés distinto del original son muy pequeñas en lo relativo a la coherencia de los índices (tanto entre sí –en un mismo periodo- como entre periodos). Así, las diferencias en los coeficientes de correlación obtenidos entre los distintos índices se producen en muchos casos en el tercer decimal, apareciendo la mayor diferencia en el coeficiente de correlación de Pearson que relaciona los índices TRIP-Sharpe y Ratio de Información en el periodo 2003-05 (una diferencia que no llega a las 7 centésimas); en cualquier caso, todos los coeficientes obtenidos son estadísticamente significativos. También las tendencias se mantienen en lo relativo a la coherencia que muestra cada índice entre periodos, apareciendo sólo diferencias de cierta importancia en el índice TRIP-Sharpe (que ve cómo el coeficiente de correlación de Pearson cae hasta en 6 centésimas, siendo ya bajo el valor de partida; con todo, resulta también significativo). En cuanto a los fondos que repiten grupo, la máxima diferencia es de tres fondos; y todavía menores son las discrepancias en lo que se refiere al número de fondos que baten al mercado en el segundo periodo. Finalmente, y en lo que hace referencia al comportamiento en 2003-05 de las carteras formadas con los mejores y peores fondos en el periodo 99-02, hay que decir que se mantiene el hecho de que todas las carteras que incluyen los 100 mejores fondos baten al mercado y todas las formadas por los 100 peores son batidas por el mismo (aunque con algunas diferencias de orden entre unas y otras según la aproximación al tipo de interés sin riesgo utilizada).

Algunas mayores diferencias aparecen cuando cambiamos el periodo básico de análisis; de destacar serían las relativas al número de fondos que repiten grupo (que baja significativamente) y a la cantidad de fondos que baten al mercado en el segundo periodo (que aumenta de manera importante, incluso entre los fondos peor clasificados en el primero). También resulta reseñable el hecho de que todas las carteras caracterizadas como T1 ó T2 en el primer subperiodo baten al mercado en el segundo (al igual que en los casos anteriores), aunque en este caso también algunas caracterizadas como B1 (con Jensen y Treynor) lo hacen con algunos índices.

Como resumen de todo lo comentado, diremos que las conclusiones no parecen verse afectadas de manera importante por la utilización de una aproximación diferente al tipo de interés sin riesgo, mientras que el empleo de la semana como periodo básico de análisis arroja resultados similares, aunque algo más confusos (lo que nos remite nuevamente a los estudios clásicos, que apuntan ventajas asociadas a la utilización de rentabilidades mensuales).

4. ESTUDIO DEL FENÓMENO DE LA PERSISTENCIA

4.1. Aspectos metodológicos

Como indicábamos al principio del artículo, en este apartado profundizaremos en el estudio de la coherencia que cada índice presenta en dos periodos distintos (prescindiendo, por tanto, de las relaciones que en un mismo periodo pudieran existir entre los diferentes índices considerados).

Volvamos, en una primera aproximación, a lo realizado en el artículo anterior en relación al fenómeno de la persistencia. Como se ha indicado, en su momento confeccionamos, para cada uno de los índices de *performance* considerados, el *ranking* de fondos correspondiente al periodo 99-02. Así, por ejemplo, tomando el índice de Sharpe, llegábamos a la siguiente información:

Nº orden	Fondo	Sharpe (99-02)
1	X	T1
...	...	T1
50	Y	T1
51	Z	T2
...	...	T2
100	A	T2
101	B	-
...	...	-
...	...	-
793	C	-
794	D	B2
...	...	B2
843	E	B2
844	F	B1
...	...	B1
893	G	B1

Partiendo de la información anterior, y realizando un proceso idéntico para el periodo 03-05, analizábamos si los fondos clasificados en cada grupo en el primer periodo tendían a serlo también en el segundo (es decir, si, por ejemplo, un fondo clasificado como T1 en 99-02 volvía a serlo en 03-05); y analizábamos también cuántos de los fondos clasificados en cada grupo en el primer periodo batían al mercado en el segundo. Los resultados obtenidos entonces eran interesantes, pudiendo percibirse una mayor tendencia a "repetir comportamiento" en los fondos mejor clasificados, en proporciones que intuitivamente parecían claramente superiores a las que pudiera provocar el azar (cosa que no ocurría en los fondos peor clasificados). Por otro lado, la capacidad de los fondos mejor clasificados en el primer periodo de batir al mercado en el segundo parecía clara, resultando la proporción de los que lo conseguían claramente superior a la que pudiera deberse al azar. Y todo ello venía avalado por el comportamiento mostrado por las carteras formadas por los fondos mejor clasificados en el primer periodo, que batían en todos los casos al mercado en el segundo (cosa que no ocurría nunca con las carteras formadas por los fondos peor clasificados).

En este trabajo trataremos ahora de:

- Confirmar estadísticamente la existencia del mencionado fenómeno de persistencia (para lo que utilizaremos dos tests distintos, construidos ambos sobre la base de las tablas de contingencia correspondientes).
- Analizar la robustez de los resultados obtenidos, utilizando como *benchmark* un índice de mercado diferente al empleado hasta el momento, y considerando ahora la totalidad de los fondos originales (sin prescindir de ninguno por razones de normalidad o de estabilidad de las betas; lo que presenta la ventaja de eliminar posibles sesgos).

Con relación a este último punto, hay que indicar que la utilización de índices de mercado como *benchmark* presentaría a su vez ventajas e inconvenientes:

- Como ventaja, el índice no se vería penalizado por las comisiones (como ocurre en el caso de utilizar la cartera de mercado R_m, cuya rentabilidad se obtenía a partir de las de los fondos, donde están descontadas dichas comisiones). Se evitaría así dar una ventaja artificial a la gestión activa frente a la pasiva.
- Como inconveniente, los índices al uso no suelen considerar la reinversión de los dividendos (que sí es implícitamente considerada al utilizar la cartera R_m). Para evitar este problema, utilizamos un índice formado por los 600 títulos más importantes a nivel europeo, convenientemente corregido por la reinversión de los dividendos correspondientes.

Así las cosas, decidimos realizar esta parte del estudio tomando tres posibles *benchmarks* a batir: la cartera de mercado calculada como media no ponderada de todos los fondos considerados (la misma que se empleó en el trabajo anterior); el llamado SXXP Index, que aglutina a las 600 empresas más grandes de Europa, corrigiendo con dividendos (y que en opinión de los profesionales de la gestión de fondos consultados sería el *benchmark* pasivo ideal en el contexto de la Teoría de cartera y el CAPM); y el SX5P INDEX (corregido nuevamente con dividendos), que es un índice similar al EUROSTOXX, pero que incluye algunos de los títulos más importantes de la zona no euro (y que es claramente peor que el anterior, en la medida en que considera un número de títulos muy inferior, pero que tomamos de alguna manera como contraste). Y todo ello con los 983 fondos y el título sin riesgo originalmente considerados y en base mensual.

Evidentemente, la utilización de *benchmarks* diferentes al empleado originalmente supone que las betas (y todos los índices en los que se consideren éstas) cambian[10]. Aunque puede demostrarse que los cambios no serían demasiado importantes (de hecho los coeficientes de correlación obtenidos entre betas son elevadísimos), decidimos trabajar con los valores recalculados para cada *benchmark*.

De esta manera, para cada índice de *performance* y para cada uno de los tres *benchmark*s considerados, se construyeron cuatro tablas de contingencia (todas ellas con las frecuencias absolutas observadas):

Tabla 1: Persistencia en la pertenencia al grupo T1 (los 50 mejores)

		Periodo 03-05		
	Frec. Abs. Obs.	**Grupo T1**	**Resto**	Suma filas
Periodo 99-02	**Grupo T1**	$T1_{99\text{-}02} \cap T1_{03\text{-}05}$	$T1_{99\text{-}02}$ - $resto_{03\text{-}05}$	50
	Resto	$resto_{99\text{-}02} \cap T1_{03\text{-}05}$	$resto_{99\text{-}02}$ - $resto_{03\text{-}05}$	933
	Suma columnas	50	933	**983**

Como puede verse, cada una de las cuatro celdillas de la tabla indica las posibles combinaciones en el comportamiento de un fondo en el transcurso de los dos periodos: así, $T1_{99\text{-}02}$-$T1_{03\text{-}05}$ indica el número de fondos clasificados en el grupo T1 en los dos subperiodos considerados; $T1_{99\text{-}02}$-

[10] Al usar el propio *benchmark* como cartera de mercado.

$resto_{03\text{-}05}$ hace referencia al de los que aparecen clasificados entre los cincuenta primeros en el periodo 99-02 pero no lo hacen en 03-05; $resto_{99\text{-}02}$-$T1_{03\text{-}05}$ es el número de fondos clasificados como T1 en el periodo 03-05 pero no en 99-02; y $resto_{99\text{-}02}$-$resto_{03\text{-}05}$ se refiere al de los fondos que no quedan clasificados en el grupo de los cincuenta mejores en ninguno de los dos periodos. Así, la primera fila debe sumar necesariamente 50 (ya que los fondos clasificados como T1 en el primer periodo deben repartirse entre T1 y resto en el segundo; y lo mismo ocurre con la suma de la primera columna, que indica el comportamiento en 99-02 de los fondos clasificados como T1 en 03-05 (nuevamente 50). Y dado que el total de fondos analizados es 983, conocida la primera celdilla pueden obtenerse todas las demás.

Tabla 2. Persistencia en la pertenencia a los grupos T1 ó T2 (los 100 mejores)

		Periodo 03-05		
	Frec. Abs. Obs.	**Grupo T12**	**Resto**	Suma filas
Periodo 99-02	**Grupo T12**	$T12_{99\text{-}02} - T12_{03\text{-}05}$	$T12_{99\text{-}02}$ - $resto_{03\text{-}05}$	100
	Resto	$resto_{99\text{-}02} - T12_{03\text{-}05}$	$resto_{99\text{-}02}$ - $resto_{03\text{-}05}$	883
	Suma columnas	100	883	**983**

En la tabla 2 correspondiente a cada índice de *performance* (y a cada *benchmark*) se realiza un estudio similar al anterior pero referido a los fondos clasificados en cualquiera de los dos primeros grupos (T1 ó T2). Así, en la primera celdilla aparece el número de fondos clasificados como T1 ó T2 en los dos periodos considerados; la celdilla correspondiente a $T12_{99\text{-}02}$-$resto_{03\text{-}05}$ indica el número de los que, clasificados como T1 ó T2 en el primer periodo, no lo son en el segundo; $resto_{99\text{-}02}$-$T12_{03\text{-}05}$ recoge el número de fondos no clasificados entre los 100 mejores en el periodo 99-02 que sí aparecen como tales en 03-05; y los fondos $resto_{99\text{-}02}$-$resto_{03\text{-}05}$ son aquellos que no aparecen entre los 100 mejores en ninguno de los dos periodos considerados. El lector puede comprobar que ahora la suma de la primera fila (lo mismo que la primera columna) debe necesariamente ser 100; con lo que nuevamente, el conocimiento de una celdilla cualquiera de la tabla permitiría calcular las cifras correspondientes al resto.

Tabla 3. Relación entre pertenecer o no a T1 (los 50 mejores) en el primer periodo y batir o no al *benchmark* en el segundo

		Periodo 03-05		
	Frec. Abs. Obs.	**Bate**	**No bate**	Suma filas
Periodo 99-02	**T1**	$T1_{99\text{-}02}$-$Bate_{03\text{-}05}$	$T1_{99\text{-}02}$-No $bate_{03\text{-}05}$	50
	Resto	$Resto_{99\text{-}02}$-$Bate_{03\text{-}05}$	$Resto_{99\text{-}02}$-No $bate_{03\text{-}05}$	933
	Suma columnas	X_1	X_2	**983**

En la tabla 3 correspondiente a un índice y un *benchmark* concretos analizaremos la relación existente entre "aparecer (o no) clasificado en el grupo de los 50 mejores fondos en el periodo 99-02" y "batir (o no) al mercado en el 03-05". En este caso, puede verse que la suma de la primera fila debe necesariamente ser igual a 50 (por lo que la segunda debe sumar 933), pero la suma de la primera columna no es conocida a priori (ya que se refiere al número de fondos que baten al *benchmark* en el periodo 03-05, lo que no está fijado de antemano como en tablas

anteriores). En resumen, X_1 es el número de fondos que baten al *benchmark* en el periodo 03-05 (siendo X_2 el de los que no lo hacen, es decir, 983 – X_1)

Tabla 4. Relación entre pertenecer o no a T1 ó T2 (los 100 mejores) en el primer periodo y batir o no al *benchmark* en el segundo

		Periodo 03-05		
	Frec. Abs. Obs.	**Bate**	**No bate**	Suma filas
Periodo 99-02	**T12**	$T12_{99\text{-}02}$-$Bate_{03\text{-}05}$	$T12_{99\text{-}02}$-No $bate_{03\text{-}05}$	100
	Resto	$Resto_{99\text{-}02}$-$Bate_{03\text{-}05}$	$Resto_{99\text{-}02}$-No $bate_{03\text{-}05}$	883
	Suma columnas	X_1	X_2	**983**

La tabla 4 correspondiente a cada índice (y *benchmark*) estudia la posible relación existente entre los atributos "pertenecer o no al grupo T1 ó T2 en el primer periodo" y "batir o no al *benchmark* en el segundo periodo". Nuevamente son conocidas a priori las sumas correspondientes a las filas (100 y 883, respectivamente), pero no a las columnas (aunque, evidentemente, las sumas de estas últimas deben coincidir para un mismo índice y *benchmark* en las tablas 3 y 4).

Con cada una de las tablas presentadas se realizan varios tests (en alguno de los casos por caminos diferentes), con la intención de estudiar el fenómeno aludido de la persistencia. En concreto, las tablas 1 y 2 tienen evidentemente que ver con dicho fenómeno, en la medida en que estudian si los fondos tienden a "repetir comportamiento" (es decir, permiten analizar si saber que un fondo pertenece a un determinado grupo en el primer periodo constituye o no una información relevante a la hora de prever cómo quedará clasificado en el segundo); y en lo relativo a las tablas 3 y 4, lo que se analiza no es estrictamente el fenómeno de la persistencia, pero sí algo relacionado con ella (ya que nos indican si los fondos bien clasificados en el primer periodo tienden a batir al mercado en el segundo).

Tomando como ejemplo la tabla 3 (que da algún mayor juego, al presentar atributos distintos en filas y columnas), los tests utilizados son los siguientes:

1. El que algunos autores llaman test de la "Z de Malkiel"[11]. En la tabla 3 original tenemos las frecuencias absolutas "observadas", por lo que podemos utilizar la siguiente nomenclatura:

		Periodo 03-05		
	Frec. Abs. Obs.	**Bate**	**No bate**	Suma filas
Periodo 99-02	**T1**	O_{11}	O_{12}	50
	Resto	O_{21}	O_{22}	933
	Suma columnas	X_1	X_2	**983**

Si no existiera relación entre los dos atributos considerados ("pertenecer o no al grupo T1 en el primer periodo" y "batir o no al mercado en el segundo"), lo que interpretaríamos como un indicio de falta de persistencia, las proporciones que X_1 y X_2 representan sobre el total (probabilidad de batir o no al *benchmark* en el periodo 03-05) deberían mantenerse de idéntica

[11] Malkiel (1995).

forma tanto en los fondos clasificados como "T1" o como "resto" en el periodo 99-02. Así, si llamamos:

$$p_1 = \frac{X_1}{N} \quad \text{y} \quad p_2 = \frac{X_2}{N}$$

(donde N=983), debería ocurrir (en ausencia de relación) que las frecuencias absolutas observadas respondieran al patrón "estimado":

		Periodo 03-05		
	Frec. Abs. Est.	**Bate**	**No bate**	Suma filas
Periodo 99-02	**T1**	$E_{11} = p_1 \cdot n_1$	$E_{12} = p_2 \cdot n_1$	n_1
	Resto	$E_{21} = p_1 \cdot n_2$	$E_{22} = p_2 \cdot n_2$	n_2
	Suma columnas	X_1	X_2	**N**

donde n_1=50 y n_2=933 (siempre que nos refiramos a la información recogida en la tabla 3). Insistimos una vez más en el hecho de que éstas son las frecuencias absolutas conjuntas estimadas bajo la hipótesis nula de no relación entre "pertenencia o no al grupo T1 en el primer periodo" y "batir o no al *benchmark* en 03-05".

Por otro lado, el estadístico:

$$Z = \frac{Y - np}{\sqrt{np\,(1 - p)}}$$

que sigue aproximadamente una distribución normal tipificada (0,1), es el que utilizaremos para aceptar o rechazar la hipótesis nula planteada. En esto se basa la Z de Malkiel, que en nuestro caso llevaría a la siguiente expresión asociada a cada posible celdilla de la tabla anterior:

$$Z_{ij} = \frac{O_{ij} - E_{ij}}{\sqrt{E_{ij}\,(1 - p_j)}}$$

La fórmula propuesta proporciona el valor experimental, para el que posteriormente se obtendría la cola que deja a su izquierda (o derecha). Lógicamente, la prueba debe realizarse a dos colas, por lo que si deseamos trabajar con un error alfa del 5% (de rechazar la hipótesis nula cuando es cierta) la aceptación de dicha hipótesis exigiría que dicha cola fuera igual o mayor que el 2,5%.

El lector puede comprobar que, en realidad, lo que se contrasta con el test propuesto es si las probabilidades p_1 y p_2 (frecuencias marginales de las columnas) se mantienen en todas las categorías del atributo representado en las filas (lo que sería un indicio de falta de relación entre los atributos recogidos en filas y columnas). Así, es evidente que el test es redundante en cada fila, es decir, que Z_{11} y Z_{12} (al igual que Z_{21} y Z_{22}) son valores totalmente relacionados (de hecho, presentan siempre valores idénticos, pero cambiados de signo). Y también podría realizarse todo el proceso propuesto calculando las probabilidades a partir de las frecuencias de las filas (en lugar de las de las columnas; pero no entraremos en ello).

2. Test de la Chi cuadrado. Como es sabido, la relación entre dos atributos puede analizarse también mediante este test. En nuestro caso, el estadístico a estudiar sería el siguiente:

$$\sum_{i=1}^{f}\sum_{j=1}^{c}\frac{(O_{ij}-E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

que sigue aproximadamente una distribución Chi cuadrado con k = (f-1)x(c-1) grados de libertad (donde f y c son, respectivamente, las categorías posibles en los atributos presentados en filas y columnas –en nuestro caso, f=c=2; y por tanto, k=1 grados de libertad–). Finalmente, diremos que, evidentemente, sea cual sea el camino elegido para realizar el test de la Z de Malkiel, la prueba de la Chi cuadrado es la misma (al serlo las tablas de frecuencias observadas y estimadas).

4.2. Discusión de los resultados obtenidos

Dado el ingente volumen de datos generados por la combinación de índices de *performance* considerados, *benchmarks* elegidos y pruebas a realizar, trataremos de resumir la información relevante en unos cuadros sencillos con la siguiente estructura:

Índice: Sharpe
Benchmark: Cartera equiponderada R_m

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	6,730	0,00%	SI	47,726	0,00%	SI
	resto	1,558	5,96%	NO			
Tabla 2	**T1 ó T2**	8,544	0,00%	SI	81,262	0,00%	SI
	resto	2,875	0,20%	SI			
Tabla 3	**T1**	5,476	0,00%	SI	31,594	0,00%	SI
	resto	1,268	10,25%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	7,744	0,00%	SI	66,766	0,00%	SI
	resto	2,606	0,46%	SI			

Como puede verse, en la segunda columna se recogen las dos posibles categorías que puede tomar el atributo considerado en el primer periodo (99-02). Así, por ejemplo, si nos centramos en la primera fila, la Z de Malkiel contrasta la siguiente hipótesis nula: "se mantienen en el grupo 'T1' del periodo 99-02 las frecuencias marginales de las columnas"; mientras que en la segunda fila, con la Z de Malkiel se contrasta la siguiente hipótesis nula: "se mantienen en el grupo 'resto' del periodo 99-02 las frecuencias marginales de las columnas". En la cuarta columna se ofrece la cola que queda a la derecha del valor de Z obtenido (o a la izquierda, ya que el valor experimental de Z se muestra en valor absoluto): si es menor que el 2,5% deberemos rechazar la hipótesis nula (lo que interpretaremos como indicio de relación entre los atributos considerados). En realidad, el tener un valor alto de Z en valor absoluto (o de Chi cuadrado), indica "relación", pero no necesariamente persistencia; efectivamente, podría darse también el fenómeno contrario: que los mejores del primer periodo fueran los peores del siguiente, y eso daría también valores altos en los estadísticos, indicando relación. Sin embargo, en nuestro caso los valores de Z (con

su signo) indican en todos los casos que esa relación es la coherente con el fenómeno de la persistencia.

La prueba de la Chi cuadrado contrasta directamente si hay relación entre los dos atributos considerados. Así, por ejemplo, la hipótesis nula que se contrasta en la tabla 1 es: "No existe relación entre los atributos 'ser T1 o resto en el primer periodo' y 'ser T1 o resto en el segundo periodo'". Es claro que se analiza algo muy parecido, pero la Z de Malkiel permite discernir si hay diferencias en la relación dependiendo de la categoría a la que hagamos referencia con respecto al primer periodo.

En las figuras 4 a 8 se muestran los resultados obtenidos, para un error alfa del 5%. De su observación pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- Análisis del fenómeno de persistencia en sentido estricto: Tablas 1 y 2.

  Con la Z de Malkiel, hay que indicar que se rechaza en todos los casos la hipótesis nula en la primera fila de cada tabla. Dicho de otra manera, aceptamos, con todos los índices de *performance*, y con cualquiera de los *benchmarks* estudiados, que se da el fenómeno de persistencia en relación a los fondos mejor clasificados. Algo muy parecido ocurre también con los fondos clasificados como "resto" en el primer periodo, aunque en este caso, los índices de Sharpe, Treynor y el Ratio de Información presentan con algunos *benchmarks* resultados contradictorios. De cualquier modo, con el test de la Chi cuadrado, que contrasta directamente la relación entre los dos atributos estudiados, se acepta en todos los casos la existencia de dicha relación.

- Análisis de la relación existente entre "estar o no entre los 50 mejores en el primer periodo" y "batir o no al *benchmark* en el segundo periodo": Tabla 3.

  Con el test de la Z de Malkiel se rechaza la hipótesis nula de que se mantengan las frecuencias marginales de las columnas en la primera fila de cada tabla con todos los índices y *benchmarks* considerados (a excepción del tercer *benchmark*, que ya indicábamos que era claramente el peor, con el que se aceptaría dicha hipótesis con los índices de Treynor, Jensen y R.I.). En lo que se refiere a los fondos clasificados en el primer periodo como "resto", se acepta la hipótesis nula. El test de la Chi cuadrado corrobora la existencia de relación entre los dos atributos analizados en todos los casos, salvo con el tercer *benchmark* y con los índices de Treynor, Jensen y R.I.

- Análisis de la relación existente entre "estar o no entre los 100 mejores fondos en el primer periodo" (es decir, estar clasificado como T1 ó T2) y "batir o no al *benchmark* en el segundo periodo": Tabla 4.

  Los resultados vuelven a ser bastante parecidos, rechazándose la hipótesis nula en la primera fila de cada tabla (con todos los índices y *benchmarks* estudiados); mientras que en la segunda fila sólo se aceptaría en casos puntuales (en todos los índices, con el tercer *benchmark*; y en el índice R.I. con el segundo y el tercero). En cualquier caso, por el test de la Chi cuadrado se acepta la existencia de relación entre los dos atributos considerados en todos los casos.

Finalmente, ofrecemos en las figuras 9 y 10 una información resumida que puede resultar de interés para el gestor de carteras y fondos. Así, en la figura 9 se muestra el número de fondos

clasificados como T1 y T2 en el periodo 99-02 que baten al *benchmark* en 03-05, junto con el número total de fondos (de los 983 considerados) que baten también a dicho *benchmark*; todo ello para cada índice de *performance* estudiado, y considerando como *benchmark* el que, en opinión de los expertos consultados, resulta más adecuado en este contexto: el SXXP Index (que, recordemos, aglutinaba a las 600 empresas más grandes de Europa), convenientemente corregido con dividendos. Y en la figura 10 se muestra un resumen de los resultados que se obtienen en las tablas 3 y 4 con la Z de Malkiel, empleando ahora un valor p=0,5 (ya que, a priori, cabría pensar que la mitad de los fondos quedarán por encima del *benchmark*). Como puede verse, se aceptaría la hipótesis de que la utilización de estrategias basadas en la selección de fondos clasificados como T1 y/o T2 en el periodo 99-02 permite batir al mercado en 03-05 con una probabilidad superior al 50%.

5. CONCLUSIONES

A la vista de los resultados obtenidos, debemos decir que, realizado un análisis de robustez (o sensitividad) de los resultados alcanzados en el trabajo previo referido a la posibilidad de utilizar un tipo de interés sin riesgo distinto del original, un periodo básico de análisis diferente (la semana en lugar del mes) e incluso un *benchmark* alternativo (un índice de mercado que corrija con dividendos, pero no considere las comisiones), las conclusiones fundamentales se mantienen: existe una cierta persistencia, al menos en lo que se refiere a los fondos que quedan mejor clasificados en el primer periodo, que tienden también a serlo en el segundo (recuérdese que el primero es un periodo bajista y el segundo es alcista); y por otro lado, se acepta la hipótesis de existencia de relación entre quedar clasificado entre los mejores fondos en el primer periodo y batir al mercado en el segundo (lo que justificaría la utilización de los *rankings* obtenidos con los índices de *performance* en el primer periodo para formar carteras que batan a la gestión pasiva en el segundo). Todo lo cual presenta una significación estadística suficiente.

Por otro lado, podemos también indicar que, como era de esperar, los resultados son algo más confusos al utilizar un *benchmark* como el tercero (que es un índice claramente menos representativo que el segundo, al recoger una parte muy inferior de los títulos cotizados), no existiendo una diferencia importante entre utilizar una cartera de mercado que incluya todos los fondos equiponderados o un índice suficientemente representativo del conjunto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BUSSE, J.A. and P.J. IRVINE (2006): "Bayesian Alphas and Mutual Fund Persistence", *The Journal of Finance*, Vol. LXI, no. 5, October, pp. 2251-2288.

FAMA, E.F. (1976): *Foundations of Finance*, Basic Books, Nueva York.

FERRUZ, L. y J.L. SARTO (1997): "Revisión crítica de las medidas clásicas de performance de carteras y propuesta de índices alternativos. Aplicación a fondos de inversión españoles (1990-1995)", *Boletín de Estudios Económicos*, Vol. LII, no. 162, Diciembre, págs. 549-573.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (1994): Valoración de acciones en la Bolsa Española. Un análisis de la relación entre la rentabilidad y el riesgo, Desclée de Brouwer, Bilbao.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2003): "Medidas de performance: Algunos índices clásicos y relación de la TRIP con la teoría de cartera", *Análisis Financiero Internacional*, nº 113, Tercer Trimestre, págs. 5-19.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2004): "Performance ajustada al riesgo: Índices clásicos y nuevas medidas", *Análisis Financiero*, nº 93, Primer Cuatrimestre, págs. 6-16.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA, J. SANTIBÁÑEZ y A. APRAIZ (2007): "Índices de performance, gestión activa y eficiencia. Un análisis empírico", *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, vol. 16, n° 2, págs. 21-40.

JENSEN, M.C. (1968): "The performance of mutual funds in the period 1945-1964", *Journal of finance*, Mayo, págs. 389-416.

JENSEN, M.C. (1969): "Risk, the pricing of capital assets, and the evaluation of investment portfolios", *Journal of business*, Abril, págs. 167-247.

KOSOWSKI, R., A. TIMMERMANN, R. WERMERS and H. WHITE (2006): "Can Mutual Fund 'Stars' Really Pick Stocks? New Evidence from a Bootstrap Analysis", *The Journal of Finance*, Vol. LXI, no. 6, December, pp. 2551-2595.

MALKIEL, B.G. (1995): "Returns from Investing in Equity Mutual Funds 1971 to 1991", *The Journal of Finance*, Vol. L, no. 2, June, pp. 549-572.

MODIGLIANI, L. (1997): "Don't Pick Your Managers By Their Alphas", *U.S. Investment Research, U.S Strategy*, Morgan Stanley Dean Witter, June.

MODIGLIANI, F. and L. MODIGLIANI (1997): "Risk-Adjusted Performance", *Journal of Portfolio Management*, vol. 23, no. 2, Winter, pp. 45-54.

MURALIDHAR, A. (2000): "Risk-Adjusted Performance: The Correlation Correction", *Financial Analysts Journal*, vol. 56, no. 5, September/October, pp. 63-71.

MURALIDHAR, A. (2001): "Optimal Risk-Adjusted Portfolios with Multiple Managers", *Journal of Portfolio Management*, vol. 27, no. 3, Spring, pp. 97-104.

ROLL, R. (1992): "A Mean/Variance Analysis of Tracking Error", *Journal of Portfolio Management*, vol. 18, no. 4, Summer, pp. 13-22.

SHARPE, W.F. (1966): "Mutual fund performance", *Journal of business*, Enero, págs. 119-138.

TREYNOR, J.L. (1965): "How to rate management of investment funds", *Harvard business review*, Enero-Febrero, págs. 63-75.

APÉNDICE DE FIGURAS

Figura 1 (Rentabilidades mensuales, AFI FIAMM). Comportamiento, en cada periodo, del índice de mercado y del título sin riesgo

	Periodo 99-02	μ	σ	β	μ_{TE}	σ_{TE}
R_m	Media aritmética no pon	-0,29%	4,98%	1	0,00%	0,00%
R_0	AFI Media FIAMM	0,28%	0,11%	-0,008	0,58%	5,02%

	Periodo 03-05	μ	σ	β	μ_{TE}	σ_{TE}
R_m	Media aritmética no pon	1,24%	2,67%	1	0,00%	0,00%
R_0	AFI Media FIAMM	0,17%	0,06%	-0,001	-1,07%	2,67%

Figura 2 (Rentabilidades mensuales, AFI FIAMM). Resumen estadístico: comportamiento en 2003-2005 de las carteras formadas en función del comportamiento en los distintos índices en 1999-2002

Nº de fondos que repiten comportamiento	S	T	J	TRIPS	RI
Nº de fondos T1 (en 99-02) que repiten grupo T1 en 03-05	13	17	19	16	9
Nº de fondos T2 (en 99-02) que repiten grupo T2 en 03-05	4	16	13	6	7
Nº de fondos B2 (en 99-02) que repiten grupo B2 en 03-05	6	6	4	5	11
Nº de fondos B1 (en 99-02) que repiten grupo B1 en 03-05	6	6	9	7	7

Nº de fondos que baten al mercado	S	T	J	TRIPS	RI
Nº de fondos T1 (en 99-02) que baten al mercado en 03-05	27	42	42	25	40
Nº de fondos T2 (en 99-02) que baten al mercado en 03-05	23	39	37	24	36
Nº de fondos B2 (en 99-02) que baten al mercado en 03-05	3	10	13	4	10
Nº de fondos B1 (en 99-02) que baten al mercado en 03-05	4	14	8	3	7

¿Baten las carteras a la cartera de mercado?	S	T	J	TRIPS	RI
La cartera T1 (según 99-02) bate al mercado en 03-05	SI	SI	SI	SI	SI
La cartera T2 (según 99-02) bate al mercado en 03-05	SI	SI	SI	SI	SI
La cartera B2 (según 99-02) bate al mercado en 03-05	NO	NO	NO	NO	NO
La cartera B1 (según 99-02) bate al mercado en 03-05	NO	NO	NO	NO	NO

Figura 3 (Rentabilidades mensuales, AFI FIAMM). Resumen estadístico: comportamiento en 2003-2005 de las carteras formadas en función del comportamiento en los distintos índices en 1999-2002 (en relación a la cartera de mercado y el título sin riesgo)

nº	S	S	T	T	J	J	TRIP-S	TRIP-S	R.I.	R.I.
1	**S**	**50 T1**	S	50 T1	TRIP-S	50 T1	S	50 T1	**R.I.**	**50 T2**
2	T	50 T1	**T**	**50 T1**	**J**	**50 T1**	T	50 T1	TRIP-S	50 T2
3	R.I.	50 T2	J	50 T1	S	50 T1	J	50 T1	T	50 T1
4	J	50 T1	TRIP-S	50 T1	T	50 T1	**TRIP-S**	**50 T1**	S	50 T1
5	TRIP-S	50 T2	R.I.	50 T2	TRIP-S	50 T2	R.I.	50 T2	J	50 T1
6	TRIP-S	50 T1	TRIP-S	50 T2	T	50 T2	**TRIP-S**	**50 T2**	TRIP-S	50 T1
7	**S**	**50 T2**	**T**	**50 T2**	S	50 T2	T	50 T2	S	50 T2
8	T	50 T2	S	50 T2	R.I.	50 T2	S	50 T2	T	50 T2
9	J	50 T2	R.I.	50 T1	R.I.	50 T1	J	50 T2	J	50 T2
10	R.I.	50 T1	J	50 T2	**J**	**50 T2**	R.I.	50 T1	**R.I.**	**50 T1**
11	**R_m**	**R_m**	**R_m**	**R_m**	R_0	R_0	**R_m**	**R_m**	**R_m**	**R_m**
12	*T*	*50 B1*	***T***	***50 B1***	**R_m**	**R_m**	*R_0*	*R_0*	***R.I.***	***50 B2***
13	*TRIP-S*	*50 B2*	*R.I.*	*50 B2*	*T*	*50 B1*	*T*	*50 B1*	*J*	*50 B1*
14	*R.I.*	*50 B2*	*TRIP-S*	*50 B2*	*TRIP-S*	*50 B2*	***TRIP-S***	***50 B2***	*R_0*	*R_0*
15	***S***	***50 B1***	*S*	*50 B1*	***J***	***50 B2***	*J*	*50 B2*	*TRIP-S*	*50 B1*
16	*J*	*50 B2*	*J*	*50 B2*	*S*	*50 B1*	*S*	*50 B1*	***R.I.***	***50 B1***
17	***S***	***50 B2***	*S*	*50 B2*	*S*	*50 B2*	*S*	*50 B2*	*TRIP-S*	*50 B2*
18	*J*	*50 B1*	*J*	*50 B1*	*R.I.*	*50 B2*	*R.I.*	*50 B2*	*T*	*50 B1*
19	*TRIP-S*	*50 B1*	*TRIP-S*	*50 B1*	*T*	*50 B2*	*T*	*50 B2*	*S*	*50 B2*
20	*T*	*50 B2*	***T***	***50 B2***	***J***	***50 B1***	*J*	*50 B1*	*S*	*50 B1*
21	*R.I.*	*50 B1*	*R.I.*	*50 B1*	*TRIP-S*	*50 B1*	***TRIP-S***	***50 B1***	*J*	*50 B2*
22	*R_0*	*R_0*	*R_0*	*R_0*	*R.I.*	*50 B1*	*R.I.*	*50 B1*	*T*	*50 B2*

Figura 4. Estudio de la persistencia con el Índice de Sharpe (Rentabilidades mensuales, AFI FIAMM; para un error alfa del 5%)

***Benchmark*: Cartera equiponderada R_m**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	6,730	0,00%	SI	47,726	0,00%	SI
	resto	1,558	5,96%	NO			
Tabla 2	**T1 ó T2**	8,544	0,00%	SI	81,262	0,00%	SI
	resto	2,875	0,20%	SI			
Tabla 3	**T1**	5,476	0,00%	SI	31,594	0,00%	SI
	resto	1,268	10,25%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	7,744	0,00%	SI	66,766	0,00%	SI
	resto	2,606	0,46%	SI			

***Benchmark*: SXXP Index**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	6,730	0,00%	SI	47,726	0,00%	SI
	resto	1,558	5,96%	NO			
Tabla 2	**T1 ó T2**	8,544	0,00%	SI	81,262	0,00%	SI
	resto	2,875	0,20%	SI			
Tabla 3	**T1**	5,349	0,00%	SI	30,146	0,00%	SI
	resto	1,238	10,78%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	7,565	0,00%	SI	63,707	0,00%	SI
	resto	2,546	0,55%	SI			

***Benchmark*: SX5P INDEX (50 ZONA EURO+GB+...)**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	6,730	0,00%	SI	47,726	0,00%	SI
	resto	1,558	5,96%	NO			
Tabla 2	**T1 ó T2**	8,544	0,00%	SI	81,262	0,00%	SI
	resto	2,875	0,20%	SI			
Tabla 3	**T1**	3,571	0,02%	SI	13,437	0,02%	SI
	resto	0,827	20,42%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	4,388	0,00%	SI	21,440	0,00%	SI
	resto	1,477	6,99%	NO			

Figura 5. Estudio de la persistencia con el Índice de Treynor (Rentabilidades mensuales, AFI FIAMM; para un error alfa del 5%)

***Benchmark*: Cartera equiponderada R_m**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	7,374	0,00%	SI	57,290	0,00%	SI
	resto	1,707	4,39%	NO			
Tabla 2	**T1 ó T2**	10,859	0,00%	SI	131,281	0,00%	SI
	resto	3,654	0,01%	SI			
Tabla 3	**T1**	5,900	0,00%	SI	36,672	0,00%	SI
	resto	1,366	8,60%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	7,131	0,00%	SI	56,603	0,00%	SI
	resto	2,400	0,82%	SI			

***Benchmark*: SXXP Index**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	9,305	0,00%	SI	91,222	0,00%	SI
	resto	2,154	1,56%	SI			
Tabla 2	**T1 ó T2**	11,852	0,00%	SI	156,373	0,00%	SI
	resto	3,988	0,00%	SI			
Tabla 3	**T1**	5,185	0,00%	SI	28,327	0,00%	SI
	resto	1,200	11,50%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	6,726	0,00%	SI	50,355	0,00%	SI
	resto	2,263	1,18%	SI			

***Benchmark*: SX5P INDEX (50 ZONA EURO+GB+...)**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	8,661	0,00%	SI	79,038	0,00%	SI
	resto	2,005	2,25%	SI			
Tabla 2	**T1 ó T2**	12,513	0,00%	SI	174,319	0,00%	SI
	resto	4,211	0,00%	SI			
Tabla 3	**T1**	1,391	8,21%	NO	2,039	15,33%	NO
	resto	0,322	37,37%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	2,638	0,42%	SI	7,748	0,54%	SI
	resto	0,888	18,73%	NO			

Figura 6. Estudio de la persistencia con el Índice de Jensen (Rentabilidades mensuales, AFI FIAMM; para un error alfa del 5%)

***Benchmark*: Cartera equiponderada R_m**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	9,305	0,00%	SI	91,222	0,00%	SI
	resto	2,154	1,56%	SI			
Tabla 2	**T1 ó T2**	12,183	0,00%	SI	165,224	0,00%	SI
	resto	4,100	0,00%	SI			
Tabla 3	**T1**	6,186	0,00%	SI	40,312	0,00%	SI
	resto	1,432	7,61%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	7,333	0,00%	SI	59,858	0,00%	SI
	resto	2,468	0,68%	SI			

***Benchmark*: SXXP Index**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	10,592	0,00%	SI	118,208	0,00%	SI
	resto	2,452	0,71%	SI			
Tabla 2	**T1 ó T2**	12,844	0,00%	SI	183,657	0,00%	SI
	resto	4,322	0,00%	SI			
Tabla 3	**T1**	5,471	0,00%	SI	31,541	0,00%	SI
	resto	1,267	10,26%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	6,321	0,00%	SI	44,474	0,00%	SI
	resto	2,127	1,67%	SI			

***Benchmark*: SX5P INDEX (50 ZONA EURO+GB+...)**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	10,592	0,00%	SI	118,208	0,00%	SI
	resto	2,452	0,71%	SI			
Tabla 2	**T1 ó T2**	12,513	0,00%	SI	174,319	0,00%	SI
	resto	4,211	0,00%	SI			
Tabla 3	**T1**	1,865	3,11%	NO	3,666	5,55%	NO
	resto	0,432	33,29%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	2,638	0,42%	SI	7,748	0,54%	SI
	resto	0,888	18,73%	NO			

Figura 7. Estudio de la persistencia con el Índice de TRIP-Sharpe (Rentabilidades mensuales, AFI FIAMM; para un error alfa del 5%)

***Benchmark*: Cartera equiponderada R_m**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	8,661	0,00%	SI	79,038	0,00%	SI
	resto	2,005	2,25%	SI			
Tabla 2	**T1 ó T2**	9,205	0,00%	SI	94,335	0,00%	SI
	resto	3,098	0,10%	SI			
Tabla 3	**T1**	5,476	0,00%	SI	31,594	0,00%	SI
	resto	1,268	10,25%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	6,756	0,00%	SI	50,815	0,00%	SI
	resto	2,274	1,15%	SI			

***Benchmark*: SXXP Index**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	9,305	0,00%	SI	91,222	0,00%	SI
	resto	2,154	1,56%	SI			
Tabla 2	**T1 ó T2**	9,867	0,00%	SI	108,383	0,00%	SI
	resto	3,320	0,04%	SI			
Tabla 3	**T1**	5,953	0,00%	SI	37,334	0,00%	SI
	resto	1,378	8,41%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	6,498	0,00%	SI	47,002	0,00%	SI
	resto	2,187	1,44%	SI			

***Benchmark*: SX5P INDEX (50 ZONA EURO+GB+...)**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	9,949	0,00%	SI	104,278	0,00%	SI
	resto	2,303	1,06%	SI			
Tabla 2	**T1 ó T2**	11,521	0,00%	SI	147,765	0,00%	SI
	resto	3,877	0,01%	SI			
Tabla 3	**T1**	3,259	0,06%	SI	11,191	0,08%	SI
	resto	0,754	22,53%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	3,947	0,00%	SI	17,345	0,00%	SI
	resto	1,328	9,20%	NO			

Figura 8. Estudio de la persistencia con el Ratio de Información (Rentabilidades mensuales, AFI FIAMM; para un error alfa del 5%)

***Benchmark*: Cartera equiponderada R_m**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	2,869	0,21%	SI	8,670	0,32%	SI
	resto	0,664	25,33%	NO			
Tabla 2	**T1 ó T2**	5,897	0,00%	SI	38,717	0,00%	SI
	resto	1,985	2,36%	SI			
Tabla 3	**T1**	6,365	0,00%	SI	42,690	0,00%	SI
	resto	1,474	7,03%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	7,562	0,00%	SI	63,655	0,00%	SI
	resto	2,545	0,55%	SI			

***Benchmark*: SXXP Index**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	2,225	1,30%	SI	5,216	2,24%	SI
	resto	0,515	30,33%	NO			
Tabla 2	**T1 ó T2**	2,258	1,20%	SI	5,678	1,72%	SI
	resto	0,760	22,36%	NO			
Tabla 3	**T1**	3,262	0,06%	SI	11,212	0,08%	SI
	resto	0,755	22,51%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	4,411	0,00%	SI	21,663	0,00%	SI
	resto	1,484	6,88%	NO			

***Benchmark*: SX5P INDEX (50 ZONA EURO+GB+...)**

Nº de tabla	Z Malkiel Grupo 99-02	Z Malkiel Valor exp	Z Malkiel Cola	Z Malkiel ¿Relación?	Chi Cuad Valor exp	Chi Cuad Cola	Chi Cuad ¿Relación?
Tabla 1	**T1**	2,225	1,30%	SI	5,216	2,24%	SI
	resto	0,515	30,33%	NO			
Tabla 2	**T1 ó T2**	2,589	0,48%	SI	7,463	0,63%	SI
	resto	0,871	19,18%	NO			
Tabla 3	**T1**	1,573	5,79%	NO	2,606	10,65%	NO
	resto	0,364	35,79%	NO			
Tabla 4	**T1 ó T2**	2,516	0,59%	SI	7,045	0,79%	SI
	resto	0,847	19,86%	NO			

Figura 9. Número de fondos clasificados como T1 ó T2 en el periodo 99-02 que baten al mercado en 03-05, tomando como *benchmark* el SXXP Index (Rentabilidades mensuales, AFI FIAMM)

Nº de fondos que baten al mercado	S	T	J	TRIPS	RI
Nº de fondos T1 (en 99-02) que baten al mercado en 03-05	34	47	48	36	40
Nº de fondos T2 (en 99-02) que baten al mercado en 03-05	34	44	41	27	39
N° total de fondos (de 983) que baten al mercado en 03-05	320	568	568	320	562

Figura 10. Estudio de la persistencia con los distintos índices de *performance* (a través de las tablas 3 y 4: relación entre 'pertenencia a los grupos T1 ó T2 en 99-02' y 'batir o no al *benchmark* en 03-05'), tomando como *benchmark* el SXXP Index (Rentabilidades mensuales, AFI FIAMM) y considerando un valor p=0,5 (significación estadística para un error alfa del 5%)

Grupo	Índice	Observados	Estimados	Z	Probabilidad	¿Relación Significativa?
T1	SHARPE	34	25	2,5456	0,55%	SI
T1	TREYNOR	47	25	6,2225	0,00%	SI
T1	JENSEN	48	25	6,5054	0,00%	SI
T1	TRIP-S	36	25	3,1113	0,09%	SI
T1	R.I.	40	25	4,2426	0,00%	SI
T12	SHARPE	68	50	3,6000	0,02%	SI
T12	TREYNOR	91	50	8,2000	0,00%	SI
T12	JENSEN	89	50	7,8000	0,00%	SI
T12	TRIP-S	63	50	2,6000	0,47%	SI
T12	R.I.	79	50	5,8000	0,00%	SI

VALORACIÓN EN TIEMPOS DE CRISIS

Fernando Gómez-Bezares [*]
Publicado en la *Revista Española de Capital Riesgo*, nº 1/2010, págs. 17-24

1.- INTRODUCCIÓN

A la hora de valorar empresas hay un elemento fundamental que es el riesgo, y éste suele ser especialmente relevante en tiempos de crisis. Las crisis suelen aumentar la posible variabilidad de los resultados futuros, y, en consecuencia, el riesgo. Pero vayamos paso a paso: ¿qué es el riesgo?

Inspirándonos en la distinción que hace Frank Knight entre riesgo e incertidumbre, podemos definir riesgo como la situación en la que no conocemos lo que va a suceder pero sí podemos atribuir probabilidades a los diferentes eventos, mientras que incertidumbre es cuando no podemos hacerlo. En lo que sigue aceptaremos un concepto amplio de riesgo: siempre que podamos atribuir, de alguna manera, probabilidades, diremos que nos encontramos en riesgo, dejando el concepto de incertidumbre para cuando no tenemos manera de aproximarnos a las probabilidades de lo que puede suceder. Así planteado, la incertidumbre es rara en la toma de decisiones empresariales, y concretamente en la valoración: parece normal que tengamos un conocimiento del negocio que nos permita atribuir probabilidades a los diferentes eventos que le pueden afectar de forma significativa[1].

Supuesto todo lo anterior, ante una situación de riesgo donde tenemos diferentes resultados posibles con sus correspondientes probabilidades, podemos utilizar como criterio de decisión la esperanza matemática, a la que llegaremos multiplicando los resultados por sus probabilidades. Supongamos el caso de la figura 1: nos dicen que una determinada inversión puede dar lugar a dos valores actualizados netos[2], 100 y -80, con probabilidades del 50%. Su esperanza matemática, E(X), será de 10.

Visto lo anterior, podemos tener la tentación de pensar que la inversión es interesante: si repitiéramos la inversión infinidad de veces, en el 50% de las ocasiones tendríamos un incremento de valor, un enriquecimiento (eso es el Valor Actualizado Neto -VAN-), de 100 y en el otro 50% un empobrecimiento de 80; como media nos enriqueceríamos en 10 por vez (es lo que indica la esperanza matemática). Pero esto no es real pues las inversiones, sobre todo las importantes, no se repiten una y otra vez; y si la hacemos una sola vez el resultado puede ser de 100 ó de -80. Si nos sale el resultado negativo, poco consuelo tendremos pensando que podría habernos salido el positivo.

---

[*] Catedrático del Departamento de Finanzas y Economía de Deusto Business School.

[1] Puede ampliarse esto y lo que sigue en Gómez-Bezares (2009).

[2] Resultado de actualizar las generaciones de fondos positivas y negativas de la inversión (incluido el desembolso inicial), y sumarlas con su correspondiente signo. En este caso el descuento se hace al tipo de interés sin riesgo; luego justificaremos el porqué.

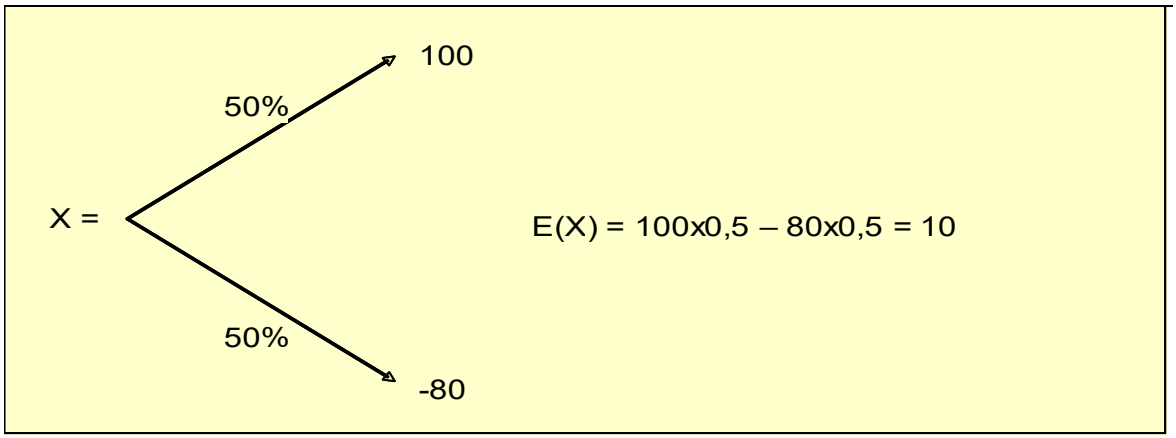


Figura 1

Esto nos lleva a cuestionar el resultado obtenido con la esperanza matemática; hay que matizarlo pues los individuos, sobre todo ante las decisiones importantes, actuamos como enemigos del riesgo. Vamos a comprobarlo con un ejemplo: supongamos que al lector le toca, en un juego de azar, la bonita suma de 100 millones de euros; una vez que están en su poder le proponen jugárselos a cara o cruz (a doble o nada), luego puede ganar otros 100 ó perder los 100 que le han tocado. La esperanza matemática del juego anterior es:

$$E(X) = 100.000.000x0,5 – 100.000.000x0,5 = 0$$

luego puede parecernos que el juego es indiferente (su esperanza matemática no es positiva ni negativa, es cero). Sin embargo prácticamente nadie en su sano juicio aceptaría este juego, pues pasar de 100 millones de euros a 200 nos incrementa poco la utilidad, nos hace poco más felices, pero perder los 100 que ya tenemos nos haría muy desgraciados: esos 100 primeros millones sirven para arreglarnos la vida, los 100 siguientes sólo la mejoran un poco[3]. Por eso decimos que somos enemigos del riesgo; un neutro ante el riesgo sería indiferente ante una decisión con esperanza matemática nula, pero nosotros, ante decisiones arriesgadas importantes y no repetitivas exigimos esperanzas positivas. Por supuesto, en todo lo anterior, va a jugar también la riqueza del decisor. Yo no me jugaría a cara o cruz un millón de euros, pero igual sí lo haría un multimillonario. También influye al carácter del decisor, que puede ser más o menos enemigo del riesgo, pero de todo lo anterior podemos aprender una cosa clara: normalmente, ante decisiones importantes, los individuos nos comportamos como enemigos del riesgo.

2.- PRINCIPIOS DE VALORACIÓN

Si suponemos definido un tipo de interés (r)[4], es decir, un valor del dinero en el tiempo, el valor de un activo será el resultado de descontar las generaciones de fondos que va a

[3] Esto tiene mucho que ver con lo que los economistas llamamos “Ley de las utilidades marginales decrecientes”.

[4] De momento lo identificaremos como el tipo de interés sin riesgo.

proporcionar en el futuro, a ese tipo de interés. En efecto, el Valor Actual (VA) de una corriente futura[5] de Generaciones de Fondos (GF_1, GF_2, GF_3…) será:

$$VA = \frac{GF_1}{(1+r)} + \frac{GF_2}{(1+r)^2} + \frac{GF_3}{(1+r)^3} + ... + \frac{GF_n}{(1+r)^n} + ... \quad (1)$$

Y ese es el valor del activo. Con esto queremos decir que nos resultaría indiferente el valor actual o la corriente de pagos que representan las generaciones de fondos.

La ecuación (1) es la fórmula fundamental de valoración, planteada por John Burr Williams en los años treinta del pasado siglo para valorar acciones, entendiendo que las generaciones de fondos, en tal caso, son los dividendos. Pero si, tal como hemos justificado en el punto anterior, los individuos nos comportamos como enemigos del riesgo, habrá que introducirlo en la fórmula de Williams, tal como acertadamente intuyó Harry Markowitz cuando preparaba su teoría de cartera.

En realidad los numeradores de la fórmula (1) son normalmente variables aleatorias[6], no cantidades seguras, y, por lo tanto, sometidas a un riesgo. Lo normal es sustituir dichas GF_i por sus esperanzas matemáticas $E(GF_i)$, y en tal caso, como enemigos del riesgo, algo deberemos hacer. Dos métodos se utilizan habitualmente para introducir el riesgo en la fórmula (1), el ajuste del tipo de descuento y el equivalente de certeza[7]. Empezando por el segundo, la idea consiste en "penalizar" los numeradores de la fórmula convirtiéndolos en equivalentes ciertos, es decir, cambiamos las GF_i aleatorias por unas cantidades seguras, algo inferiores a sus esperanzas matemáticas, que, para el decisor, resultarían equivalentes a las cantidades aleatorias. Veámoslo con un ejemplo: para un individuo (enemigo del riesgo) puede resultar indiferente una GF_i que varía entre 50 y 150, con unas determinadas probabilidades y una $E(GF_i)=100$, que una cantidad segura de 90 (que sería su equivalente cierto); lo que haríamos en este caso es dar a GF_i el valor de 90, y valorar de la misma manera el resto de generaciones de fondos, descontándolas después al tipo r, tipo sin riesgo, pues el riesgo ya se ha tenido en cuenta penalizando el numerador.

La otra posibilidad consiste en utilizar un tipo de descuento más alto para considerar el riesgo. Si en vez de descontar al tipo r (tipo sin riesgo) usamos el tipo k tal que:

$$k = r + p \quad (2)$$

donde p sería la prima por riesgo, estamos introduciendo la idea de que somos enemigos del riesgo al utilizar un tipo de descuento mayor, en función del riesgo que se corre. Es lo que hacemos en la fórmula (3):

$$VA = \frac{E(GF_1)}{(1+k)} + \frac{E(GF_2)}{(1+k)^2} + \frac{E(GF_3)}{(1+k)^3} + ... + \frac{E(GF_n)}{(1+k)^n} + ... \quad (3)$$

---

[5] Que aquí suponemos indefinida.

[6] Prescindiremos, por simplificar, de la posible aleatoriedad de los denominadores, así como de la posibilidad de que éstos puedan tener diferentes valores en los diferentes años, tal como se hace con frecuencia.

[7] Puede verse esto y lo que sigue en Gómez-Bezares (2009, cap. 6). También puede verse Copeland, Weston y Shastri (2005, pág. 157).

Al lector no se le escapará que la verdadera dificultad de este método consiste en dar un valor a la prima de riesgo p, como en el anterior lo difícil es saber cómo penalizar las generaciones de fondos; muchos modelos se han desarrollado para resolver estos problemas[8], pero estamos lejos de encontrar un método con verdaderas garantías.

Existen otras formas de valorar empresas, como la valoración por múltiplos de compañías comparables; es el caso, por ejemplo, del PER (precio entre beneficio): si las compañías parecidas a la que estamos valorando tienen un PER de 10, y la compañía a valorar tiene un beneficio de 2 millones de euros, su valor lógico serían 20 millones[9]. Y existen otros muchos tipos de multiplicadores, pero no entraremos en ello, pues se sale del objeto de este trabajo.

3.- DIFICULTADES AÑADIDAS EN TIEMPOS DE CRISIS

Por lo hasta ahora dicho, podemos asociar riesgo a variabilidad en los resultados: hay diferentes resultados posibles, con diferentes probabilidades. Una forma de medir el riesgo es precisamente utilizar una medida estadística de variabilidad, como la desviación típica, o su cuadrado la varianza. Un juego, una inversión o una apuesta serán más arriesgados cuanto mayor sea su variabilidad, y ésta la podemos medir con su desviación típica[10]; a mayor desviación típica mayor riesgo.

Es importante dejar claro aquí que el concepto de riesgo que estamos manejando (típico en finanzas), no coincide con el que se usa normalmente en español. Así la Real Academia Española define riesgo en su diccionario (vigésima segunda edición) como:

1. Contingencia o proximidad de un daño.

2. Cada una de las contingencias que pueden ser objeto de un contrato de seguro.

Es clara la acepción negativa que tiene riesgo en español, y lo mismo pasa en inglés; sin embargo para los financieros riesgo es variabilidad, con su parte buena y su parte mala. Para dejar esto más claro suelo comentarles a mis alumnos que si me subo al piso 50 de una torre, y me tiro por la ventana, no correré riesgo en un sentido financiero, tendré certeza de matarme.

Entendido todo esto, podemos empalmar con el principio cuando decíamos que en épocas de crisis nos encontramos frecuentemente en situaciones de mayor riesgo, y, a veces, nos es incluso más difícil su cuantificación. Y esto afecta a la utilización de las técnicas de valoración y a sus resultados.

---

[8] Puede verse, entre otros muchos, Copeland, Weston y Shastri (2005, cap. 6).

[9] El PER, con determinadas hipótesis simplificadoras, equivale a la ya citada fórmula de Williams, pero no entraremos ahora en eso.

[10] También pueden influir la asimetría, la curtosis…, pero si suponemos distribuciones normales (por lo tanto simétricas y mesocúrticas) no existen estos problemas, y eso supondremos. La normal queda definida por dos parámetros: la media (esperanza matemática) y la desviación típica, es decir, el valor esperado y su riesgo, que es lo que utilizaremos nosotros y lo que se utiliza normalmente en finanzas.

Pensando en la técnica de valoración por excelencia, el descuento de flujos de fondos, cuando se aplica a una empresa consiste básicamente en descontar sus dividendos esperados[11]. Supongamos que la previsión de dividendos es la que tenemos en la figura 2, donde debemos entender las Des como dividendos esperados y la P como el precio resultante. Por otro lado, el descuento lo realizaremos a tipo "k", donde ya está incluida la prima por riesgo, dando lugar a la fórmula (4), que es igual que la (3), pero sustituyendo las generaciones de fondos esperadas por dividendos esperados[12].

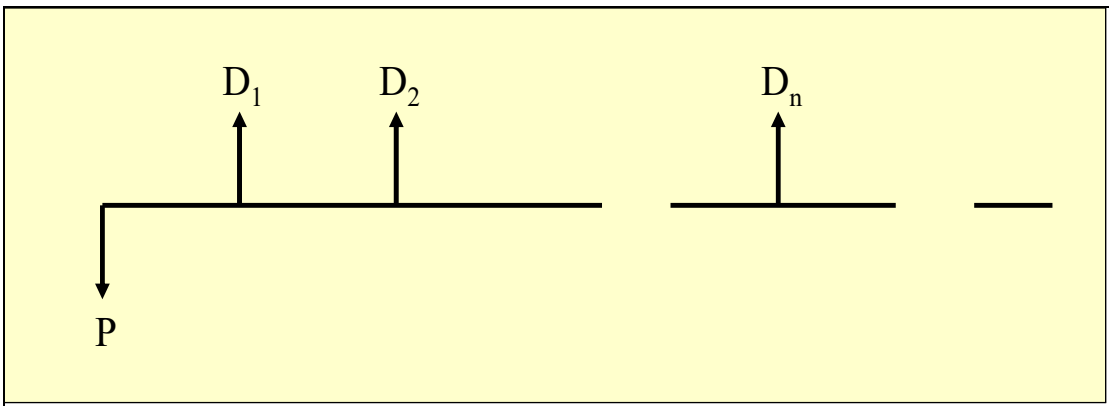


Figura 2

$$P = \frac{D_1}{(1+k)} + \frac{D_2}{(1+k)^2} + ... + \frac{D_n}{(1+k)^n} + ... \tag{4}$$

En épocas de crisis, con un mayor riesgo, y la consiguiente mayor variabilidad, es más difícil estimar los valores medios de los dividendos: los dividendos esperados; por otro lado es esperable que dichos valores sean más bajos que en épocas de bonanza, por las malas perspectivas de futuro, pero eso es simplemente un hecho. Lo que realmente dificulta el trabajo del analista son los problemas que se va a encontrar para establecer cuáles son los dividendos esperados[13]. Pero además es probable que tenga mayores dificultades para estimar el tipo de descuento: todo resulta más volátil en épocas de crisis. Parece lógico pensar que se use una prima por riesgo mayor (parece intuitivo que ante mayores riesgos usemos mayores primas), pero si esa prima resulta difícil de estimar en situaciones normales, eso es mucho más complicado en épocas de crisis.

---

[11] En ocasiones también se descuentan beneficios esperados o flujos de caja, por considerarse que pueden ser más fáciles de estimar, pero no descenderé a estos detalles.

[12] También podría usarse el método del equivalente de certeza, que hemos comentado con anterioridad, pero, hasta donde yo conozco, es mucho menos usado por la evidente dificultad de conocer cuáles son los equivalentes ciertos de los accionistas.

[13] O los beneficios o los flujos de caja, como comentábamos en una nota anterior.

Otro tema difícil de estimar es el horizonte de la inversión; en general, salvo vidas claramente definidas, suelen usarse vidas indefinidas.

Vamos a tratar de analizar esto último a través del CAPM: el Modelo de Valoración de Activos de Capital (normalmente conocido por sus siglas en inglés CAPM) nos sirve para conocer cuál es la rentabilidad esperada, y en este caso deseada, k, por un inversor, en función del riesgo del activo en cuestión. No entraré en demasiados detalles, por ser un modelo sobradamente conocido[14]; simplemente recordemos su formulación:

$$k = r + \left[E(R^*) - r\right]\beta \tag{5}$$

donde ya conocemos el significado de r y k, y el segundo sumando de la parte derecha de la igualdad en (5) representa la prima por riesgo, calculada según el CAPM. Ésta se compone a su vez del "premio por riesgo del mercado": lo que se espera que rinda la media del mercado E(R*)[15] menos la rentabilidad sin riesgo "r"; y el valor del riesgo sistemático β, que mide la cantidad de riesgo que aportará la inversión a una cartera bien diversificada, y que oscila alrededor de la unidad (uno es la media del mercado, los valores con β menor que uno serán poco arriesgados, defensivos, y los valores con β mayor que uno, arriesgados o agresivos)[16].

El uso del CAPM es una de las maneras más habituales para calcular el tipo de descuento a utilizar, aunque existen modelos alternativos[17]. Para su aplicación hay, por lo menos, dos problemas serios: cuál es el premio por riesgo del mercado y cuánto vale β para un activo concreto. Hay una abundante literatura sobre estos dos temas, que demuestra su dificultad, pero parece claro que esto será todavía más difícil en tiempos de crisis.

4.- UNA ALTERNATIVA RAZONABLE: EL VAP

A partir de los años ochenta del pasado siglo fui desarrollando un modelo alternativo de selección de inversiones: el Valor Actualizado Penalizado (VAP)[18]. La idea consiste en calcular el valor actual descontando al tipo de interés sin riesgo r, como en la fórmula (1), en base a los dividendos esperados; se obtiene así un valor actual esperado al que denominaremos μ. Se establecen a continuación una serie de escenarios posibles, con sus correspondientes probabilidades; para cada escenario habrá una corriente estimada de dividendos, que actualizaremos al tipo r, obteniendo para cada escenario un valor actual asociado a una probabilidad (la correspondiente al escenario). Con esos valores actuales y sus probabilidades obtendremos la desviación típica σ[19] del valor actual de nuestra inversión. El VAP consiste en penalizar esa μ en función de la σ mediante un parámetro de penalización t, tal como puede verse en la fórmula (6):

---

[14] Puede verse en muchos libros de texto, como en Gómez-Bezares (2009, cap. 6), donde el lector puede encontrarlo a un nivel elemental en el apéndice correspondiente.

[15] Por ejemplo la rentabilidad esperada de un índice representativo del mercado, como puede ser el IBEX 35 en España.

[16] La beta se obtiene como la pendiente de la regresión entre la rentabilidad del mercado y la del activo en cuestión.

[17] Como el APT de Ross o el modelo de Fama y French.

[18] En su desarrollo también colaboraron diferentes profesores de mi departamento, como Javier Satibáñez, y las ingeniosas dificultades planteadas por algunos de nuestros alumnos.

[19] A partir de los datos anteriores también podríamos obtener la μ ya calculada previamente.

$$VAP = \mu - t.\sigma \tag{6}$$

No entraré ahora en la justificación del VAP[20], si bien puedo resumir para el lector interesado que equivale a la utilización de un sistema de rectas de indiferencia (su principal simplificación), crecientes (por ser enemigos del riesgo), y que suponiendo distribuciones normales en los valores actuales, el parámetro "t" tiene una fácil interpretación como valor de la normal tipificada, pudiendo entenderse el VAP, en consecuencia, como un "mínimo garantizado" con una determinada probabilidad que dependerá del valor de t. En realidad el VAP es el equivalente cierto del valor actualizado.

Pero este último párrafo puede resultar algo denso, y creo que lo que ahora interesa fundamentalmente al lector es que hemos descontado al tipo de interés sin riesgo dado que hemos penalizado después restando t desviaciones típicas, y no debemos penalizar dos veces. El segundo tema práctico importante es que el valor de t podemos variarlo en función de la aversión al riesgo del decisor desde cero (aversión cero, neutralidad ante el riesgo) hasta, como mucho, 3, que representaría una aversión casi patológica[21]. Un valor que nosotros solemos recomendar es t=1,5.

El VAP puede tener su interés como método de selección de inversiones o de valoración de empresas, y evita tener que hacer estimaciones sobre el premio por riesgo del mercado o la beta, que ya hemos comentado antes que resultan complicadas. Pero tenemos el problema de la estimación de la desviación típica del valor actual, que no suele ser fácil, o de su valor esperado. Por eso propuse hace algunos años una simplificación del VAP en los siguientes términos: yo creo que no es demasiado difícil hacer una estimación "muy optimista" de los dividendos futuros, y descontándolos al tipo r obtener el valor actual máximo (P_{MAX}); luego hacer una estimación "muy pesimista" de esos dividendos, y descontando al tipo r, obtener el valor actual mínimo (P_{MIN}); para después aproximar la esperanza (μ) de los valores actuales, y su desviación típica (σ) mediante las siguientes fórmulas:

$$\mu = \frac{P_{MAX} + P_{MIN}}{2} \tag{7}$$

$$\sigma = \frac{P_{MAX} - P_{MIN}}{6} \tag{8}$$

El fundamento de la fórmula (7) es bastante intuitivo para el caso de distribuciones simétricas; y parecido es el caso de la (8), si suponemos, como es bastante razonable, que entre el valor máximo y el mínimo hay seis desviaciones típicas (despreciando unas colas de poco más del 2‰ en la distribución normal)[22]. Si aplicamos ahora las fórmulas (7) y (8) sobre la (6), y utilizando una t=1,5 tal como antes habíamos propuesto, llegamos a la fórmula (9):

$$VAP = \frac{P_{MAX} + P_{MIN}}{2} - 1{,}5\frac{P_{MAX} - P_{MIN}}{6} = 0{,}75P_{MIN} + 0{,}25P_{MAX} \tag{9}$$

---

[20] Puede verse ampliamente en Gómez-Bezares (1993 y 2009, cap. 6).

[21] Para t=3 la probabilidad que deja en la cola de la normal es de 0,00135, el 1‰; es decir, que para decidir necesitaríamos la casi certeza, 999‰.

[22] Para el caso de distribuciones no simétricas pueden encontrarse adaptaciones en Gómez-Bezares (1993).

Esta fórmula, consiste, al final, en ponderar el valor máximo y el mínimo para llegar al VAP, que es el criterio de decisión, y que actúa como un equivalente cierto. Lógicamente damos más peso al mínimo al actuar como enemigos del riesgo, pero cabrían otras ponderaciones. Resumimos el proceso en la figura 3.

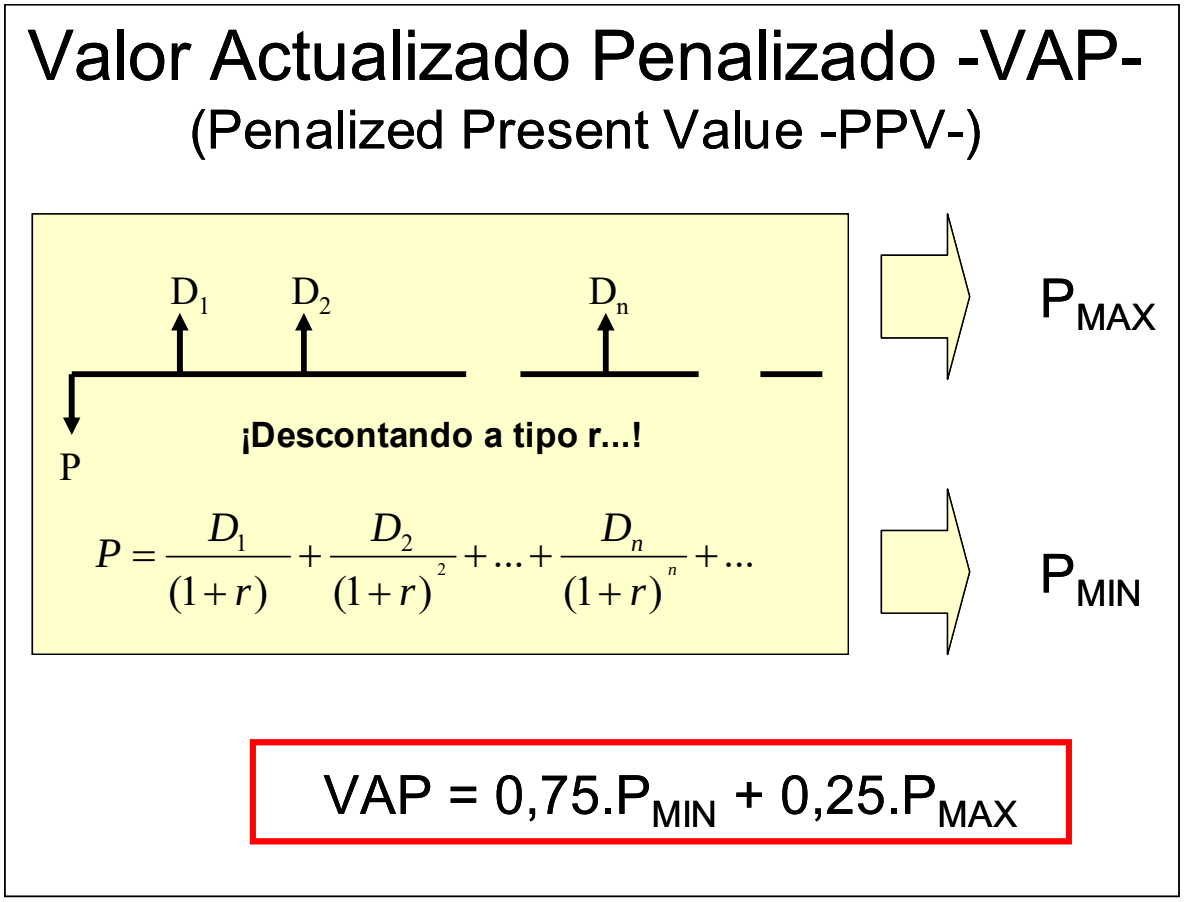


Figura 3

5.- DISCUSIÓN

El VAP nació como una alternativa a los criterios clásicos de selección de inversiones con riesgo como el ajuste del tipo de descuento y el equivalente de certeza[23]. De la misma manera se vio rápidamente su utilidad como criterio de valoración de empresas. Su gran ventaja frente al criterio más utilizado cuando se descuentan flujos, el ajuste del tipo de descuento, es que no necesita conocer el premio por riesgo del mercado, ni la beta, lo que no suele ser fácil de conseguir con ciertas garantías. Tampoco necesita suponer la validez del CAPM (tan criticado en los últimos treinta años) ni de sus modelos alternativos; todo esto puede convertirlo en un modelo atractivo. En su contra tiene el aceptar las hipótesis simplificadoras (rectas de indiferencia) y tener que estimar la desviación típica, lo que no suele ser fácil, así como un cierto

[23] Entendido éste como aquél que penaliza las generaciones de fondos.

grado de subjetividad al dar valor al parámetro t. También puede ser difícil el estimar el valor actual medio, pero para ese cálculo se necesitan los mismos datos que los que utilizan los sistemas tradicionales.

Para tratar de paliar estas debilidades se crearon las fórmulas (7), (8) y (9), que facilitan el cálculo de μ y σ, y presuponen un valor razonable de t, aunque, eso sí, a costa de hacer nuevas simplificaciones.

A la vista de lo expuesto, yo creo que el VAP puede ser una alternativa interesante para la valoración de empresas; de forma especial para las pequeñas y medianas, y esto último por dos razones fundamentales: en primer lugar el cálculo de la β para las empresas no cotizadas es más problemático que para las cotizadas, y es que además, el CAPM se basa en que sólo hay que retribuir el riesgo sistemático (el que viene medido por la β) pues el diversificable lo diversificará el accionista en su cartera[24]. Esta idea suele ser aplicable para las grandes empresas cotizadas, aunque también ha recibido importantes críticas, pero es poco aplicable a las pequeñas y medianas empresas donde los accionistas suelen tener gran parte de su patrimonio en la empresa, y, en consecuencia, no pueden diversificar correctamente. Es por esta razón que en este tipo de empresas es más relevante el riesgo total, que es el que considera el VAP tal como ha sido expuesto[25].

6.- CONCLUSIONES

La valoración de empresas en tiempos de crisis no es diferente a la valoración en circunstancias normales[26]. Sí es cierto que la crisis afecta a lo que estamos dispuestos a pagar por una empresa, que normalmente será menos, pero las técnicas a utilizar serán las de siempre: básicamente descuentos de flujos y multiplicadores. Lo que sí parece lógico es pensar que las crisis aumentan el riesgo, y hacen más difícil la tarea del valorador.

En este artículo me he centrado en el método de descuento de flujos, pero creo que, precisamente por el aumento de riesgo que lleva aparejado toda crisis, es en estas circunstancias cuando más interesante es contrastar los resultados que obtenemos descontando flujos con los que se obtienen a partir de multiplicadores, para verificar su coherencia.

En las páginas anteriores he hecho una explicación algo más detallada del VAP como método de valoración, por tratarse de un método mucho menos conocido, y que puede resultar de especial interés en épocas de crisis, por su mayor facilidad de estimación, aparte de su especial adecuación para las pequeñas y medianas empresas.

---

[24] Y lo mismo sucede en muchos modelos alternativos al CAPM.

[25] En la Universidad Comercial de Deusto hemos desarrollado también modelos de VAP para riesgo sistemático.

[26] El Consejo General de Colegios de Economistas de España ha publicado recientemente una guía sencilla y completa de valoración de empresas, preparada por su Comisión de Valoración de Empresas. Véase Aragón et al. (2009).

BIBLIOGRAFÍA

ARAGÓN, R., S. GÁMEZ, F. GÓMEZ-BEZARES, P. LAMOTHE, J. MASCAREÑAS Y P. VIÑOLAS (2009): *La valoración de la empresa*, Consejo general de colegios de economistas de España, Madrid.

COPELAND, T.E., J.F. WESTON Y K. SHASTRI (2005): *Financial theory and corporate policy*, Pearson Addison Wesley, Boston, 4ª ed.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1993): "Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions", en Aggarwal, ed., *Capital budgeting under uncertainty*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, págs. 91-102.

GÓMEZ-BEZARES, F. (2009): *Las decisiones financieras en la práctica*, Desclée de Brouwer, Bilbao, 10ª edición.

DON'T USE QUOTIENTS TO CALCULATE PERFORMANCE

Fernando Gómez-Bezares and Fernando R. Gómez-Bezares
Publicado, en una versión muy similar, en *Cogent Economics and Finance*, 3: 1065584, vol. 3, nº 1, 2015, págs. 1-14, http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/23322039.2015.1065584

1. INTRODUCTION

In order to calculate the performance of investment portfolios and to evaluate whether a mutual fund outperformed the market or its peer funds, we use several ex-post performance measures usually based on the average return obtained and the risk assumed. As we consider that investors prefer more wealth to less, and that they are risk averse, we understand that performance improves as return increases and it worsens as risk grows (some nuances to this general affirmation may be seen in Gómez-Bezares and Gómez-Bezares, GB[2], 2012). Many performance indexes have been developed since the classical ones proposed in the 1960s by Sharpe, Treynor and Jensen. A frequently used idea is to calculate the excess of average return above the risk-free rate and divide it by a risk measure, just as Sharpe and Treynor ratios do. There are many other options to measure performance depending on the method applied to calculate risk (some quite well-known ones can be seen in Eling, 2008).

Despite their appearance being somewhat different, the M^2 index (proposed by Modigliani and Modigliani, 1997) and the $M^2_{\text{for beta}}$ (proposed by Modigliani, 1997) are equivalent to the Sharpe and Treynor indexes respectively. On the other hand, the Information Ratio, which can be defined as the average tracking error divided by the standard deviation of tracking error[1], will have similar characteristics to other indexes that are calculated through a quotient. Definitively, many of the indexes we apply are "ratios", this is, quotients (the Jensen index is an exception).

The problem is that quotients, ratios, have some peculiarities that make them less attractive for their use in performance measuring, and this is what we want to show in the current paper. Some studies have affirmed that the application of one or another performance index has little relevance (i.e. Eling, 2008, after analyzing several indexes and obtaining similar results, tends to prefer the Sharpe ratio), but we disagree and will provide empirical evidence that supports our view. Many studies (Eling's one among them) affirm that different indexes rank investments performance almost identically, with minor differences in ordering, but we think that quantitative differences must be considered apart from the strict rank ordering. On the other hand, there could be few but dramatic changes in rank ordering that can be very interesting for an analyst.

[1] Taking the tracking error definition applied by Roll (1992): difference between portfolio's return and benchmark's return for the same period of time, and applying the Information Ratio definition proposed by Modigliani and Modigliani (1997).

There is a wide literature facing this topic of performance measuring and we have cited a few authors already. Only to mention some of the many who use the three classical indexes, we have Chua and Koh (2007) who use the Sharpe ratio, Hodges, Taylor and Yoder (2003) or Hübner (2007) who use the Treynor ratio, and Sainz, Grau and Doncel (2006), Lin (2006), Fama and French (2010) or Miralles, Miralles and Lisboa (2012) who use the Jensen index. On the other hand, practitioners use them continuously, and there exist empirical studies analyzing which are the most commonly applied indexes, as the one by Amenc, Goltz and Lioui (2011).

Literature has analyzed, among other topics, what happens when the numerator of the Sharpe ratio is negative (Israelsen, 2005 and 2009, Ferruz and Sarto, 2004, with different solutions to this situation). However, in this paper we want to study a different matter, as we focus on denominators of quotient-based indexes and find advantages in applying linear indexes.

This paper contributes by giving an integrated comparative view, both from a geometric and from a statistical perspective, of the Sharpe, Treynor, Jensen, M^2, $M^2_{\text{for beta}}$ and Information Ratio indexes. The paper also adds an original proposal to measure performance that was developed by the authors and allows seeing advantages of linear penalization. All this is corroborated with a numeric example end empirical testing. Such popular indexes as Sharpe, Treynor or the Information Ratio may cause relevant problems if are applied to compare performance of funds and their denominators take certain values. At the same time linear indexes show higher consistency. Practitioners must be aware of this.

We will now proceed to review the mentioned indexes, introducing a complementary and less known one: the PIRR. We will see the indexes' geometric and statistical meaning, as well as their main weaknesses. We will then analyze some empirical results and reach our final conclusions.

2. INDEXES REVIEW AND PROPOSAL OF THE PIRR

We begin by reviewing the three classical indexes, including their geometric explanation. Their formulae are the following:

$$\text{Sharpe (1966): } S = (\mu - r_0)/\sigma \tag{1}$$

$$\text{Treynor (1965): } T = (\mu - r_0)/\beta \tag{2}$$

$$\text{Jensen (1968, 1969): } J = \mu - r_0 - (\mu_m - r_0)\beta \tag{3}$$

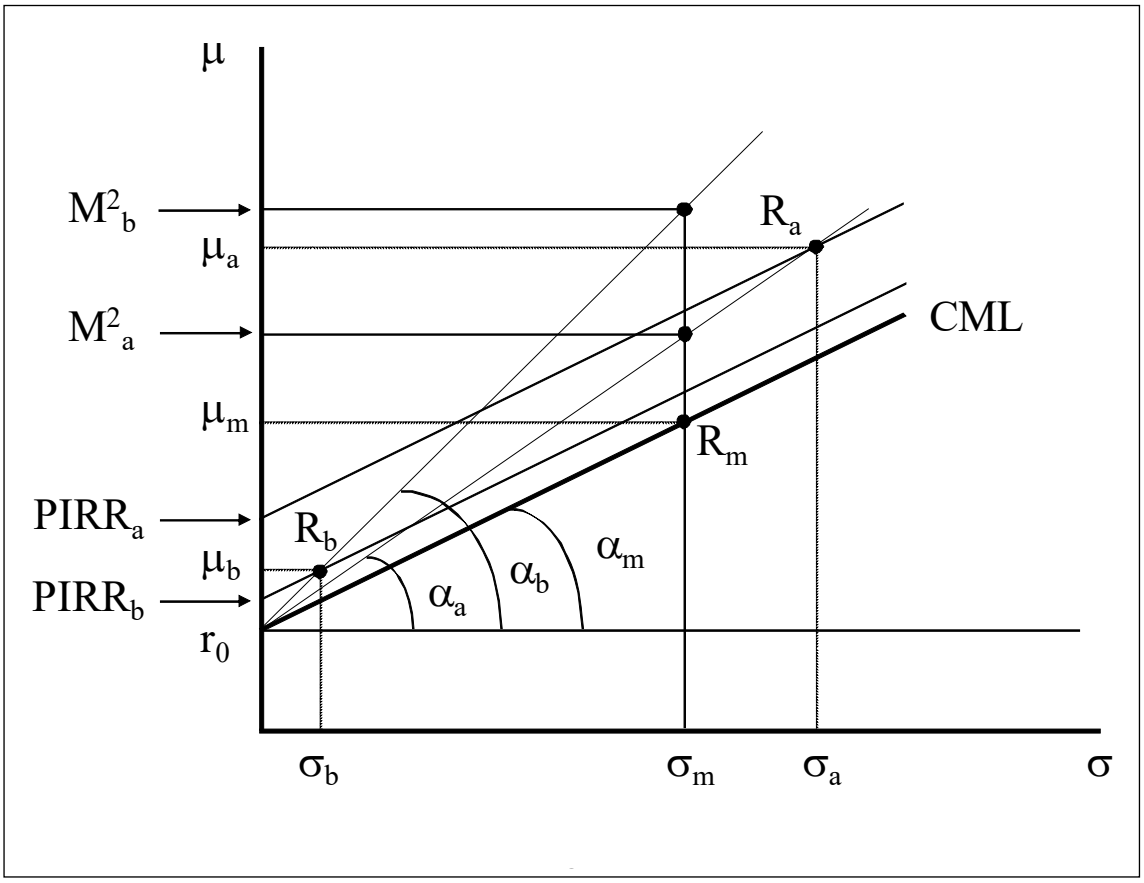
where S, T and J are the corresponding values of the Sharpe, Treynor and Jensen indexes; μ is the average return of the investment in certain period; r_0 is the risk-free rate of return; σ is the standard deviation of the investment return in the period of analysis; β is the respective systematic risk; and μ_m is the average return of the market portfolio during the period.

Consequently, we can observe that we have two indexes defined as ratios (Sharpe and Treynor) and one defined as a difference, and therefore linear (Jensen). At the same time we have one index (the Sharpe ratio) that penalizes return with total risk (σ), while the other two (Treynor and Jensen) apply systematic risk (β). Focusing on the type of risk considered, it would seem more adequate to use Sharpe when we analyze the performance of a mutual fund with a vocation to diversify, or when we analyze an investor's total portfolio (in these cases

diversifiable risk should have been eliminated, and if not, performance will be negatively affected by penalization with total risk). Treynor and Jensen would be more adequate to analyze a specialized investment fund or a specific investment, understanding that systematic risk is the only one to be observed in these cases, as the diversifiable risk will be eliminated at another level.

If we observe Figure 1 we may geometrically see the Sharpe ratio: on a μ-σ map of ex-post returns, we can draw the result of the market portfolio (R_m) with its average return (μ_m) and risk (σ_m); starting from the risk-free rate (r_0) and passing through R_m we have the Capital Market Line (CML), whose slope (tangent of α_m angle) is the market Sharpe (formula 1 applied to the market case). For the case of portfolios R_a and R_b (with their respective values of μ and σ), their corresponding Sharpe ratios will be the tangents of α_a and α_b (as it is obtained from the application of formula 1). We see how the Sharpe ratio, for being a quotient, is a tangent.

Figure 1. Geometric view of Sharpe, M^2 and PIRR indexes drawn on a μ-σ map of ex-post returns

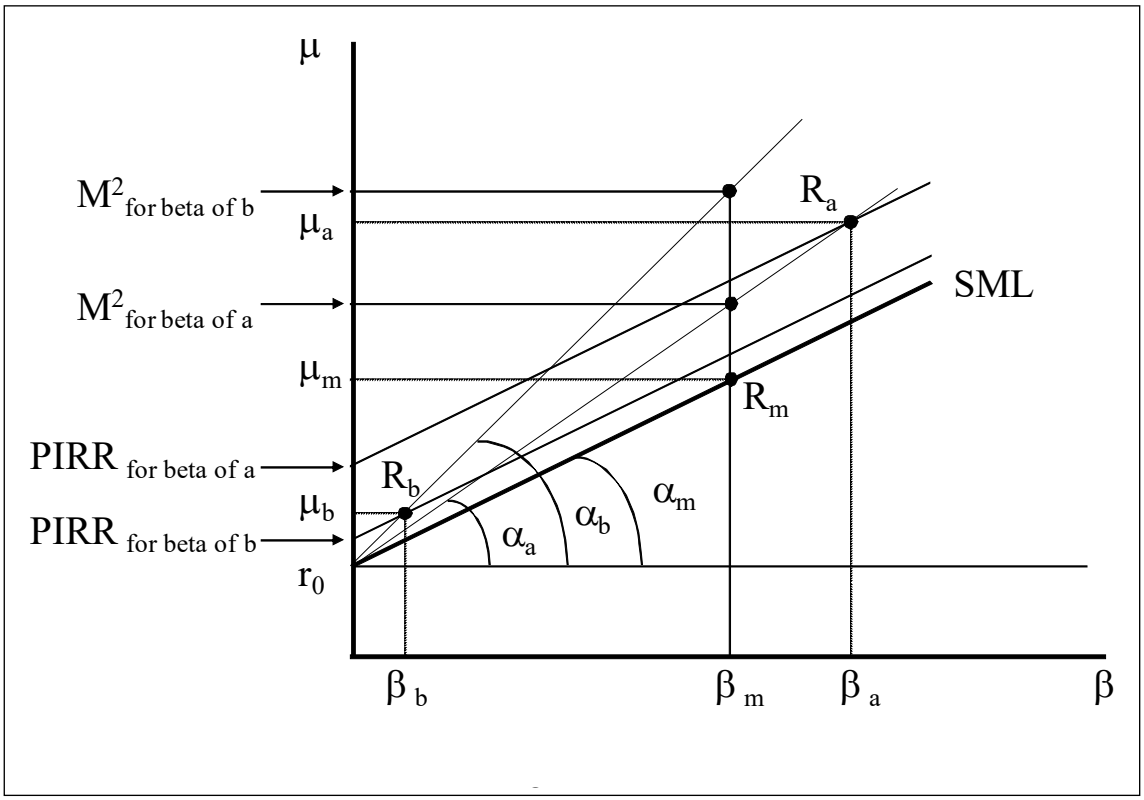


If we now want, with the same Figure 1, to reason as Modigliani and Modigliani (1997) did in order to obtain their M^2 index, we can do the following: starting from the result of one portfolio (R_b), we can leverage the investment (by borrowing) at the risk-free rate until obtaining the same risk as the market (σ_m); we get to this by moving up along the straight line that starts from the risk-free rate (r_0) and passes through R_b until we position ourselves on the vertical of σ_m, reaching an average return equal to M^2_b. We can do the same with the result of the other

portfolio (R_a), by deleveraging the investment (lending) at the risk-free rate up to obtain a risk level of σ_m; we get to this by moving down from R_a along the straight line that links R_a with r_0, until we position ourselves on the vertical of σ_m, reaching an average return of M^2_a. Modigliani and Modigliani propose these M^2 values as performance measures, and it is clear that their ranking must coincide exactly with Sharpe's ordering (in our case: $\alpha_b>\alpha_a>\alpha_m$ and $M^2_b>M^2_a>M^2_m= \mu_m$). Therefore, those problems associated to the Sharpe ratio, which we will explain later, will also be applicable to M^2. This index has the advantage of being measured in points of return, while at the same time its logic endorses Sharpe ratio's validity: the best portfolio or investment fund for M^2 (which coincides with the best one for Sharpe) will be the one that, after matching its risk with the market, obtains a better return (thanks to the process of leveraging/deleveraging).

We can do a very similar reasoning with Figure 2 to geometrically see the Treynor ratio and its equivalent the $M^2_{\text{for beta}}$ index (proposed by Modigliani, 1997); consequently, we will give a much shorter explanation. The reader can see how, by applying formula 2, the Treynor ratios of portfolios with results R_a, R_b and R_m will respectively be the tangents of angles α_a, α_b and α_m on a μ-β map where appear betas of different portfolios and the Security Market Line (SML)[2].

Figure 2. Geometric view of Treynor, $M^2_{\text{for beta}}$ and $PIRR_{\text{for beta}}$ indexes drawn on a μ-β map of ex-post returns



Starting now from R_b and leveraging (or deleveraging from R_a) up to reach the vertical of β_m, the market beta (equal to one), we will obtain the $M^2_{\text{for beta}}$ values of these portfolios. This index

[2] In this approach the CAPM (Capital Asset Pricing Model) logic is underlying. A recent test of this model in the Spanish market can be seen in Gómez-Bezares, Ferruz and Vargas (2012).

is equivalent to the Treynor ratio (it gets to an identical performance ranking), and it will therefore suffer the same problems we will mention on the use of quotients, while at the same time, it has the advantages already explained when commenting the M^2 and Sharpe indexes.

From the review of these indexes, it is easily deduced that one is missing: an index that applies linear penalization (as Jensen does) and referred to the total risk (as Sharpe is). This is what Gómez-Bezares, Madariaga and Santibáñez (2004) did, arriving at the Penalized Internal Rate of Return (PIRR). The formulation could be:

$$PIRR = \mu - t.\sigma \tag{4}$$

where we need to obtain the t value. With that purpose, we can reason this way: the PIRR would be like a certainty equivalent of a risky investment (characterized by μ-σ values); considering that the risk-free rate (r_0) is the certainty equivalent of the market portfolio (R_m) with its average return (μ_m) and risk (σ_m), we could write, by applying formula 4, $r_0 = \mu_m - t.\ \sigma_m$, so:

$$t = (\mu_m - r_0)/\sigma_m \tag{5}$$

which coincides with the market Sharpe ratio, this is, the tangent of angle α_m in Figure 1 and the slope of the CML. In consequence, applying the PIRR is geometrically equivalent to moving along parallel to the CML straight lines, giving as certainty equivalent (the PIRR value) the crossing point with the y-axis of the straight line parallel to the CML that passes through the corresponding portfolio. The PIRR values for portfolios with results R_a and R_b can be seen in Figure 1. By substituting the t value of formula 5 in the formula of the PIRR index (formula 4), we have:

$$PIRR = \mu - [(\mu_m - r_0)/\sigma_m]\sigma \tag{6}$$

The reader can confirm (geometrically or by applying formula 6) that the PIRR of the market portfolio is the risk-free rate (r_0): we assume that the market as a whole is indifferent between the market portfolio and the risk-free rate, and this is why it combines both investments[3].

If we understand that the CML slope represents the price for risk, the return increase that the market demands per each unit of risk growth, the functioning of the PIRR (in formula 6) is absolutely logical. The reader may also confirm that the ranking derived from the PIRR in Figure 1 is different to the one obtained from the Sharpe ratio.

[3] We can also give a statistical meaning to the t value. From formula 4 we get to: $(PIRR-\mu)/\sigma = -t$, so if return follows a normal distribution, the -t value would leave at its left a probability in the standard normal distribution equal to the probability for the actually obtained return of the mutual fund or portfolio in a certain period to be less than the PIRR. In this sense, an investor may look for a different t value from the one offered by the market (we have seen this is the market Sharpe ratio). For instance, a t value of 1 would leave a probability (in the standard normal distribution tables) equal to 0.1587, which means that the PIRR would be a "guaranteed value" with a probability of (1-0.1587) = 0.8413. We could also interpret the straight lines, parallel to the CML, as indifference straight lines, giving a greater value to the portfolio or mutual fund that reaches the highest straight line, but this would lead us to another type of reasoning that would take us away from this paper's goal.

If we applied the PIRR methodology to the systematic risk, subtracting t betas from μ and giving to t the market Treynor value (which can be reasoned in an identical manner as we did before to use the market Sharpe ratio as t value), we would get to:

$$PIRR_{\text{for beta}} = \mu - t.\beta = \mu - [(\mu_m - r_0)/\beta_m]\beta = \mu - (\mu_m - r_0)\beta \quad (7)$$

On this formula we could make very similar comments to those mentioned above about the PIRR, and the corresponding results may be seen in Figure 2. By analyzing formulae 3 and 7, it is evident that the $PIRR_{\text{for beta}}$ exactly coincides in its ranking with the Jensen index (this is reasonable as both apply linear penalization using systematic risk), but applying the PIRR logic (concept of certainty equivalent, price for risk, etc.) allows us to understand the classical Jensen index in a new way. Additionally, it is clear that for many individual investors, who cannot consider diversifiable risk elimination as something given and are therefore interested in the trade-off between obtained returns and total assumed risk (including both systematic and diversifiable risk), applying an index like the PIRR (using σ as the relevant risk measure) can be more realistic than applying the Jensen index (which ignores diversifiable risk behaviour).

3. SOME PROBLEMS OF QUOTIENTS

The geometric view of the Sharpe ratio shows us that it is a slope in a μ-σ map, more specifically the slope of the straight line starting from r_0 and passing through the corresponding portfolio. If we assume a normal distribution of returns, the value of that slope has a clear statistical meaning: it indicates the probability of the portfolio return falling below r_0[4]. Therefore, when we rank mutual funds by their Sharpe ratio, we are actually ranking them by the probability of their return to fall below r_0 in a period: mutual funds will be more attractive if they have a lower probability of having a return below r_0. This seems very reasonable at first sight, but it is not obvious that a mutual fund with a probability, let's suppose, of falling below r_0 of one ten-thousandth, is necessarily worse than a mutual fund with a probability of one hundred-thousandth. It is clearly better to have a low probability of falling below r_0, but if both investments show small probabilities it is likely that the investor may also consider other aspects. Even when not having such low probabilities, we do not find logical that investors exclusively consider this point. This is precisely what happens in Figure 1: for the Sharpe ratio, R_b is better to R_a (the tangent of α_b is bigger than the tangent of α_a), but many investors will prefer R_a to R_b (this is what the PIRR sustains: $PIRR_a > PIRR_b$, which may help to intuitively see the advantages of linear penalization).

In any case, this is more clearly seen with small probabilities; assuming two mutual funds with the following data (in percentage):

Mutual fund C: $\mu_C = 5$; $\sigma_C = 1$

Mutual fund D: $\mu_D = 1.9$; $\sigma_D = 0.1$

[4] Taking formula 1 (Sharpe ratio), $(\mu - r_0)/\sigma$ is also, changed its sign, the standardized value of r_0, which we call t. This t, searching in the tables of the standard normal distribution, shows us the probability of the return to fall below the risk-free rate in a certain period.

If we assume r_0=1.5, the Sharpe ratios will be: S_C = (5-1.5)/1 = 3.5; S_D = (1.9-1.5)/0.1 = 4, so mutual fund D is better to C for the Sharpe ratio, when we think that C would definitively be preferred by most investors[5].

In consequence, the statistical meaning of the Sharpe ratio warns us about its correctness when ranking mutual funds by their performance, and we can intuitively see that too little standard deviations may take the Sharpe ratio to exaggerated values, assigning excellent Sharpe ratios to mediocre mutual funds.

We could reason in a similar way with the Treynor ratio, as we have seen in Figure 2 that it is a slope as well[6]. However, in this case, the situation is even more serious, as it is relatively easy to find betas close to zero (which would increase the ratio values extremely), or even with negative values (which would change the sign of the ratio)[7].

We can also reason in a similar way with the Information Ratio (IR) that we have defined as the tracking error average divided by the standard deviation of tracking error. We could draw a tracking error μ-σ map (similar to the existing one in Figure 1) and we would see that the IR of a portfolio is the slope of the straight line starting from the origin of coordinates and passing through the corresponding point for that portfolio. If we assume that the tracking error follows the normal distribution, we can make a statistical interpretation similar to that one we made for the Sharpe index: the IR shows us the probability of the tracking error to be below zero for a period, and ranks portfolios by their probability of the tracking error to be positive (the best one is that portfolio with the smallest probability of falling below zero). We could repeat here the criticism we made of the Sharpe ratio, which could mostly be extended to other ratios applied to measure performance.

It is argued as one advantage of the Sharpe ratio that, just as with the M^2, we can leverage or deleverage our portfolios up to reach that, for a determined risk, the portfolio with a bigger Sharpe outperforms the others. However, borrowing or lending at the risk-free rate is not easy for particular investors, neither is it possible to fall into debt without limit; on the other hand, performance results are obtained ex-post, when leverage cannot be modified already. It can also be argued that linear penalization (as in the case of the PIRR), when considering as indifferent two mutual funds at the same vertical distance to the CML, does not treat risk adequately. It is not the same to exceed the CML in 2% with a low risk than with a high risk; in the second case, for instance, this is easier to happen by chance. However, the Jensen index has the same problem and is profusely used.

One advantage of the PIRR indexes is that, as it occurs with the M^2 indexes, they are measured in points of return, which makes them easier to understand for the standard investor. And above all, they avoid the evident problems of quotient based measures.

---

[5] A t=3.5 implies, in the tables of the standard normal distribution, a 0.00023 probability of the return falling below r_0, and a t=4 would result in a probability of 0.00003; the latter is smaller, but both are insignificant. On the other hand, the probability of C mutual fund return falling below the average return of D would be obtained this way: t = (5-1.9)/1 = 3.1, with a corresponding probability of 0.00097, which makes mutual fund C clearly more attractive.

[6] Its statistical meaning is not so obvious, but assuming that diversifiable risk will be eliminated by diversification, the β will be proportional to the resulting σ, and we can maintain the same reasoning.

[7] There is a lack of logic in the negative value obtained for Treynor when we have a mutual fund with a positive risk premium and a negative beta. A more detailed explanation can be seen in GB[2] (2012).

4. EMPIRICAL RESULTS

In order to test whether any of the above mentioned problems occur in practice, we took the 413 largest equity mutual funds in the US, with the data series running from August 2006 to the same month in 2011 and being Bloomberg the utilized source[8]. We calculated the monthly returns of the mutual funds[9], their averages, standard deviations and betas (using the S&P 500 total returns as market portfolio, which was also used to obtain μ_m and σ_m); the Treasury Bill 1M was used as risk-free rate. We calculated the S, T, J, and PIRR indexes for each mutual fund, and the Pearson and Spearman correlations. Results can be seen in Table 1 (and a summary including key statistical parameters of the analyzed data is included in the Appendix).

Table 1. Pearson and Spearman correlation coefficients (including initial 413 mutual funds)

Pearson

	S	T	J	PIRR
S	1.0000	-0.0311	0.9570	0.9519
T	-0.0311	1.0000	0.0093	0.0145
J	0.9570	0.0093	1.0000	0.9997
PIRR	0.9519	0.0145	0.9997	1.0000

Spearman

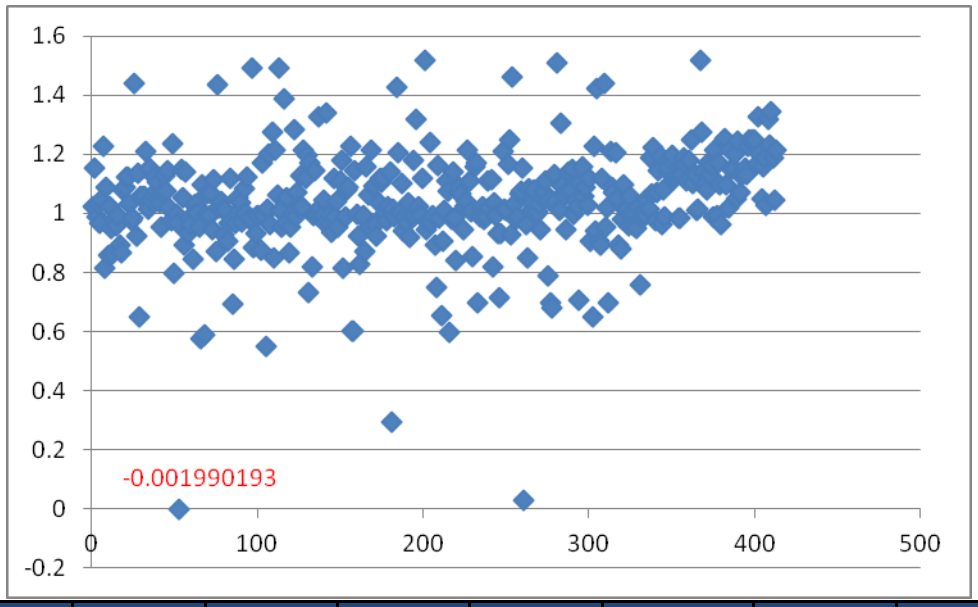
	S	T	J	PIRR
S	1.0000	0.9848	0.9882	0.9848
T	0.9848	1.0000	0.9752	0.9730
J	0.9882	0.9752	1.0000	0.9990
PIRR	0.9848	0.9730	0.9990	1.0000

We see that in Table 1 there appears one negative Pearson correlation coefficient, more specifically between the Treynor and Sharpe ratios; as well as this, the values of the Pearson correlations between Treynor and the other indexes are extremely low, which is surprising. However, if we focus on the Spearman coefficients, they are all quite high, above 0.97. From this we can deduce that rank correlation may hide very serious problems, and above all, that something unexplained must be happening to find so strange coefficients. We analyzed the data and found a mutual fund with a negative beta value and very small in absolute terms, this was fund number 53 by order of capitalization. This is the case of a fund with an objective of long term value creation, focused on capital preservation under adverse market conditions. As the analyzed period has a negative market Sharpe, it is reasonable this fund's negative beta, (see Figure 3).

[8] We want to show our gratitude to Norbolsa (Broker), Raquel Arechabala and Manu Martín-Muñío for their help to obtain the required data. We also want to specially thank Alba Díaz Gómez for her support with the information processing.

[9] Based on variations of net asset value.

Figure 3. β value of mutual funds by fund number and detail of mutual fund with a negative β



Fund	β	μ	σ	Sharpe	Treynor	Jensen	PIRR
HSGFX US Equity	-0.00199	-0.00047	0.02299	-0.07518	0.86831	-0.00173	-0.00018

This very small and negative value of the beta for fund number 53 is precisely what is causing a very high and positive value of the Treynor ratio and what is totally distorting the Pearson correlations. We then thought of repeating the exercise excluding fund number 53, and we reached to Table 2.

Table 2. Pearson and Spearman correlation coefficients (initial 413 mutual funds excluding fund number 53)

Pearson

	S	T	J	PIRR
S	1.0000	0.8936	0.9573	0.9524
T	0.8936	1.0000	0.9369	0.9416
J	0.9573	0.9369	1.0000	0.9997
PIRR	0.9524	0.9416	0.9997	1.0000

Spearman

	S	T	J	PIRR
S	1.0000	0.9993	0.9881	0.9848
T	0.9993	1.0000	0.9888	0.9859
J	0.9881	0.9888	1.0000	0.9990
PIRR	0.9848	0.9859	0.9990	1.0000

Results are surprising. By excluding one single fund all the Pearson coefficients become close to or higher than 0.9, and Spearman coefficients exceed 0.98. We repeat the exercise with the largest 100 funds, reaching to Table 3, and if we exclude the fund with negative beta, we reach to Table 4.

Table 3. Pearson and Spearman correlation coefficients (100 largest mutual funds)

Pearson

	S	T	J	PIRR
S	1.0000	-0.1725	0.9626	0.9551
T	-0.1725	1.0000	-0.0964	-0.0860
J	0.9626	-0.0964	1.0000	0.9996
PIRR	0.9551	-0.0860	0.9996	1.0000

Spearman

	S	T	J	PIRR
S	1.0000	0.9401	0.9896	0.9857
T	0.9401	1.0000	0.9326	0.9315
J	0.9896	0.9326	1.0000	0.9990
PIRR	0.9857	0.9315	0.9990	1.0000

Table 4. Pearson and Spearman correlation coefficients (100 largest mutual funds excluding fund number 53)

Pearson

	S	T	J	PIRR
S	1.0000	0.8641	0.9641	0.9573
T	0.8641	1.0000	0.9520	0.9581
J	0.9641	0.9520	1.0000	0.9996
PIRR	0.9573	0.9581	0.9996	1.0000

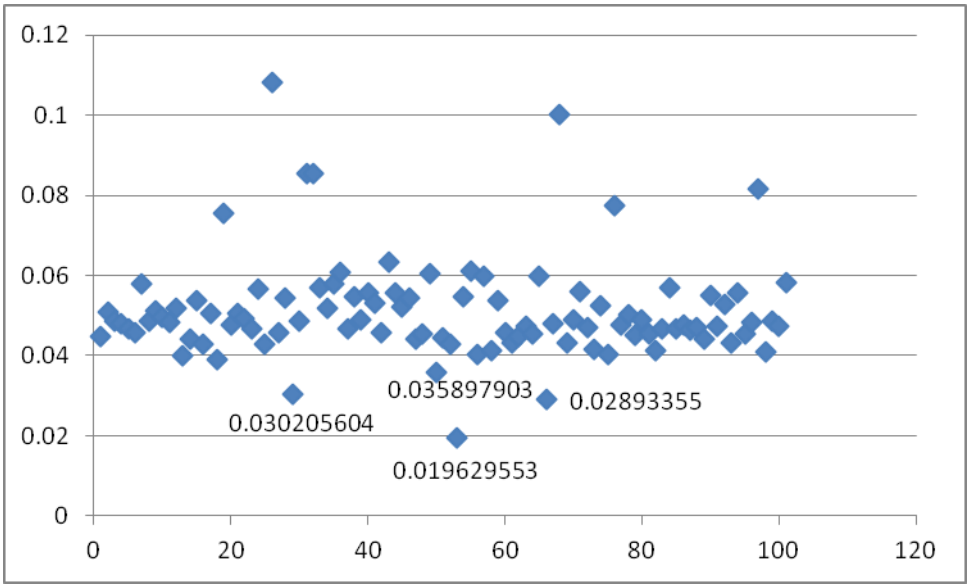
Spearman

	S	T	J	PIRR
S	1.0000	0.9995	0.9896	0.9858
T	0.9995	1.0000	0.9908	0.9874
J	0.9896	0.9908	1.0000	0.9991
PIRR	0.9858	0.9874	0.9991	1.0000

If fund number 53 is not excluded (Table 3), results are even worse for the Treynor ratio as all its Pearson coefficients become negative, which is reasonable having one fund with an illogical Treynor ratio within a smaller sample. The Spearman coefficients keep being high, while smaller than with the 413 funds sample. By repeating the same exercise excluding fund number 53 (Table 4), problems get solved.

The analyzed period (August 2006-August 2011) gives a negative market Sharpe (-0.01265), so we considered it convenient to extend the time period, taking August 2003 to August 2011, and we obtained a positive market Sharpe (0.03952). We focused on the largest 100 funds (same ones as before) and we calculated their performance indexes in the same way. Fund number 53 that previously had a negative beta now has a small but positive value ($\beta = 0.00348$), which is consistent with the goals of the fund. Based on our previous exercise's experience, we first analyzed whether there was any fund with a negative or very small beta. This was only the case of fund 53 (positive but very small beta), and we also analyzed the standard deviations. We can see the σ values of the 100 funds in Figure 4, and we observe there are four funds with smaller values, which may cause problems in the Sharpe ratio; as they have a very small denominator the index value could be abnormally high.

Figure 4. σ value of mutual funds by fund number and detail of mutual funds with a smaller σ (extended period)



Fund	β	μ	σ	Sharpe	Treynor	Jensen	PIRR
ACIIX US Equity	0.58373	0.00094	0.03021	-0.01933	-0.00100	-0.00158	-0.00025
VDIGX US Equity	0.80368	0.00480	0.03590	0.09113	0.00407	0.00190	0.00338
HSGFX US Equity	0.00348	0.00098	0.01963	-0.02808	-0.15822	-0.00056	0.00020
MQIFX US Equity	0.59941	0.00502	0.02893	0.12057	0.00582	0.00247	0.00387

If we ignore those four funds, we also eliminate the fund with a very small beta, so we decided to make the analysis both with all the 100 funds (Table 5) and with 96 funds (excluding those four funds with a smaller σ), and we reached to Table 6.

Table 5. Pearson and Spearman correlation coefficients (100 largest mutual funds, extended period)

Pearson

	S	T	J	PIRR
S	1.0000	0.3512	0.9194	0.9561
T	0.3512	1.0000	0.2770	0.2867
J	0.9194	0.2770	1.0000	0.9872
PIRR	0.9561	0.2867	0.9872	1.0000

Spearman

	S	T	J	PIRR
S	1.0000	0.9521	0.9873	0.9879
T	0.9521	1.0000	0.9423	0.9375
J	0.9873	0.9423	1.0000	0.9970
PIRR	0.9879	0.9375	0.9970	1.0000

Table 6. Pearson and Spearman correlation coefficients (100 largest mutual funds, excluding 4 with smaller σ, extended period)

Pearson

	S	T	J	PIRR
S	1.0000	0.8423	0.9272	0.9631
T	0.8423	1.0000	0.9681	0.9383
J	0.9272	0.9681	1.0000	0.9871
PIRR	0.9631	0.9383	0.9871	1.0000

Spearman

	S	T	J	PIRR
S	1.0000	0.9993	0.9875	0.9861
T	0.9993	1.0000	0.9901	0.9862
J	0.9875	0.9901	1.0000	0.9992
PIRR	0.9861	0.9862	0.9992	1.0000

The Pearson coefficient, in the analysis with 100 funds, gives low values for Treynor (despite being higher than before, they are still unusually low); the Spearman coefficient keeps hiding the problem. Making the analysis with 96 funds the coefficients clearly improve, as the problems caused by abnormally small denominators have been avoided.

Summarizing, in this empirical section we took a sample of the most important equity mutual funds in the US, and calculated their performance indexes (S, T, J and PIRR). Expectations would be, according to most of the literature, that relations among these indexes were high. However, Pearson correlation coefficient has abnormally low values for the Treynor index. The problem is mainly caused by a fund with a negative beta value; by excluding this fund the problem is solved. We have repeated the exercise with the 100 most important funds reaching substantially similar results. Considering that the time period of the selected sample had a negative market Sharpe, and in order to get to more robust results, we have repeated the same analyses with a longer time period and with a positive market Sharpe, concluding that problems of applying quotients persist.

All these calculations support the theoretical argumentation made at the beginning, summarized in the problems caused by applying quotients to measure performance. It is clear that a negative beta may lead us to error if we use the Treynor ratio, but we have seen that we can also make a mistake in case of a very low beta. This is the problem of using ratios. In the sample we have used, there were no cases with very small σ, which is reasonable in a complicated investment period and analyzing equity mutual funds, this is why the Sharpe ratio did not show major problems. Even with this, when excluding funds with lower σ its Pearson coefficients improve a little, and it is clear that we could have searched for funds with σ close to zero, which would have caused unusual Sharpe indexes and therefore lower Pearson coefficients. We preferred not to do this, in order to avoid falling in a data mining exercise (one of the major problems of current financial research; see GB[2], 2006); and this is why we have described in detail the followed path to execute the different analyses while looking for robustness in our results. In any case, we consider we have shown clearly enough that the use of ratios may cause problems, which is what we wanted to prove.

On the other hand, it is important to emphasize the high correlations that usually exist between the Jensen and PIRR indexes, despite them using different risk measures (β and σ respectively), which proves the great importance of the penalization methodology.

5. CONCLUSION

Given that many authors show how the Sharpe ratio is the most commonly applied (Eling, 2008, Amenc, Goltz and Lioui, 2011), and that Information Ratio or Treynor and other quotient based ratios are also widely used (Amenc, Goltz and Lioui, 2011), this paper's title may be considered provocative. Should we not use these ratios anymore?

We have tried to warn the analyst, the fund manager, about some important failures these ratios may have, which does not imply that these ratios must not be used or that other indexes do not have any problems of their own. They must simply be used cautiously, especially under certain circumstances, as we have explained along this paper.

Contrary to Eling's view (2008), we think that the way in which we measure performance does have its importance, at least in some cases, and it is not enough with finding high Spearman correlations among the indexes, because this may be hiding the reality.

Our empirical results show problems with the Treynor ratio in some cases, but not with the Sharpe ratio, as we have not used funds with too small σ values. However, this does not mean that the Sharpe ratio cannot have problems in other samples, as we have explained with a numerical example. It has been said that the Sharpe ratio is not valid if returns do not follow the normal distribution, but even following the normal distribution the statistical explanation that we have given forces us to be cautious with the interpretation of the Sharpe ratio.

In general, we must be careful when applying quotients for performance measurement, especially when denominators have very low values; in these cases it is advisable to use additional performance measures, at least to complete the analysis. In case of having negative beta values, the most prudent practice is to disregard the Treynor index for those funds. The PIRR index, as it is not a quotient but a difference, does not have these problems.

Finally, we want to emphasize that we have worked with indexes that are easy to calculate and understand; among these, linear penalization, in the way we have presented it, is an interesting option.

ACKNOWLEDGEMENTS

We want to thank the editor, referees and other colleagues for their comments and suggestions, which have undoubtedly contributed to improve the present paper.

APPENDIX

Summarized statistic parameters of the analyzed data (base period)

Number of mutual funds 413 (Largest equity mutual funds in the US)

Mutual funds returns

(Mean of monthly net asset value variations Aug2006-Aug2011 for each fund)

-Maximum	0.020494
-Minimum	-0.003642
-Average	0.003174
-Median	0.002967

Mutual funds risk measures

(Considering returns variations in the period for each fund)

	σ	β
-Maximum	0.113217	1.516710
-Minimum	0.009749	-0.001990
-Average	0.058197	1.040882
-Median	0.056492	1.035236

Benchmark returns

(S&P 500)

-Average	0.000603	-Standard deviation	0.051857

Risk-free rate returns

(Treasury Bill 1M)

-Average	0.001259

Mutual funds performance measures

	Sharpe	Treynor	Jensen	PIRR
-Maximum	0.169899	0.868313	0.019717	0.021927
-Minimum	-0.082367	-0.004694	-0.004172	-0.002889
-Average	0.030617	0.004025	0.002598	0.003910
-Median	0.028801	0.001646	0.002428	0.003713
-Standard deviation	0.049674	0.042779	0.003123	0.003173

REFERENCES

AMENC, N., F. GOLTZ and A. LIOUI (2011): "Practitioner portfolio construction and performance measurement: evidence from Europe", *Financial Analysts Journal*, 67, 39-50.

CHUA, C.T. and W.T.H. KOH (2007): "Measuring investment skills of fund managers", *Applied Financial Economics*, 17, 1359-68.

ELING, M. (2008): "Does the measure matter in the mutual fund industry?", *Financial Analysts Journal*, 64, 54-66.

FAMA, E.F. and K.R. FRENCH (2010): "Luck versus skill in the cross-section of mutual fund returns", *Journal of Finance*, 65, 1915-47.

FERRUZ, L. and J.L. SARTO (2004): "An analysis of Spanish investment fund performance: some considerations concerning Sharpe's ratio", *Omega*, 32, 273-284.

GÓMEZ-BEZARES, F., L. FERRUZ and M. VARGAS (2012): "Can we beat the market with beta? An intuitive test of the CAPM", *Spanish Journal of Finance and Accounting*, 41, 333-352.

GÓMEZ-BEZARES, F. and F.R. GÓMEZ-BEZARES (2006): "On the use of hypothesis testing and other problems in financial research", *Journal of Investing*, 15, 64-67.

GÓMEZ-BEZARES, F. and F.R. GÓMEZ-BEZARES (2012): "Classic performance indexes revisited: axiomatic and applications", *Applied Economics Letters*, 19, 467-470.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA and J. SANTIBÁÑEZ (2004): "Performance ajustada al riesgo: índices clásicos y nuevas medidas", *Análisis Financiero*, 93, 6-16.

HODGES, C.W., W.R.L. TAYLOR and J.A. YODER (2003): "Beta, the Treynor ratio, and long-run investment horizons", *Applied Financial Economics*, 13, 503-08.

HÜBNER, G. (2007): "How do performance measures perform?", *Journal of Portfolio Management*, 33, 64-74.

ISRAELSEN, C.L. (2005): "A refinement to the Sharpe ratio and information ratio", *Journal of Asset Management*, 5, 423-427.

ISRAELSEN, C.L. (2009): "Refining the Sharpe ratio", *Journal of Performance Measurement*, 13, 23-27.

JENSEN, M.C. (1968): "The performance of mutual funds in the period 1945-1964", *Journal of Finance*, 23, 389-416.

JENSEN, M.C. (1969): "Risk, the pricing of capital assets, and the evaluation of investment portfolios", *Journal of Business*, 42, 167-247.

LIN, W. (2006): "Performance of institutional Japanese equity fund managers", *Journal of Portfolio Management*, 32, 117-127.

MIRALLES, J.L., M.M. MIRALLES and I. LISBOA (2012): "Empresa familiar y bolsa: análisis de rentabilidad y estrategias de inversión", *Spanish Journal of Finance and Accounting*, 41, 393-416.

MODIGLIANI, L. (1997): "Don't pick your managers by their alphas", *U.S. Investment Research, U.S. Strategy*, Morgan Stanley Dean Witter, June.

MODIGLIANI, F. and L. MODIGLIANI (1997): "Risk-adjusted performance", *Journal of Portfolio Management*, 23, 45-54.

ROLL, R. (1992): "A mean/variance analysis of tracking error", *Journal of Portfolio Management*, 18, 13-22.

SAINZ, J., P. GRAU and L.M. DONCEL (2006): "Mutual fund performance and benchmark choice: the Spanish case", *Applied Financial Economics Letters*, 2, 317-21.

SHARPE, W.F. (1966): "Mutual fund performance", *Journal of Business*, 39, 119-38.

TREYNOR, J.L. (1965): "How to rate management of investment funds", *Harvard Business Review*, 43, 63-75.

COSTE DE LOS FONDOS APLICABLE A PROYECTOS DE INVERSIÓN: UNA APROXIMACIÓN A TRAVÉS DEL VAP

Javier Santibáñez Grúber[1]
Publicado en *Boletín de Estudios Económicos*, nº 223, Abril, 2018, págs. 133-159

1. INTRODUCCIÓN

Es de sobra conocido que uno de los elementos más difíciles de calcular en cualquier proceso de valoración con la técnica de descuento de flujos de caja es precisamente el tipo de descuento. Y esta dificultad aparece también a la hora de determinar el tipo de actualización, el "coste de los fondos" aplicable en el análisis del interés de un proyecto de inversión (análisis que, en último término, consiste en comparar el "valor del proyecto" con lo que cuesta afrontarlo: esto es lo que propone el Valor Actualizado Neto, VAN).

Desde un punto de vista teórico y razonando "en abstracto", el concepto de coste de los fondos es sencillo de definir: a la hora de valorar una inversión, debemos exigir al menos la rentabilidad que podría obtenerse en la mejor alternativa perdida (este es el conocido razonamiento en términos de coste de oportunidad). Pero los problemas en el terreno práctico comienzan de inmediato: para determinar cuál es el rendimiento de la mejor alternativa perdida debo fijarme, supuesto individuos "no indiferentes al riesgo", en una inversión (o empresa) "de riesgo similar"… y ello exige, obviamente, medir el riesgo de la inversión; y encontrar posteriormente empresas que estén reportando a sus dueños un riesgo "parecido", tratando de detectar la rentabilidad que están proporcionando por asumirlo. En realidad, lo que buscamos no es tanto "una empresa concreta con riesgo similar": lo que intentamos es estimar cómo está premiando el mercado la asunción de riesgos "similares al de nuestro proyecto"; y nada de todo ello es fácil.

Si, a todo lo demás constante, suponemos que los individuos que actúan en los mercados prefieren evitar riesgos (hipótesis de "aversión al riesgo"), el conjunto de agentes económicos estarán de acuerdo en premiar adecuadamente a aquellos que estén dispuestos a tomarlos. Y así parece constatarse en el mundo real: los estudios empíricos muestran que, tomando series históricas suficientemente largas (para evitar movimientos especulativos de corto plazo, así como la propia manifestación de la parte peor del riesgo –la que tiene que ver con el hecho de que el premio esperado no se cumple siempre; en caso contrario no hablaríamos de riesgo–), se constata que los inversores que asumen más riesgo consiguen un rendimiento promedio superior a los que no lo hacen.

[1] Quiero agradecer una vez más a Fernando Gómez-Bezares, profesor y amigo, sus siempre interesantes aportaciones y comentarios al texto original. Cualquier error u omisión son responsabilidad exclusiva del autor.

La teoría financiera ha desarrollado métodos variados para tratar de considerar el riesgo en el análisis de la decisión de inversión. Partiendo de la superioridad teórica (y práctica) del Valor Actualizado Neto (VAN) frente a otros criterios interesantes (como la Tasa Interna de Retorno, TIR; o a otros menos potentes, como el Pay-back), dos son los criterios más extendidos y generalmente aceptados en este campo[2]:

- ***Ajuste del tipo de descuento***. Consiste en aplicar un tipo de actualización más alto a las inversiones más arriesgadas. Ello supone que, a igualdad de flujos de caja "esperados", los proyectos que presenten una mayor variabilidad en dichos flujos aparecerán más penalizados.

- ***Equivalente de certeza***. Propone "convertir" los flujos de caja esperados en las cantidades "equivalentes ciertas"; es decir, de lo que se trata es de sustituir los flujos esperados (sujetos a riesgo) por las cantidades seguras a cambio de las cuales el individuo estaría dispuesto a renunciar a los primeros; y lógicamente, el tipo de descuento a utilizar en este caso se simplifica enormemente, en la medida en que al ser los numeradores "cantidades equivalentes a las seguras", la rentabilidad a exigir coincidirá con el tipo de interés sin riesgo.

La formulación básica relativa a todo lo anterior puede expresarse en los siguientes términos. Llamemos DI al desembolso inicial requerido por el proyecto; FF_i al flujo de fondos incremental (que por el momento supondremos cierto, es decir, conocido con seguridad) que provoca la inversión en el año i; n al número de años en los que el proyecto provocará efectos en la tesorería de la empresa (vida útil); y k al tipo de interés sin riesgo. El Valor Actualizado Neto del proyecto se calcula con la conocida fórmula:

$$VAN = -DI + \frac{FF_1}{(1+k)} + \frac{FF_2}{(1+k)^2} + ... + \frac{FF_n}{(1+k)^n} \tag{1}$$

Si suponemos ahora que el futuro está sujeto a riesgo, lo que aparecerá en los numeradores de la fórmula son los flujos de fondos esperados, $E(FF_i)$. Llamando p a la prima de riesgo exigible en función del riesgo soportado y R al tipo de interés primado (de manera que: R = k + p); y α_i al coeficiente corrector que permite convertir las cantidades esperadas en sus equivalentes ciertas (menor que uno, supuesto enemigos del riesgo), las fórmulas de cálculo asociadas a los criterios propuestos son las siguientes:

- ***Ajuste del tipo de descuento***:

$$VAN_{ajustado} = -DI + \frac{E(FF_1)}{(1+R)} + \frac{E(FF_2)}{(1+R)^2} + ... + \frac{E(FF_n)}{(1+R)^n} \tag{2}$$

- ***Equivalente de certeza***:

$$VAN_{ajustado} = -DI + \frac{\alpha_1 \cdot E(FF_1)}{(1+k)} + \frac{\alpha_2 \cdot E(FF_2)}{(1+k)^2} + ... + \frac{\alpha_n \cdot E(FF_n)}{(1+k)^n} \tag{3}$$

[2] Los criterios mencionados pueden encontrarse en cualquier manual de Finanzas moderno, como Brealey, Myers y Allen (2007) o Gómez-Bezares (2012); también pueden consultarse Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (1995 y 2001).

En las que puede verse con claridad la forma en que cada criterio penaliza la asunción de riesgos.

A la hora de calcular el VAN de una inversión, lo habitual es utilizar en los numeradores los conocidos como "free cash-flows", es decir, las cantidades que podrán retirarse de la inversión después de atender sus necesidades financieras (y viceversa, el dinero que habrá que aportar en el caso de que las necesidades superen a los importes generados por la misma). Y al definir estos flujos, lo habitual es no tener en cuenta "quién pone el dinero y quién se lo lleva", sino estimar "las cantidades que el proyecto exige y las que va a proporcionar". Por coherencia, si los flujos a descontar se refieren a la inversión en su conjunto (y no a la parte que será financiada con fondos propios), el tipo de descuento deberá ser el que "responde" a la exigencia del conjunto de los proveedores de fondos utilizados (el conocido WACC, Weighted Average Cost of Capital, o coste medio ponderado del pasivo). Este concepto se obtendría, como su nombre indica, ponderando el coste de los fondos ajenos y el de los propios por los pesos que cada cual representa sobre el total (con ventajas teóricas asociadas a la utilización de valores de mercado en lo que se refiere a la determinación de los pesos a considerar).

$$\text{WACC} = k_i \cdot \frac{FA}{FA + FP} + k_e \cdot \frac{FP}{FA + FP} \tag{4}$$

donde k_i es el coste de los fondos ajenos (después de considerar el ahorro fiscal asociado al pago de intereses), k_e es el coste de los fondos propios (entendido como exigencia de rentabilidad); y FA y FP son los valores de fondos ajenos y propios, respectivamente (preferiblemente, según mercado).

La forma de actuar propuesta supone, como es fácil deducir, la utilización de uno de los dos criterios de tratamiento del riesgo a los que nos hemos referido anteriormente: el Ajuste del tipo de descuento. Efectivamente, en la medida en que la media ponderada se obtenga a partir de las exigencias de accionistas y prestamistas, y dado que lo esperable es que el coste de los fondos propios sea superior al de los ajenos como consecuencia del distinto riesgo que ambos aportantes de fondos soportan (al margen de razones fiscales que pueden, además, abaratar la financiación ajena), el tipo resultante (el WACC) incluirá la prima de riesgo que corresponda; y que puede explicitarse de manera sencilla restando del mencionado WACC el tipo de interés sin riesgo.

El problema fundamental que plantea el cálculo del WACC radica en la estimación del coste de los fondos propios (aunque también, particularmente en empresas no cotizadas, en el cálculo de su valor de mercado, necesario para realizar las ponderaciones correspondientes), ya que el coste de los ajenos es fácil de obtener (dado que, en realidad, viene definido por contrato[3]).

[3] El coste de una financiación es muy fácil de estimar si disponemos del "perfil de fondos" asociado a la misma. El aludido perfil recoge el impacto en la tesorería de la empresa que la financiación estudiada tendrá en el futuro. En el caso de un préstamo, el perfil se calcula a partir de los importes dispuestos y devueltos, así como de los intereses a pagar por su disfrute (corregidos éstos por los efectos fiscales que llevan aparejados); todo ello, claro está, considerando el momento preciso en que se producirán las entradas y salidas en la tesorería. A partir de lo anterior, el coste se estima con una sencilla fórmula matemática (la TIR). Como puede verse, toda la información necesaria para hacer el cálculo está contenida en el contrato de préstamo; cosa que no ocurre cuando de lo que se trata es de calcular el coste de los fondos propios.

Para ayudar a estimar el coste de los fondos propios, la Teoría financiera nos proporciona diversas herramientas que pueden resultar de utilidad según el contexto en el que nos encontremos; revisemos algunas de las más frecuentemente utilizadas.

2. ALGUNAS APROXIMACIONES PARA EL CÁLCULO DEL COSTE DE LOS FONDOS (PROPIOS)

2.1. Modelo de Gordon-Shapiro[4]

Aplicable, en principio, a empresas cotizadas. Parte de la hipótesis de que el mercado valora las empresas con la técnica del descuento de flujos de caja: ello significa que el precio de cotización que observamos en un momento del tiempo es el resultado de descontar los flujos que el mercado espera de la compañía a la tasa que considera apropiada en función de su riesgo. Y dado que los flujos que la empresa reportará en el futuro no están pactados de antemano (no son conocidos a priori), de lo que se trataría es de determinar "lo que es razonable suponer que el mercado espera de la empresa": de esta manera, es decir, realizando una hipótesis con respecto a los flujos esperados, y conocido el valor de cotización actual, el problema se reduce a despejar el tipo de descuento implícito.

El modelo de Gordon-Shapiro sería aplicable en aquellas situaciones en las que sea razonable pensar que los dividendos que pagará la empresa en el futuro responden a un patrón determinado: son constantes o crecen a una tasa constante. En estos casos, la fórmula para el cálculo de la rentabilidad exigida se simplifica enormemente.

Efectivamente, llamando p_0 al precio de cotización actual de las acciones de una empresa, D_i al dividendo por acción esperado en el año "i" y k_e a la rentabilidad exigida (en este contexto, el "coste de los fondos propios"), y supuesto, además, empresa con objeto social indefinido en el tiempo, la fórmula de valoración por descuento de flujos de caja sería la siguiente:

$$p_0 = \frac{D_1}{(1+k_e)} + \frac{D_2}{(1+k_e)^2} + \frac{D_3}{(1+k_e)^3} + \ldots \tag{5}$$

Llamemos g al crecimiento esperado del dividendo (que supondremos constante en el tiempo; y que puede, obviamente, tomar un valor igual a cero –política de dividendos constantes–). En estas condiciones, podemos expresar la fórmula (5) de la siguiente forma:

$$p_0 = \frac{D_1}{(1+k_e)} + \frac{D_1 \cdot (1+g)}{(1+k_e)^2} + \frac{D_1 \cdot (1+g)^2}{(1+k_e)^3} + \ldots \tag{6}$$

Es fácil ver que la cotización de la empresa coincide con la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de razón $(1+g)/(1+k_e)$; que será decreciente, y tendrá por tanto un valor finito, siempre que $k_e>g$. Supuesto lo anterior, y aplicando la fórmula correspondiente, la ecuación (6) puede expresarse así:

[4] Gordon y Shapiro (1956).

$$p_0 = \frac{D_1}{k_e - g} \tag{7}$$

y despejando en (7) llegamos al modelo de Gordon-Shapiro para el cálculo del coste de los fondos propios:

$$k_e = \frac{D_1}{p_0} + g \tag{8}$$

¿Cuáles son las ventajas de este sencillo modelo? La principal es que sería aplicable a cualquier empresa (cotizada) que presente una política de dividendos que responda al patrón indicado, ya que lo que propone es simplemente "deducir" la tasa que el mercado aplica en la fórmula de descuento y que justifica el valor observado; en este sentido, el modelo no asume ninguna hipótesis "normativa" previa[5] (no juzga si la prima está justificada o no por un modelo teórico que explique, como otros que veremos después, cómo se calcula el riesgo o el premio exigible por unidad de riesgo), sino que se limita a "adivinar" la tasa utilizada por los agentes en el ejercicio de valoración de los títulos cotizados. El modelo no propone, no argumenta ni discute cuáles son las razones que justifican la prima observada, por lo que sería compatible con otros modelos normativos.

La principal dificultad del modelo tiene que ver con el hecho de que la mayoría de las empresas no cotizan en bolsa; y que, evidentemente, no sería aplicable a una compañía cuyos dividendos esperados no presenten una cierta regularidad. En concreto, el modelo podría utilizarse en empresas que durante un tiempo suficiente han mantenido políticas de dividendos constantes o crecientes a una tasa razonablemente constante en el tiempo y no hayan dado señales (directas o indirectas) de su intención de cambiarlas.

2.2. El CAPM

El CAPM (Capital Asset Pricing Model, o Modelo de valoración de activos de capital[6]) se construye sobre la base de las ideas recogidas en la Teoría de cartera de Markowitz (1952 y 1959). Según este modelo, si aceptamos que los individuos se comportan como enemigos del riesgo, sería irracional asumir riesgos evitables. Y hay un riesgo muy fácil de eliminar: el que se conoce como "riesgo diversificable".

Efectivamente, es fácil demostrar matemáticamente que el riesgo de una cartera (entendiendo por tal la variabilidad asociada a su rentabilidad) disminuye al aumentar el número de títulos que la componen (al menos, lo hace hasta un cierto punto: a partir de un determinado número de títulos la reducción de riesgo que se consigue al añadir activos adicionales es relativamente pequeña). Si esto es así, y supuesto enemigos del riesgo, no sería racional invertir todo el dinero disponible en

[5] Más allá de la relativa al hecho de que el mercado valora con la lógica del descuento de flujos de fondos (que hemos explicitado ya); y de la hipótesis de mercados eficientes, así como la de expectativas homogéneas, que estarían también implícitas en el razonamiento; pero estos son supuestos imprescindibles si queremos "modelizar" la estimación del coste de los fondos basándonos en lo que observamos en el mercado.

[6] Trabajos pioneros relacionados con este modelo son los de Sharpe (1964 y 1970), Lintner (1965) y Fama (1968).

una sola empresa ("no pongas todos los huevos en el mismo cesto", dice la sabiduría popular; que es en este caso totalmente coherente con la lógica del modelo de Markowitz y sus continuadores).

Así pues, podemos considerar a Markowitz como el "padre" del concepto de diversificación (al menos en el mundo financiero, ya que como decíamos anteriormente, la sabiduría popular había descubierto esta máxima mucho tiempo atrás). Y los discípulos y continuadores del anterior, los creadores del CAPM, proponen estimar qué parte del riesgo de una inversión es "eliminable por diversificación" y qué parte no lo es (esta última constituye lo que conocemos como "riesgo sistemático" –o no diversificable–).

Sobre la base de lo anterior, es decir, supuesto individuos enemigos del riesgo que actúan racionalmente, el mercado premiará la asunción de riesgo, pero sólo el que permanece después de realizada una adecuada diversificación, el que está relacionado con la marcha general de la economía: el riesgo sistemático. Y de lo que se trataría es de estimar la cantidad de riesgo sistemático que aporta un título (la conocida "beta"), lo que combinado con el premio que el mercado ofrece por su asunción (que se sumará al tipo de interés sin riesgo), permitirá deducir la rentabilidad que debemos exigirle.

En lo que se refiere al primer elemento, la beta del título, ésta se calcula a partir de un ajuste de regresión entre las rentabilidades del título y el conjunto del mercado (que suele aproximarse mediante un índice suficientemente representativo; un ejemplo sería el Ibex-35). Y en lo tocante al segundo, el premio por riesgo, suele estimarse como diferencia entre la rentabilidad esperada para ese índice representativo del conjunto y el tipo de interés sin riesgo.

Puede resumirse todo lo anterior en una sencilla fórmula (la que se corresponde con la conocida como Línea del mercado de títulos). Llamando R_0 al tipo de interés sin riesgo, $E(R_m)$ a la rentabilidad esperada del mercado y β_i a la cantidad de riesgo sistemático de la empresa a estudiar, la rentabilidad R a exigir se calcularía:

$$R = R_0 + [E(R_m) - R_0] \cdot \beta_i \qquad (9)$$

que es obviamente una ecuación de ajuste del tipo de descuento.

¿Cuáles son las principales ventajas e inconvenientes de este modelo?

Como principal ventaja podríamos decir que se basa en hipótesis razonables y que se construye sobre una argumentación sólida desde un punto de vista teórico. Es decir, existe un modelo conceptual que da coherencia a eso que observamos en la realidad, se apoya en la idea de que lo que ocurre en el mundo real no es fruto del azar, sino que responde a una cierta lógica. Como hemos indicado anteriormente, la línea argumental es difícilmente cuestionable: supuestos enemigos del riesgo y que se comportan racionalmente el conjunto de agentes (el mercado) premiará la asunción de riesgos, pero sólo aquellos que no puedan evitarse.

Lo anterior constituye una ventaja teórica clara frente a otros modelos que no tienen esa base argumental. Un ejemplo de esto último lo constituiría el APT (o Arbitrage Pricing Theory, modelo de valoración por arbitraje[7]). Este modelo propone aplicar técnicas estadísticas y

[7] Ross (1976).

econométricas complejas (como el análisis factorial) para tratar de "encontrar" cuáles son las razones, en principio ocultas, que explican por qué unos títulos tienen una rentabilidad distinta de la que presentan los demás. La técnica permite detectar "factores" explicativos que el analista debe interpretar posteriormente. Al margen de la dificultad de conseguir este segundo propósito, el modelo no explica por qué los pretendidos factores "deben" condicionar las rentabilidades y los precios observados. Por otro lado, las contrastaciones empíricas del modelo nos conducen con frecuencia al CAPM (del que el APT podría entenderse como una generalización): es habitual que aparezca un primer factor que absorbe una parte muy importante de la capacidad explicativa total (y que puede asociarse a la marcha general de la economía), presentando el resto de factores una baja capacidad explicativa. En otras palabras, el aumento de complejidad introducido por el APT no se ve suficientemente justificado por un incremento notable de la capacidad explicativa del modelo.

Pero los problemas son muchos a la hora de aplicar el CAPM en la realidad[8]. En primer lugar es difícilmente contrastable: no tenemos garantías de que el mundo real se comporte conforme a lo que dicta el modelo (tal vez la más feroz sea la famosa crítica de Roll (1977), que demuestra la imposibilidad de contrastar el modelo: lo que comprobamos en realidad es si la cartera que tomamos como representativa del conjunto del mercado "está bien elegida" –es eficiente, en el lenguaje de la Teoría de cartera–).

Por otro lado, la estimación de la medida del riesgo relevante (la beta), además de muchos otros problemas (relacionados con su estabilidad en el tiempo o con el periodo básico a utilizar en su cálculo, por citar sólo algunos), exige que la empresa sea cotizada (aunque aquí podría ayudarnos la técnica de "valoración por comparables"; luego volveremos sobre ello), al margen de que presupone que la información histórica es válida para hacer previsiones de futuro (aunque tal vez esta hipótesis esté también latiendo en cualquiera de las aproximaciones propuestas).

Más grave aún es la duda relativa a si el modelo puede ser utilizado de manera generalizada: el CAPM asume que el inversor puede eliminar todo el riesgo diversificable, es decir, puede repartir su dinero entre muy distintas inversiones; y en la realidad esto no siempre es así (piénsese, por ejemplo, en una empresa familiar).

2.3. Modelos multifactoriales

En los últimos años, han proliferado modelos multifactoriales, que de alguna manera podrían entenderse como generalizaciones del CAPM[9]. Efectivamente, el modelo citado propone estimar la rentabilidad exigible a un título en función de un único factor de riesgo sistemático: la marcha general de la economía. Ello exige conocer la cantidad de "riesgo sistemático" que un título tiene (el grado en que la marcha general de la economía influye en el comportamiento del mismo) y el premio que el mercado asigna a su asunción.

Lo anterior supone que "toda la parte de la variabilidad de las rentabilidades de los títulos no explicada por la marcha general del mercado" es, por un lado, debida al azar (las fuerzas que actúan aquí son desconocidas); y, por otro, totalmente eliminable por diversificación.

---

[8] Puede verse Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (1994), en el que se estudia su aplicabilidad al mercado bursátil español; o también, desde una perspectiva más amplia y reciente, Gómez-Bezares (2016), capítulos 8 y 11.

[9] Puede encontrarse un interesante resumen en Gómez-Bezares (2016).

Frente a él, los modelos multifactoriales proponen dar un paso más. Sin negar necesariamente la lógica del CAPM (dicho de otro modo, sin poner en cuestión el hecho de que el mercado influya en la rentabilidad del título), tratan de detectar factores adicionales de riesgo sistemático que expliquen las diferencias de rentabilidad entre títulos que observamos en la realidad. Podríamos considerar que nos encontramos ante modelos más ambiciosos, en la medida en que tratan de conocer más razones, de explicar mejor, la formación de precios; de "reducir" la parte de la variabilidad de las rentabilidades observadas que atribuimos al azar.

¿Cuáles son los problemas a los que se enfrentan estos modelos? El principal es que no parecen mejorar significativamente la capacidad explicativa de la realidad (no al menos en el largo plazo; es decir, una cosa es que en un momento concreto del tiempo podamos observar una determinada capacidad explicativa del modelo y otra cosa distinta es que dicha capacidad se mantenga cuando cambiamos el contexto de aplicación, tanto en el tiempo como en el espacio[10]).

Por otro lado, los modelos multifactoriales adolecen normalmente de un basamento teórico suficiente, no aportan una lógica a la explicación propuesta, se limitan a tratar de encontrar relaciones relevantes sin que necesariamente haya razones que las justifiquen (lo que nos obliga a preguntarnos si no responderán al mero azar).

2.4. Una técnica interesante: la valoración por comparables

Una manera sencilla con la que podemos intentar superar en parte los problemas con los que nos encontramos al aplicar los modelos propuestos es el razonamiento implícito en la técnica que se conoce como "valoración por comparables". Efectivamente, en muchas ocasiones, la aplicación directa de los modelos aludidos es imposible, normalmente por carencias en la información necesaria para ello. Sin embargo, con frecuencia la información requerida es accesible en empresas o activos que "se parecen suficientemente" a aquél que queremos valorar.

Ejemplos sencillos de lo anterior los encontramos en nuestra vida habitual. A la hora de tratar de valorar un inmueble, alguien podría afirmar que cada casa "es única". Hasta cierto punto lo anterior es cierto, pero también lo es que probablemente reúna una serie de características que la hacen muy parecida (con matices) a muchas otras. Es por ello que se confeccionan baremos que permiten realizar esa difícil tarea que es "tasar" (valorar) inmuebles: teniendo en cuenta la extensión (metros cuadrados) y las características generales (disponibilidad o no de ascensor, estado general de conservación, necesidad o no de realizar obras de acondicionamiento, proximidad al centro neurálgico de la ciudad, limpieza general del entorno, entre otras muchas) podemos intentar discernir "cuánto está pagando el mercado por un metro cuadrado que reúna ciertas características". Lo anterior no es óbice, claro está, para que pueda haber lugar a la correspondiente negociación entre las partes, en la que puedan tenerse en cuenta, entre otras cosas, las "diferencias" que el inmueble en cuestión presente frente al estándar tomado como referencia. Y es que la valoración por comparables presenta la dificultad fundamental de encontrar cuál es ese comparable de referencia.

[10] Tal vez en este sentido sea conveniente recordar una crítica que con mayor frecuencia de la habitual deberíamos hacer a nuestras investigaciones. Es la que tiene que ver con el conocido como "mineo de datos", que Ross expresa de una manera muy gráfica: tortura suficientemente los datos y dirán lo que el analista quiera que digan.

Nuestro Plan General de Contabilidad (2007), que recordemos que tenía como intención última la de aproximar nuestra contabilidad a la lógica de las Normas Internacionales que permitiera que nuestros estados financieros fueran más fácilmente "comparables" con los confeccionados con aquellas, apoya en este concepto una de las novedades tal vez más importantes que introdujo en nuestra práctica contable (y que más preocupación provocó en su momento, por su posible impacto en el conocido como "principio de prudencia"): el valor razonable.

El valor razonable se aplica sólo a determinados activos con la intención de conseguir que las cuentas anuales proporcionen una imagen "más fiel" del patrimonio, la situación financiera y los resultados de la empresa. Un ejemplo sería el efectivo invertido en moneda extranjera: el valor con el que esta partida debería aparecer en balance se calcula aplicando el tipo de cambio vigente en el momento de presentación de los estados financieros a la cantidad mantenida en dicha moneda. Sería un ejemplo sencillo de valoración por comparables, que tiene como ventaja el hecho de que se trata de un bien perfectamente "sustituible". Se aplica también a otros conceptos: por ejemplo, a activos financieros mantenidos con intención de venderlos[11]; si el título es cotizado, el valor razonable tendría que ver con su valor de mercado; pero cuando no lo es, el propio Plan propone como alternativa, entre otras, la de buscar activos similares para, partiendo de esta información, deducir el valor buscado.

En el mundo financiero, la valoración por comparables es una técnica muy extendida. Un ejemplo típico es la utilización de los conocidos como "múltiplos" en la valoración de una empresa.

Un múltiplo (en este contexto) no es otra cosa que un ratio que relaciona el valor de una empresa con el comportamiento de otra variable que se considera como especialmente relevante (en el fondo, como "explicativa" del concepto de "valor"). Un clásico es el PER (siglas de Price Earnings Ratio, o relación entre precio y beneficio). La forma de actuar es la siguiente: supongamos una empresa con un mercado muy estrecho (en el sentido de que no es cotizada y el mercado en el que podría venderse es ciertamente limitado, no hay operaciones frecuentes relativas a la empresa y no hay muchos oferentes y demandantes para la misma[12]). Dada la dificultad siempre presente en la valoración mediante la técnica de descuento de flujos de caja, un "atajo" que puede aparecer como interesante consistiría en buscar otras empresas que se le parezcan y tratar de deducir el valor buscado a partir del de aquellas que se toman como referencia.

Lo anterior presupone que somos capaces de encontrar cuál es la referencia[13] con la que compararnos; que el parecido es tal que justifica que su valor responda a los mismos elementos determinantes que la nuestra; que el valor observado de lo que tomamos como referencia es lógico; y que las diferencias existentes entre nuestra empresa y la de referencia no justifican una diferencia en cuanto a la lógica aplicable en la valoración de ambas.

---

[11] Conviene en cualquier caso señalar que la valoración de activos financieros se complica con la aplicación de la NIIF 9, tal como puede verse en Deloitte (2016).

[12] La profundidad del mercado suele asociarse con el número de órdenes de compra-venta relativas al título en cuestión. Nos referimos a un mercado como estrecho cuando su liquidez es escasa, el número de transacciones que se realizan es limitado, por lo que el precio que observamos puede estar alejado del valor real.

[13] En el mundo financiero es habitual utilizar la palabra "benchmark" (que se traduce como "punto de referencia") para referirnos a aquello con lo que queremos compararnos.

Así, y siguiendo con la lógica del PER, la forma de proceder sería la siguiente. El primer paso consiste en definir el benchmark (una posibilidad ciertamente tentadora consistiría en tomar la media del sector –para que, de alguna manera, se "compensen las diferencias existentes entre unas y otras"–), calcular el valor del ratio (supongamos que el valor promedio obtenido fuera 6) y aplicar el múltiplo al valor observable en la empresa a valorar (en este caso su beneficio); de esta manera, en las condiciones descritas, si el beneficio observado fuera 100, el valor de la empresa sería 600.

Una visión mínimamente crítica de lo anterior nos llevaría a constatar que, obviamente, la técnica presenta problemas importantes que hacen que el valor obtenido sea más que matizable; una muy clara es que un promedio puede darse con variabilidades muy distintas: es decir, podría ocurrir, por ejemplo, que ninguna de las empresas observadas presente un valor de 6 (por ejemplo, la mitad podrían tener un valor de 3; y la otra mitad, de 9). Lo anterior constituiría una muestra clara de un problema más profundo que late detrás de la técnica aplicada: que no sea el beneficio el que explica las diferencias de precios observadas entre unas empresas y otras. Tal vez otras variables (como el nivel de endeudamiento y las diferencias en riesgo que ello conlleva; o la expectativa de crecimiento que muestren las distintas compañías) puedan tener una capacidad explicativa mayor en lo que se refiere a su valor. Otra crítica que puede realizarse con relación a los comparables es que puede fácilmente alimentar las burbujas especulativas.

Pero lo anterior no significa tampoco que los múltiplos "no sirvan para nada": más bien nos indica que debemos ser cuidadosos en lo que tomamos como referencia para calcularlos.

Otro ejemplo habitual de utilización de la lógica implícita en los "comparables" lo constituye el proceso de apalancamiento y desapalancamiento de betas cuando se trata de valorar empresas con la técnica del descuento de flujos de caja. El procedimiento en este caso puede resumirse en los siguientes términos.

Supuesto que aceptamos la lógica implícita en el CAPM, y ante la imposibilidad de estimar la beta (medida del riesgo sistemático, según el modelo) asociada a nuestra empresa, al no disponer de la información necesaria para ello (rentabilidades históricas según el mercado; suponemos, claro está, empresa no cotizada), buscamos una firma cotizada que se parezca suficientemente a la nuestra (que realice las mismas actividades; normalmente, que esté dentro del mismo sector de actividad). A partir de sus precios y resto de información (dividendos, etc.), calculamos las rentabilidades históricas durante un periodo que se considere suficientemente representativo y las ponemos en relación con las que dio el conjunto del mercado en el mismo lapso de tiempo (utilizando para ello normalmente un índice considerado como suficientemente representativo del conjunto). De esta manera obtenemos la beta, el grado de relación del título con el mercado, que en principio, asociamos al de nuestra empresa.

El siguiente paso es hacernos conscientes de que el endeudamiento en ambas empresas (la de referencia, la cotizada, y la que deseamos valorar) podría ser distinto, por lo que la estimación no sería directamente aplicable a nuestra empresa. Y es que lo que tienen en común las dos empresas es la "actividad" (es decir, lo que nos interesa es la beta del activo), lo que exige "desapalancar" (eliminar el efecto del endeudamiento) la beta obtenida; y una vez realizado el proceso (es decir, obtenida la beta del activo), "volver a apalancar" (utilizando en este caso el endeudamiento de la empresa a valorar). Evidentemente, este último paso debe realizarse sólo en

el caso de que se desee valorar el "equity" de la empresa, sus fondos propios, y no el conjunto del activo (para lo que se utilizaría el WACC, que dependería de la beta del activo[14]).

En este mismo contexto, otra posibilidad sería la de aplicar el modelo de Gordon-Shapiro a una empresa que se parezca suficientemente a la que queremos valorar y en la que pueda aplicarse la lógica del mencionado modelo para deducir el tipo de descuento a utilizar en la valoración de la nuestra.

Las anteriores son aproximaciones que tienen algo en común: realizar valoraciones en las que pueda aplicarse la máxima "es coherente con". Y lo que vamos a tratar en el resto del artículo es hacer algo parecido: proponer una forma de calcular el coste medio ponderado de los fondos "que sea coherente con" algo razonablemente interpretable. No es una propuesta alternativa a las demás formas de calcular el coste medio ponderado: es complementaria a las anteriores. No pretende sustituir o desbancar ningún modelo: intenta ayudar a discriminar hasta qué punto un determinado valor es razonable, por resultar coherente con alguna interpretación lógica.

Para ello, realizaremos un proceso inverso: valoraremos el proyecto con una lógica distinta del "Ajuste del tipo de descuento" (aunque basada también en el descuento de flujos de caja) para, a partir de lo anterior, deducir cuál sería el coste medio ponderado implícito en dicha valoración, con la intención de compararlo con el que podría obtenerse con otras aproximaciones posibles (es decir, con el objeto de determinar si es o no "razonable").

2.5. Justificación del proceso propuesto: el razonamiento "cualitativo"

En el siguiente punto trataremos de llegar a la estimación de la rentabilidad a exigir en el análisis de un proyecto por un camino distinto, que podríamos identificar con el término de "razonamiento cualitativo". Intentaremos definir claramente en qué consiste y cómo se justifica el proceso, para lo que apelaremos a un caso propuesto que solemos resolver con nuestros alumnos en diferentes cursos de grado y posgrado: el que titulamos "Lanzamiento de una revista técnica" (Santibáñez y Gómez-Bezares, 2014).

En el caso mencionado se analiza un proyecto de inversión que consiste en lanzar al mercado, por parte de una empresa cuya actividad fundamental no está relacionada con el mundo editorial, una revista técnica en el ámbito financiero. En su estudio, el enunciado proporciona únicamente la información relativa a la forma en que se fabricará y comercializará el producto (es en este sentido relevante la evolución de la tirada fabricada, qué parte de ella espera venderse cada año, los precios a los que puede venderse según el tipo de comprador o los costes variables y fijos –incrementales– asociados a la fabricación y venta de la revista; entre otros muchos datos).

Como tipo de descuento se propone la utilización de una tasa claramente inferior al "verdadero coste de los fondos", en la medida en que puede deducirse con facilidad que la venta de la revista reportará al conjunto de la empresa una mejora de la imagen que resulta muy difícil de valorar de otra forma.

[14] En los últimos años hemos trabajado en este campo, tratando de proponer una formulación alternativa a la habitualmente utilizada (Hamada, 1969; que se apoya en la lógica de Modigliani y Miller, 1963, con sólo impuesto de sociedades) que incluya el efecto del IRPF y resulte más coherente con Miller (1977). Puede verse a este respecto Santibáñez, Alcañiz y Gómez-Bezares (2014a, 2014b y 2015).

La reflexión que pretendemos provocar con la resolución del caso está relacionada con la conveniencia/necesidad de razonar siempre en términos de "variabilidad a la decisión" a la hora de valorar el interés de cualquier proyecto: para decidir si la propuesta interesa o no (crea valor o no) debemos tener en cuenta "todo lo que cambia con la decisión"; y en este sentido, si la aludida mejora de la imagen existe, es esperable que la empresa pueda vender más de sus productos tradicionales gracias al proyecto. En este sentido, tal vez el interés de la iniciativa no esté en la propia fabricación y venta del producto: podría ocurrir que "no seamos capaces de hacerlo suficientemente bien para conseguir un VAN positivo"; pero quizá el beneficio (valor) que reporta la mejora de la imagen consiga compensar con creces el "agujero" provocado por la actividad estudiada.

Cabe a partir de lo anterior plantearse distintas maneras de valorar la decisión. La mejor, claro está, consistiría en "incluir" en los flujos de caja el impacto de dicha mejora de la imagen; es decir, calcular el aumento de las ventas de nuestros productos tradicionales (deducidos, naturalmente, los costes necesarios para ello) y considerarlo en los numeradores del cálculo del VAN del proyecto. Pero esto a veces es complicado.

Otra posibilidad sería la propuesta en el enunciado: "perdonar" una parte de la rentabilidad que se le exigiría a proyectos "normales" (los que no provocan estos efectos "inducidos" en la actividad habitual de la compañía), utilizando un tipo de descuento inferior al "verdadero" WACC. El problema de esta alternativa es decidir "cuánto" le vamos a perdonar (probablemente esta sea la alternativa más compleja, aunque aparezca en una primera aproximación como sencilla, en la medida en que exige estimar eso que era difícil de valorar, y hacerlo de la manera más oscura posible: a través del tipo de descuento).

Otra alternativa, relacionada con lo que propondremos en el siguiente punto, sería razonar de una manera más cualitativa: olvidarnos de los efectos inducidos en el cálculo de los flujos del proyecto y descontar dichos flujos al "verdadero" coste de los fondos (el WACC). Si el VAN obtenido es positivo, no hay nada más que hablar: aceptamos el proyecto y asunto resuelto. En el caso de obtener un VAN negativo, lo que hacemos es tratar de discernir si la mejora de la imagen tendría un valor igual o mayor a la cifra alcanzada, es decir, valorar si "es creíble" que la mejora de la imagen provoque un VAN positivo que permita compensar el valor negativo asociado a la actividad principal (fabricación y venta de la revista).

En esta misma idea se basa el procedimiento que proponemos a continuación: pensamos que, a veces, el razonamiento que podríamos identificar con la "reducción al absurdo" (en este caso apoyada en la "coherencia con") puede ser extraordinariamente útil.

3. VAP (VALOR ACTUALIZADO PENALIZADO) Y CÁLCULO DEL COSTE DE LOS FONDOS

3.1. Breve presentación y justificación teórica del VAP

Frente (aunque no "en contraposición") a los criterios clásicos de tratamiento del riesgo ya mencionados (Ajuste del tipo de descuento y Equivalente de certeza), Fernando Gómez-Bezares proponía en un trabajo de 1984 la posibilidad de considerar el riesgo en la decisión de inversión de una manera distinta: en lugar de penalizar los flujos de caja esperados a través del

denominador (Ajuste del tipo de descuento) o hacerlo reduciendo dichos flujos hasta convertirlos en sus "equivalentes ciertos" (Equivalente de certeza), el VAP propone penalizar directamente el VAN esperado con su riesgo[15]. La primera pregunta que podríamos plantearnos es: ¿y qué tipo de descuento aplicaremos en el cálculo de los VANes posibles (cuyos valores necesitamos, junto con sus probabilidades de ocurrencia, para a su vez estimar el VAN esperado y su riesgo)? La respuesta es sencilla: el tipo de interés sin riesgo (con lo que evitamos incurrir en penalizaciones múltiples).

El procedimiento propuesto supone de alguna manera tratar cada uno de los escenarios planteados (que darían como resultado los distintos VANes posibles) como si se produjeran en condiciones de certeza; para tener en cuenta posteriormente el riesgo. Si suponemos que el VAN del proyecto sigue una distribución normal (no es lo más importante del criterio –pueden utilizarse aproximaciones basadas en que el VAN sigue una distribución distinta[16]–, pero daremos por buena la hipótesis propuesta), analizo cada uno de los escenarios contemplados "como si no fuera consciente de que no es el único posible"; de esta manera, estimo los flujos de fondos en dicho escenario y aplico el tipo de interés sin riesgo (con lo que llego a un valor de VAN "que no tiene en cuenta el riesgo"). A la vista de los resultados obtenidos, y siempre supuesta normalidad de la distribución, podría calcular el promedio y la desviación típica de VAN, que en las condiciones descritas, definirían de manera suficiente y adecuada el comportamiento del proyecto estudiado.

El paso siguiente consiste en decidir cómo va a realizarse la penalización. En trabajos previos hemos estudiado distintas posibilidades, con ventajas e inconvenientes que por razones de extensión no repetiremos aquí[17]. De entre las muchas alternativas posibles nos hemos decantado en distintas ocasiones por las ventajas asociadas a la "penalización lineal", que consistiría en restar del promedio "t" desviaciones típicas. ¿Qué es lo que en realidad estamos haciendo cuando actuamos de este modo? Valorar el interés del proyecto con el VAN que aparece como garantizado con una determinada probabilidad (que depende del valor de "t" elegido).

Efectivamente, siempre supuesta normalidad del VAN, si utilizamos, por ejemplo, un valor t=1, el VAP obtenido será el que se aleja una desviación típica del promedio por la izquierda; buscando en la tabla de la distribución normal tipificada, vemos que la probabilidad de que un dato se aleje una o más desviaciones típicas del promedio (por la derecha o por la izquierda, al tratarse de una distribución simétrica) es de aproximadamente un 16%. Esto significa que, supuesta ausencia de errores en la construcción de la distribución, la probabilidad de que el VAN sea inferior al tomado como referencia es del mencionado 16%; por lo que el VAP puede entenderse como el VAN mínimo garantizado con un 84% de probabilidad.

Puede verse de una manera resumida la forma de proceder con los criterios de Ajuste del tipo de descuento y el Valor actualizado penalizado en la figura 1.

---

[15] Desde su nacimiento, el criterio ha dado lugar a diversas investigaciones y publicaciones, de entre las que puede destacarse, por el eco internacional que supuso, Gómez-Bezares (1993). Posteriormente, pueden también consultarse Laka y Santibáñez (1995), Santibáñez (1995), Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (2003 y 2004) y Gómez-Bezares, Madariaga, Santibáñez y Apraiz (2007a y 2007b).

[16] Véase Gómez-Bezares (1993) y Santibáñez (1995).

[17] Un resumen sencillo puede encontrarse en Gómez-Bezares (2012).

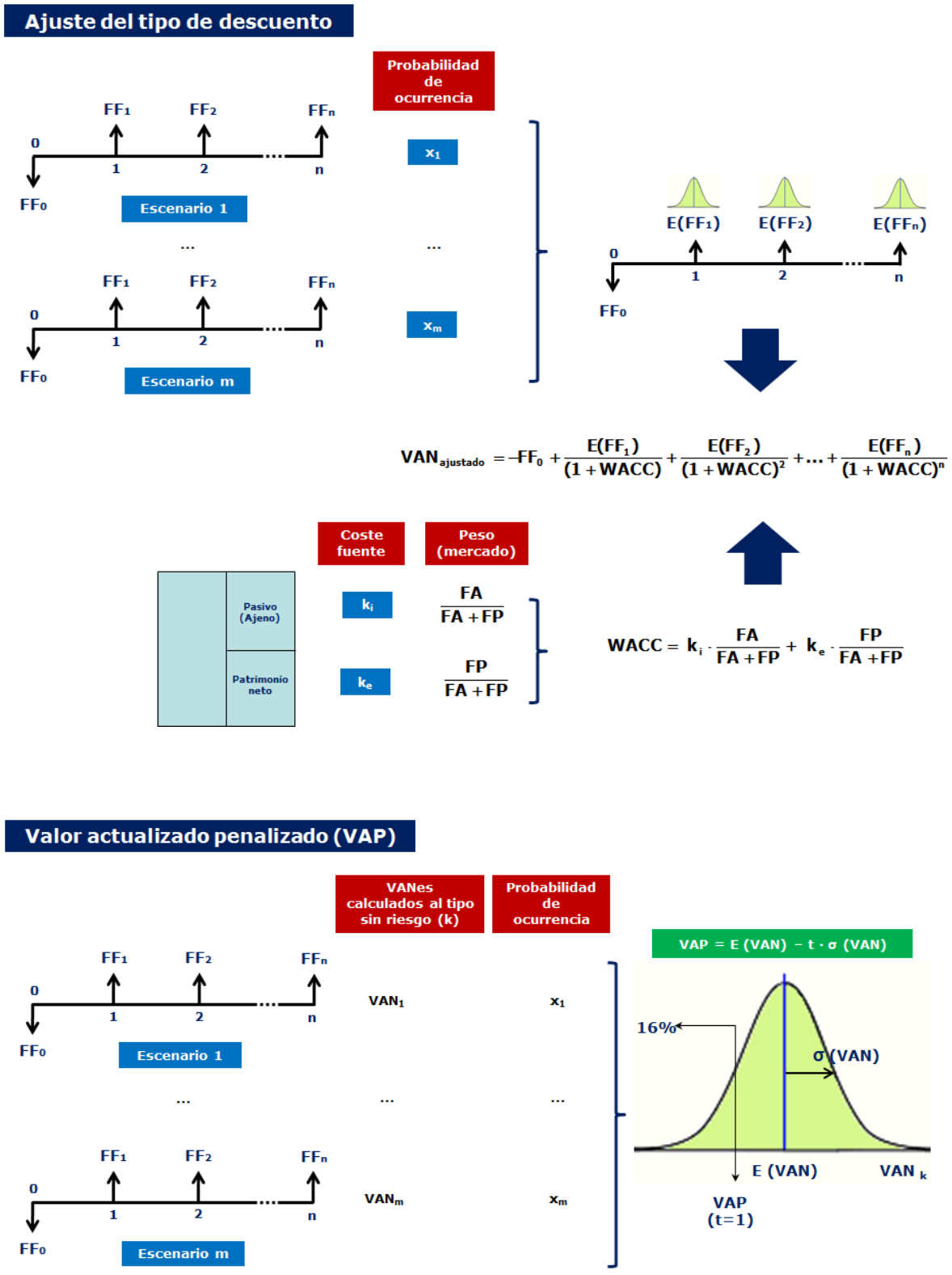

Ajuste del tipo de descuento
Probabilidad de ocurrencia
FF₁ FF₂ FFₙ
0 1 2 n
FF₀
Escenario 1
x₁
Escenario m
xₘ
E(FF₁) E(FF₂) E(FFₙ)
VAN ajustado = −FF₀ + E(FF₁)/(1+WACC) + E(FF₂)/(1+WACC)² + … + E(FFₙ)/(1+WACC)ⁿ
Coste fuente
Peso (mercado)
Pasivo (Ajeno)
Patrimonio neto
kᵢ
kₑ
FA/(FA+FP)
FP/(FA+FP)
WACC = kᵢ · FA/(FA+FP) + kₑ · FP/(FA+FP)
Valor actualizado penalizado (VAP)
VANes calculados al tipo sin riesgo (k)
Probabilidad de ocurrencia
VAN₁
VANₘ
VAP = E (VAN) − t · σ (VAN)
16%
σ (VAN)
E (VAN)
VAN k
VAP (t=1)

Figura 1

Una pregunta que podríamos ahora plantearnos es: ¿y es suficiente la garantía que se decida utilizar para aceptar el proyecto? No es una pregunta fácil de contestar. Pero tampoco es sencillo, supuesto que utilizamos el criterio del Ajuste del tipo de descuento, y asignado un determinado valor para la prima, saber si es suficiente una rentabilidad esperada igual a la aplicada para asumir el riesgo del proyecto.

Para poner en comunicación las dos posibles aproximaciones, podemos despejar en la ecuación del ajuste del tipo de descuento la tasa implícita cuando valoramos el proyecto con el VAP. Tal vez la forma más sencilla de ver lo que se propone es mediante un sencillo ejemplo numérico.

3.2. Un ejemplo práctico

Supongamos un proyecto de inversión en ambiente de riesgo sobre el que se han estimado los flujos de caja asociados al mismo bajo tres posibles escenarios, con probabilidades del 30%, 40% y 30%, respectivamente. Los valores calculados son los siguientes:

Probabilidad	30%	40%	30%
Año	Pesimista	Normal	Optimista
0	-100	-100	-100
1	30	40	50
2	30	50	70
3	40	70	100

Como puede verse, se está suponiendo que los valores extremos se alejan de manera simétrica por la izquierda y la derecha del valor central, y que las probabilidades de ocurrencia de los tres escenarios también se distribuyen de manera simétrica, todo lo cual "ayuda" intuitivamente a aceptar la normalidad de la distribución de VAN. De hecho, sería absurdo en el mundo real suponer que los tres escenarios descritos recogen "todos los posibles valores de los flujos de fondos de cada año", es más lógico pensar que los valores presentados "resumen adecuadamente" el comportamiento esperado de los flujos, que pueden tomar también valores intermedios (o incluso más extremos de los más alejados del promedio, aunque con probabilidades menores).

Supongamos ahora que el tipo de interés sin riesgo es del 4%. Así las cosas, podríamos calcular los VANes posibles utilizando dicho tipo como tasa de descuento; y a partir de los resultados obtenidos, estimar el promedio y desviación típica de VAN.

Tipo de interés sin riesgo	4%		
Probabilidad	30%	40%	30%
Año	Pesimista	Normal	Optimista
0	-100	-100	-100
1	30	40	50
2	30	50	70
3	40	70	100
VAN (k=4%)	-7,9	46,9	101,7
E (VAN; k=4%) =	46,9		
σ (VAN; k=4%) =	42,4		

Supongamos ahora que se considera suficiente exigir una garantía del 84%, aproximadamente, al valor que se tomará como referencia para aceptar o rechazar el proyecto. En estas condiciones es fácil calcular el VAP:

$$VAP\ (t=1) = E\ (VAN) - \sigma\ (VAN) = 46{,}9 - 42{,}4 = 4{,}5$$

Por lo que el proyecto aparecería como interesante, al presentar un valor mayor que cero.

¿Es suficiente la garantía exigida? Para tratar de dar una respuesta "cualitativa" a la pregunta, tratemos de ver "con qué hipótesis de tipo de descuento es coherente" (supuesto el criterio del Ajuste del tipo de descuento). Para ello, despejemos el valor de WACC que conduciría a un VAN ajustado por el riesgo igual al obtenido en nuestro cálculo. Lo primero que debemos hacer es calcular los valores esperados de los flujos de fondos, ponderando los valores posibles por las probabilidades de ocurrencia:

Probabilidad	30%	40%	30%	
Año	Pesimista	Normal	Optimista	Valor esperado
0	-100	-100	-100	-100
1	30	40	50	40
2	30	50	70	50
3	40	70	100	70

Y a partir de lo anterior, despejar el tipo de descuento que llevaría a idéntico resultado que con el VAP:

$$VAN_{ajustado} = -100 + \frac{40}{(1+WACC)} + \frac{50}{(1+WACC)^2} + \frac{70}{(1+WACC)^3} = 4{,}5$$

$$WACC = 22{,}25\%$$

Es decir, que el tipo de descuento que deberíamos aplicar en el análisis del interés del proyecto con el criterio del Ajuste del tipo de descuento para obtener idéntico resultado que exigiendo una garantía del 84% al valor obtenido en el cálculo del VAP es de un 22,25%.

¿Es un tipo de descuento razonable? Pues sigamos tratando de analizar la coherencia de los resultados. Supongamos ahora que disponemos también de información relativa al premio por riesgo que el conjunto del mercado está ofreciendo por la asunción de riesgos:

$$Premio\ por\ riesgo = 6\%^{18}$$

En estas condiciones, ¿cuál sería la beta implícita en el cálculo? (obviamente, al tratarse del WACC, nos estamos refiriendo a la beta del activo). Es fácil despejar este dato en la ecuación fundamental del CAPM:

$$E(R_i) = R_0 + [E(R_m) - R_0] \cdot \beta_i$$

[18] Los datos propuestos serían coherentes, dado el tipo de interés sin riesgo supuesto (4%), con una rentabilidad esperada de la "cartera de mercado" del 10%.

$$22{,}25\% = 4\% + 6\% \cdot \beta_i \quad \rightarrow \quad \beta_i = 3{,}08$$

A la vista del resultado obtenido podríamos afirmar que el cálculo sólo sería razonable si nos encontráramos en un sector de altísimo riesgo[19]; en caso contrario, habría que afirmar que la penalización practicada es excesiva, por lo que el proyecto aparecería como claramente interesante. Sigamos profundizando algo más en los resultados obtenidos. Observemos para ello la figura 2.

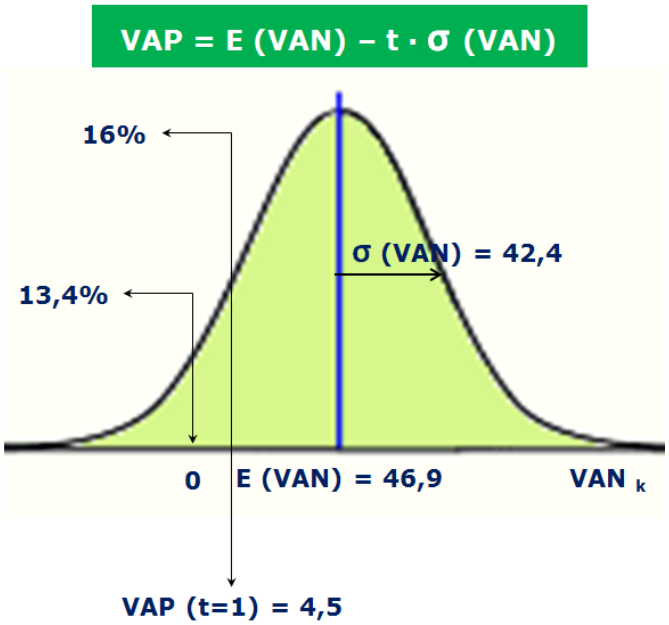


Figura 2

A la vista de la distribución propuesta, podemos afirmar que la probabilidad de obtener un VAN negativo es de:

$$t = \frac{0 - 46{,}9}{42{,}4} = -1{,}10581 \quad \rightarrow \quad \text{Probabilidad (VAN} < 0) = 13{,}44\%$$

También podríamos preguntarnos, por ejemplo, por el valor de VAN mínimo posible. Teóricamente, este valor es -∞; pero si suponemos, por ejemplo, que un 1% es una probabilidad suficientemente pequeña como para considerar imposible la ocurrencia asociada a dicha probabilidad, tendríamos que el VAN mínimo sería:

$$\text{VAN mínimo (probabilidad} < 1\%) = E\,(VAN) - 2{,}3263 \times \sigma\,(VAN) = -51{,}8$$

Tratemos ahora de ver la coherencia de nuestro cálculo con el otro criterio clásico de tratamiento del riesgo: el Equivalente de certeza. En este caso, las posibilidades son más amplias, el cálculo

[19] Como puede comprobarse, el proyecto presenta un riesgo importante, en la medida en que es relativamente fácil doblar el valor de la inversión o "quedarnos como al principio", lo que explica los resultados apuntados.

que proponemos tiene una menor base "científica", tratamos simplemente de razonar de una manera más "cualitativa" (aún).

Una posibilidad sería la siguiente: despejar los coeficientes correctores que conducirían a idéntico VAN ajustado que el obtenido originalmente con el VAP. Comencemos con una aproximación extraordinariamente simplista (que consiste en suponer que dicho coeficiente es idéntico para los tres años de vida del proyecto). El resultado obtenido sería el siguiente:

$$VAN_{ajustado} = -100 + \frac{40 \cdot \alpha}{1{,}04} + \frac{50 \cdot \alpha}{1{,}04^2} + \frac{70 \cdot \alpha}{1{,}04^3} = 4{,}5$$

$$\alpha = 0{,}7112758254$$

Podríamos "sofisticar" algo más el método, dando un mayor o menor valor al parámetro de penalización en función, por ejemplo, del riesgo asociado a cada flujo (o incluso según su volumen total); aunque en seguida entraríamos en las contradicciones de un método que supone penalizar por separado los distintos flujos, sin considerar las relaciones existentes entre ellos, con los problemas que ello conlleva; por lo que consideramos suficiente la (simplista) aproximación anterior.

Parece que reducir los flujos hasta un 70% de su valor esperado, considerando el riesgo asociado a los mismos (que es relevante, pero no parece "exagerado") es más que suficiente… y conduce a un valor de VAN positivo. Nuevamente nos encontramos ante argumentos que nos hacen "ser más conscientes" de lo que estamos aceptando mediante la utilización del VAP.

4. CONCLUSIONES

La valoración de activos es siempre una tarea complicada. La técnica de valoración por descuento de flujos de caja presenta ventajas claras desde un punto de vista teórico frente a otros métodos, como los comparables o las opciones reales, entre otros. Sin embargo, a la dificultad de estimar los flujos futuros que pueden esperarse del activo, se añade la de determinar la tasa de descuento a aplicar, es decir, la rentabilidad que se le exigirá a dicho activo, y que se corresponde con la que podría obtenerse en la mejor alternativa (de riesgo similar) a la que debe renunciarse para adquirirlo.

La Teoría financiera proporciona métodos diversos para calcular la rentabilidad exigible a un activo en función de su riesgo: así, hemos ido revisando desde aproximaciones relativamente sencillas, como el Modelo de Gordon-Shapiro, hasta otras más sofisticadas como el CAPM, el APT o los modelos multifactoriales en boga en nuestros días. Sin embargo, las contrastaciones empíricas de los modelos mencionados no arrojan resultados concluyentes, lo que nos obliga a ser cautelosos en lo relativo a los resultados obtenidos.

En este trabajo hemos intentado mostrar que aproximaciones sencillas, como la propuesta por el Valor Actualizado Penalizado, pueden resultar útiles en el análisis de la coherencia de los resultados obtenidos en la aplicación de los modelos anteriormente citados. Así, y sobre la base de hipótesis razonables en condiciones generales (básicamente, la distribución aproximadamente normal de los resultados esperables del activo a valorar), resulta relativamente sencillo estimar el

parámetro exigido para su aplicación (que tiene que ver con el nivel de garantía exigido al valor que se tomará como referencia para valorarlo) y a partir del resultado obtenido, estudiar su coherencia con el alcanzado con la aplicación de modelos más complicados.

5. BIBLIOGRAFÍA

BREALEY, R.A., S.C. MYERS y F. ALLEN (2007): *Principles or corporate finance*, McGraw–Hill, Nueva York, 9ª ed.

DELOITTE (2016): "NIIF 9 sobre Instrumentos financieros. Lo que hay que saber desde la perspectiva de las empresas no financieras", *Grupo Técnico, IFRS Centre of Excellence*, Junio. Consultado el día 20 de Diciembre de 2017 en https://www2.deloitte.com/content/dam/Deloitte/cr/Documents/audit/documentos/auditnews/160817-audit-NIIF9-Instrumentos-Financieros--Todo-lo-que-hay-que-saber.pdf

FAMA, E.F. (1968): "Risk, return and equilibrium –some clarifying comments", *Journal of finance*, Marzo, nº 23, págs. 29-40.

GOMEZ-BEZARES, F. (1984): "Algunos modelos básicos para la selección de inversiones con flujos relacionados", *XIV Congreso de la SEIO*, Caja de Ahorros de Granada, Granada, vol. 1, págs. 40-51.

GOMEZ-BEZARES, F. (1993): "Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions", en Aggarwal, ed., *Capital budgeting under uncertainty* (1993), Prentice - Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, págs. 91-102.

GÓMEZ-BEZARES, F. (2012): *Elementos de finanzas corporativas,* Desclée de Brouwer, Bilbao.

GÓMEZ-BEZARES, F. (2016): *Gestión de carteras (eficiencia, teoría de cartera, CAPM, APT)*, Desclée de Brouwer, Bilbao, 4ª edición.

GOMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBAÑEZ (1994): *Valoración de acciones en la bolsa española. Un análisis de la relación entre la rentabilidad y el riesgo*, Desclée de Brouwer, Bilbao.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (1995): "VAN vs TRI: algunos ejemplos prácticos", *Harvard-Deusto Finanzas & Contabilidad*, 7, Septiembre-Octubre, págs. 48-58.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2001): "La decisión de inversión en entornos de riesgo", *Estudios Empresariales*, nº 107, Tercer Cuatrimestre, págs. 22-37.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2003): "Medidas de performance: algunos índices clásicos y relación de la TRIP con la Teoría de cartera", *Análisis Financiero Internacional*, 113, Tercer trimestre, págs. 5-19.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2004): "Performance ajustada al riesgo: índices clásicos y nuevas medidas", *Análisis Financiero*, 93, Primer Cuatrimestre, págs. 6-16.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA, J. SANTIBÁÑEZ y A. APRAIZ (2007a): "Índices de performance, gestión activa y eficiencia. Un análisis empírico", *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, vol. 16, nº 2, págs. 21-40.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA, J. SANTIBÁÑEZ y A. APRAIZ (2007b): "Índices de performance, gestión activa y eficiencia. Un análisis de sensitividad y del fenómeno de la persistencia", *Ekonomiaz*, nº 66, 3er Cuatrimestre, págs. 220-245.

GORDON, M.J. y E. SHAPIRO (1956): "Capital equipment analysis: the required rate of profit", *Management science*, Vol. 3, nº 1, Octubre, págs. 102-110.

HAMADA, R.S. (1969): "Portfolio analysis, market equilibrium and corporation finance", *Journal of Finance*, Marzo, págs. 13-31.

LAKA, J.P. y J. SANTIBÁÑEZ (1995): "Algunas reflexiones sobre el Valor Actualizado Penalizado (VAP)", presentada en el *III Foro de Finanzas*, Universidad Comercial de Deusto, Bilbao, Noviembre-Diciembre. Publicada en Gómez-Bezares, F. y J.V. Ugarte, ed., *III Foro de Finanzas (1995)*, Bilbao, págs. 75-91.

LINTNER, J. (1965): "The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets", *Review of economics and statistics*, Febrero, vol. 47, nº 1, págs. 13-37.

MARKOWITZ, H. (1952): "Portfolio selection", *Journal of finance*, Marzo, págs. 77-91.

MARKOWITZ, H. (1959): *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*, Wiley, Nueva York.

MILLER, M.H. (1977): "Debt and Taxes", *Journal of finance*, 32, Mayo, págs. 266–268.

MODIGLIANI, F. y M.H. MILLER (1963): "Corporate income taxes and the cost of capital: A correction", *American economic review*, 53, Junio, págs. 433–443.

PLAN GENERAL DE CONTABILIDAD (2007), *Boletín Oficial del Estado de 20 de noviembre*, Suplemento del número 278.

ROLL, R. (1977): "A critique of the asset pricing theory's tests", *Journal of financial economics*, Marzo, págs. 129-176.

ROSS, S.A. (1976): "The arbitrage theory of capital asset pricing", *Journal of economic theory*, Diciembre, vol. 13, nº 3, págs. 341-360.

SANTIBÁÑEZ, J. (1995): "El tratamiento del riesgo en la decisión de inversión: VAP y distribuciones no conocidas", *Boletín de Estudios Económicos*, 154, Abril, págs. 119-140.

SANTIBÁÑEZ, J, L. ALCAÑIZ y F. GÓMEZ-BEZARES (2014a): "Cost of funds on the basis of Modigliani and Miller and CAPM propositions: a revision", *Análisis financiero*, nº 124, págs. 6–16.

SANTIBÁÑEZ, J., L. ALCAÑIZ y F. GÓMEZ-BEZARES (2014b): "Alternativa a la formulación clásica para el proceso de betas apalancadas: una aplicación al caso español", *Boletín de Estudios Económicos*, 212, Agosto, págs. 329-356.

SANTIBÁÑEZ, J., L. ALCAÑIZ y F. GÓMEZ-BEZARES (2015): "Alternative formulation for the estimation of cost of funds: sensitivity analysis", *Revista Española de Capital Riesgo*, 3/2015, págs. 17-32.

SANTIBÁÑEZ, J. y F. GÓMEZ-BEZARES (2014): *Nuevos casos prácticos de Inversión y Financiación*, Desclée de Brouwer, Bilbao, 3ª edición.

SHARPE, W.F. (1964): "Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk", *Journal of finance*, Septiembre, vol. 19, nº 3, págs. 425-442.

SHARPE, W.F. (1970): *Portfolio theory and capital markets*, McGraw–Hill, Nueva York.

VALOR ACTUALIZADO PENALIZADO: PENALIZACIÓN LINEAL POR TRAMOS

Javier Santibáñez, Fernando Gómez-Bezares y José Antonio Madariaga
Publicado en *Boletín de Estudios Económicos*, nº 226, Abril, 2019, págs. 191-221

1. INTRODUCCIÓN

La valoración es una actividad intrínsecamente ligada a la toma de decisiones: decidir supone siempre elegir; y para elegir entre varias alternativas, no hay más remedio que valorar.

En el ámbito financiero es generalmente aceptado que el objetivo financiero de la empresa, el que debe guiar nuestras decisiones, es maximizar su valor en el mercado[1] (lo que hace imposible una mayor ligazón entre los conceptos "decisión" y "valoración"). Y también lo es que la mejor técnica de valoración es la que se conoce con el nombre de "valoración por descuento de flujos de caja".

A la hora de analizar el interés de una inversión, el criterio más sólido desde un punto de vista teórico es el conocido como VAN (Valor actualizado neto; véase Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 1995). El criterio compara lo que el proyecto vale (aplicando la técnica del descuento de flujos de caja) con lo que cuesta adquirirlo. De hecho, es el que mejor contribuye al objetivo financiero, ya que en último término, el VAN puede interpretarse como el valor creado por el proyecto en cuestión.

Dos son los elementos cuyo comportamiento debe estimarse para aplicar el procedimiento descrito:

- El impacto en caja que provocará el proyecto (que debe entenderse en términos incrementales y con independencia de cómo vaya a financiarse). Es lo que se conoce como "perfil de fondos" del proyecto de inversión.
- La rentabilidad a exigir al proyecto. Es lo que se utiliza como tasa de descuento aplicable a los flujos esperados, y que debe entenderse como un "coste de oportunidad" (rendimiento de la mejor alternativa de condiciones similares a la que hay renunciar para invertir en el proyecto).

En ambiente de certeza, el perfil de fondos se entiende perfectamente conocido. Y el tipo de descuento aplicable coincidiría con la rentabilidad "segura" (que suele identificarse con el rendimiento de la renta fija del Estado). En ambientes reales de riesgo, el perfil de fondos no es conocido con seguridad, aunque se supone que el analista es capaz de estimar los escenarios posibles y de asignarles probabilidades. Ello significa que no se conocen los valores concretos

[1] Véase Brealey, Myers y Allen (2007) o Gómez-Bezares (2012), entre muchos otros.

que tomarán los flujos de fondos asociados al proyecto, pero sí las distribuciones de probabilidad de todos ellos, así como las relaciones existentes entre los distintos flujos.

Es también generalmente aceptado en Teoría financiera que los individuos nos comportamos como "enemigos del riesgo" (puede verse una justificación sencilla en Gómez-Bezares, 2012, cap. 6). Esta hipótesis se deriva directamente de la aceptación de que la utilidad marginal (incremento de satisfacción que generan aumentos sucesivos de riqueza) es positiva pero decreciente; y significa que los individuos sólo asumirán riesgos si esperan un premio por hacerlo.

En estas condiciones, el individuo preferirá, a igualdad de resultado esperado, aquella decisión que le reporte un menor riesgo; y a igualdad de riesgo, aquella decisión que lleve aparejado un resultado esperado superior. En otras palabras, si los individuos se comportan con aversión al riesgo, no cabe comparar el interés de distintas alternativas de inversión considerando sólo el resultado esperado, sino que debe considerarse también de alguna forma la variabilidad asociada a dicho resultado. Una posibilidad de tener en cuenta lo anterior consiste en comparar las distintas alternativas disponibles en función de su utilidad, seleccionando aquella que maximice la utilidad esperada. Pero el planteamiento resulta poco operativo, ya que exigiría conocer la curva de utilidad de los aportantes de fondos (además de que, obviamente, precisa que la utilidad sea "cardinal", es decir, medible).

Un planteamiento menos exigente que el anterior es el propuesto por los ordinalistas, que defienden que no es necesario medir la satisfacción, sino que basta con que el individuo sea capaz de establecer un orden de preferencias completo y consistente (es decir, que no resulta imprescindible que el individuo sea capaz de valorar "cuánto de contento está" en cada situación, basta con que sea capaz de indicar "qué prefiere", aunque no sepa decir "por cuánto"): este es el razonamiento que está en la base de la Teoría de cartera de Markowitz (1952 y 1959) y en los modelos que se han construido sobre la base de la misma (CAPM y sus continuadores[2]).

El planteamiento exigiría en este caso representar en un mapa μ-σ (resultado esperado – riesgo asumido) el comportamiento de los proyectos entre los que hubiera que elegir (caracterizados por los dos parámetros indicados), así como las llamadas "curvas de indiferencia" (que recogen los pares de valores de promedio y riesgo indiferentes para el individuo; supuesto enemigos del riesgo, se trata de curvas crecientes en el mapa μ-σ; y lógicamente, curvas más alejadas del origen de coordenadas están asociadas a niveles superiores de utilidad, al suponer más resultado esperado para el mismo riesgo, o menos riesgo para el mismo resultado esperado). Y sobre la base de lo anterior, se trataría de seleccionar aquel proyecto o combinación de proyectos que permitiera alcanzar un mayor nivel de utilidad (aquel que permitiera situarse en la curva de indiferencia más alejada posible del origen de coordenadas).

En principio, los planteamientos que centran el análisis en el llamado mapa "μ-σ" (de VAN) presuponen que el comportamiento del VAN queda perfectamente definido con estos dos parámetros; lo que estaría plenamente justificado cuando pueda aceptarse la normalidad de la distribución del VAN (aunque la aceptación de dicha hipótesis tampoco resulta imprescindible).

Sobre la base de la hipótesis de aversión al riesgo, dos son las aproximaciones clásicas al tratamiento del riesgo en la decisión de inversión:

[2] Trabajos especialmente relevantes en este campo son los de Lintner (1965) y Sharpe (1964 y 1970).

- Ajuste del tipo de descuento. Propone descontar los flujos esperados del proyecto a un tipo ajustado, que se calcula sumando una prima de riesgo al tipo de interés sin riesgo.

- Equivalente de certeza. Propone convertir los flujos de fondos esperados en los "equivalentes ciertos" (entendidos como las cantidades seguras que reportarían la misma satisfacción que las esperadas sujetas a riesgo), y descontarlos al tipo de interés sin riesgo.

En ambos casos se busca penalizar el interés de los proyectos en función de su riesgo; y también en ambos está implícita la estimación de el/los parámetro/s en los que el decisor expresa su aversión al riesgo: la prima de riesgo (en el caso del ajuste del tipo de descuento); y los coeficientes con los que se corrigen los flujos esperados (en el equivalente de certeza). Así pues, a la dificultad de estimar el impacto del proyecto en la tesorería de la empresa (el perfil de fondos) se añade la de estimar el/los parámetro/s en los que se expresa la aversión al riesgo.

Frente a los dos criterios clásicos presentados cabe una "tercera vía", que presenta a su vez puntos de contacto evidentes con la lógica implícita en los anteriores: la penalización directa del VAN esperado en función de su riesgo[3]. En trabajos previos hemos profundizado en esta idea, defendiendo con carácter general la penalización lineal por las ventajas que presenta en cuanto a la facilidad de interpretación (y por tanto, de estimación) del parámetro de penalización que requiere. El problema que plantea es que supone implícitamente aceptar que las curvas de indiferencia son en realidad rectas; y puede demostrarse que en las condiciones descritas (utilidad marginal positiva y decreciente; y resultado normalmente distribuido) las curvas de indiferencia son cóncavas vistas desde arriba (véase Gómez-Bezares, 2010, cap. 4).

En este artículo trataremos de superar el problema planteado, manteniendo las ventajas asociadas a la penalización lineal[4].

2. PASO PREVIO: ESTIMACIÓN DEL VAN ESPERADO Y DEL RIESGO

Todos los criterios propuestos asumen que somos capaces de estimar el comportamiento esperado del proyecto en términos de su impacto en la tesorería de la empresa. Describiremos en este punto el procedimiento a seguir para realizar los cálculos conducentes a los dos parámetros básicos en los que vamos a resumir el comportamiento del mismo: el VAN esperado y el riesgo (que obtendremos a partir de la mejor medida estadística de la variabilidad de una variable aleatoria, la desviación típica).

---

[3] El primer trabajo relacionado con el tema aparece a mediados de los ochenta del siglo pasado (Gómez-Bezares, 1984); desde entonces, hemos continuado trabajando en el criterio, con la intención siempre de proporcionar un instrumento complementario a los tradicionales para la valoración de proyectos y de la performance en bolsa. Para profundizar en los distintos aspectos y ámbitos de aplicación puede verse Gómez-Bezares (1993), Laka y Santibáñez (1995), Santibáñez (1995 y 2018), Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (2003 y 2004) y Gómez-Bezares, Madariaga, Santibáñez y Apraiz (2007a y 2007b).

[4] Para ver posibilidades de penalizaciones distintas puede acudirse a Gómez-Bezares (2012, cap. 6). Luego volveremos sobre ello.

Si suponemos que somos capaces de definir los escenarios posibles, el procedimiento es extraordinariamente sencillo. Se trataría en este caso de estimar el impacto en caja del proyecto en cada uno de esos escenarios y de asignarles probabilidades. Podríamos, por ejemplo, definir tres escenarios (uno pesimista, otro normal y otro optimista), que dependen del comportamiento de determinadas variables (por ejemplo, las ventas). Con seguridad no se trataría de los tres únicos escenarios posibles, sino de una simplificación (razonable) de la realidad: son los valores en los que "resumimos" la información disponible. A partir de ellos podríamos calcular los tres VANes "posibles", en cuyo cálculo utilizaríamos el tipo de interés sin riesgo para evitar incurrir en penalizaciones dobles.

Si asignamos probabilidades a los tres escenarios (proceso en el que puede resultar de interés apelar a la teoría de la probabilidad subjetiva, que entiende dicha probabilidad como grado de verosimilitud que se concede a un suceso) basta con aplicar las fórmulas de cálculo del promedio y desviación típica de una variable aleatoria.

Otra posibilidad consistiría en suponer que conocemos las distribuciones de probabilidad de los flujos de fondos asociados al proyecto, así como las relaciones existentes entre los correspondientes a los distintos años de su vida útil. Si consideramos conocido el tipo de interés sin riesgo (que es siempre el que utilizaremos para obtener los VANes posibles), el cálculo del VAN esperado y del riesgo podría hacerse a partir de las fórmulas del promedio y desviación típica de una combinación lineal de variables aleatorias (puede ampliarse en Hillier, 1963).

Una tercera posibilidad, aplicable cuando entendemos que los escenarios posibles son infinitos, y que incluso el tipo de interés sin riesgo es una variable aleatoria, consistiría en aplicar la técnica de simulación. En este caso deben definirse las distribuciones de probabilidad de todas las variables implicadas en la explicación de los flujos de fondos y el tipo de interés sin riesgo, así como las relaciones existentes entre ellas. Y a partir de la información descrita, simular la aparición del azar en todas las variables implicadas para generar los valores posibles de VAN. Repitiendo el proceso un número suficiente de veces, podríamos definir la distribución de probabilidad del VAN (véase Hertz, 1964).

Para finalizar, podemos también utilizar métodos más sencillos para los casos en los que la calidad de la información o nuestra capacidad para definir escenarios posibles sea más reducida. Si aceptamos la normalidad en la distribución del VAN y "nos atrevemos" a definir dos escenarios extremos (el peor y el mejor de los posibles) no cometemos un error demasiado grande si aproximamos el promedio y la desviación típica (E(VAN) y σ(VAN), respectivamente), con las siguientes fórmulas simplificadas (véase Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 2001):

$$E(VAN) = \frac{VAN_{máximo} + VAN_{mínimo}}{2} \qquad \sigma(VAN) = \frac{VAN_{máximo} - VAN_{mínimo}}{6}$$

En cualquiera de los casos propuestos, entendemos que contamos con la información necesaria para presentar la distribución del VAN (calculado siempre al tipo de interés sin riesgo, que denominaremos k; véase figura 1).

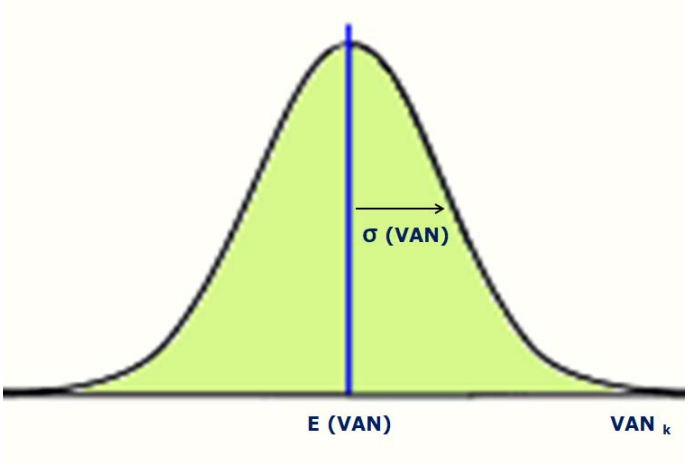


Figura 1

3. PENALIZACIÓN DIRECTA DEL VAN

Como se ha indicado, existe una "tercera vía" para considerar el riesgo en la decisión de inversión, que concebimos más como "complementaria" que "alternativa" a los criterios clásicos del ajuste del tipo de descuento y el equivalente de certeza: la penalización directa del VAN esperado con su riesgo, que da lugar a un criterio que denominamos Valor Actualizado Penalizado (VAP).

Recuérdese que los VANes posibles que han dado lugar a la distribución de VAN se han calculado utilizando el tipo de interés sin riesgo (es decir, en cada posible escenario se ha asumido la hipótesis de certeza: es lo que obliga a considerar el riesgo en un paso posterior). Supuesto conocida la distribución de probabilidad de VAN y perfectamente definida por los dos parámetros indicados, la penalización puede realizarse de muchas maneras distintas, que podríamos resumir o expresar en la función matemática:

$$\text{VAN ajustado} = \text{VAP} = f\,[E\,(\text{VAN})\,,\,\sigma\,(\text{VAN})]$$

De entre las múltiples alternativas posibles centraremos aquí nuestra atención en tres, que formulamos y resumimos en los gráficos adjuntos (figuras 2, 3 y 4; puede ampliarse lo relativo a cada una de ellas en Gómez-Bezares, 2012).

Analicemos brevemente los tres sistemas propuestos. Todos ellos presentan algunos elementos comunes:

- Los proyectos que se sitúan en la misma recta (propuestas 1 y 3) o curva (propuesta 2) aparecen como indiferentes. Se aceptan los proyectos cuyo VAN ajustado (en adelante VAP) sea positivo (alternativas 2 y 3), y los que presenten un valor superior al considerado como mínimo aceptable (propuesta 1); y a la hora de jerarquizar, buscamos los proyectos con mayor VAP. Por lo tanto, debe entenderse que estamos razonando en términos de rectas/curvas de indiferencia (las propuestas 1 y 3 asumen rectas de indiferencia, mientras que la 2 presupone curvas de indiferencia).

- Las rectas/curvas de indiferencia más "altas" son preferidas a las más "bajas": en todas ellas conseguimos alcanzar niveles superiores de resultado esperado, supuesto un riesgo dado; o un riesgo menor para cada nivel de resultado esperado. Esto significa que el VAP puede entenderse en todos los casos como una "medida de utilidad", por lo que maximizar el VAP puede asociarse a maximizar la utilidad.

- Las propuestas de penalización 2 y 3 presentan algo más en común: en ambos casos el VAP puede entenderse como un "VAN equivalente cierto". Efectivamente, los proyectos que se sitúan en la misma recta (propuesta 3) o en la misma curva (propuesta 2) se valoran en función de la ordenada en el origen de dicha recta/curva, que por definición, es el VAN seguro (riesgo igual a cero).

Penalización 1: $$\mathbf{VAP = \frac{E\,(VAN)}{\sigma\,(VAN)}}$$

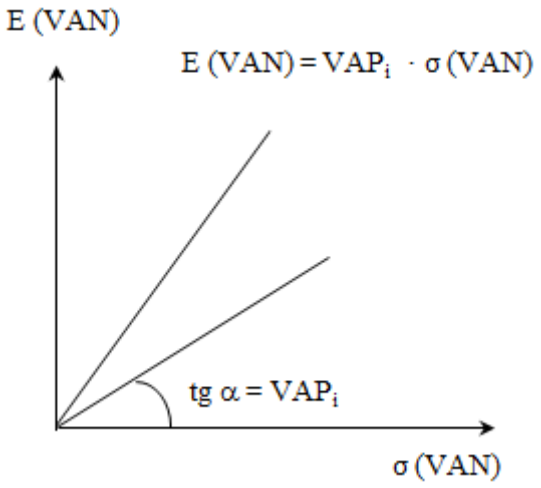


Figura 2

Penalización 2: $$\mathbf{VAP = E\,(VAN) - \sigma\,(VAN)^t}$$

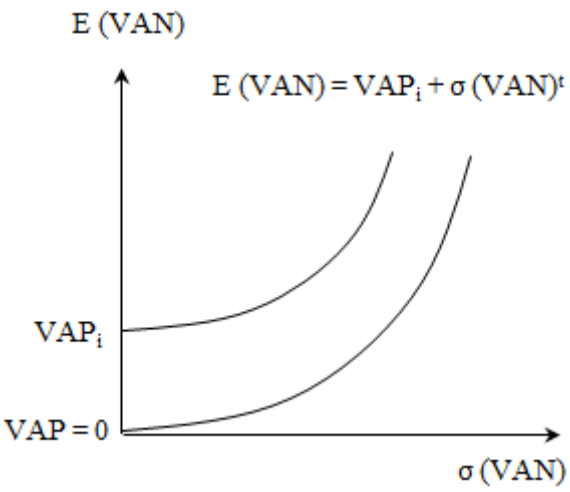


Figura 3

Penalización 3: $\mathbf{VAP = E\,(VAN) - t \cdot \sigma\,(VAN)}$

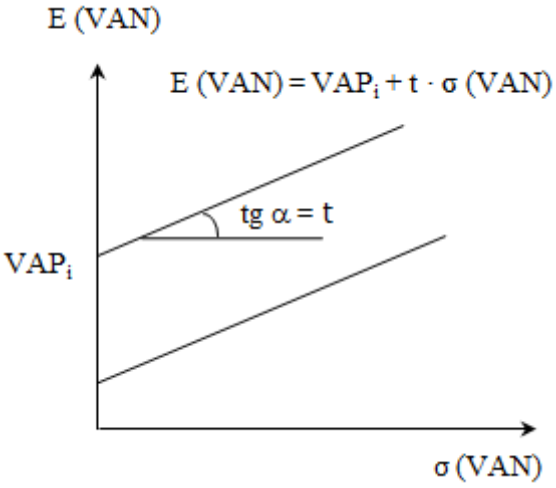


Figura 4

El primer método de penalización propuesto es fácilmente criticable razonando por "reducción al absurdo". Supuesta normalidad en la distribución del VAN, y siempre supuesto que tratamos de maximizar el VAP, lo que busca en realidad el criterio es minimizar la probabilidad de pérdida (entendiendo por tal –pérdida- la consecución de un VAN<0 –recuérdese que VAN=0 no significa beneficio contable nulo, sino performance idéntica a la de la mejor alternativa de mercado, que en nuestro caso, viene dada por el tipo de interés sin riesgo utilizado en el cálculo del VAN-). Así, un proyecto con un VAP igual a 8 aparecería como "el doble de bueno" que un proyecto con un VAP igual a 4; y es fácil comprobar que la probabilidad de pérdida en ambos casos es totalmente ridícula, y el criterio no considera ningún otro elemento de los que diferencian los dos proyectos y que pueden resultar más relevantes para elegir entre ambos (piénsese, por ejemplo, que el segundo es diez veces más grande que el primero; lo que haría que el valor creado pudiera ser extraordinariamente mayor en el segundo)[5].

Eliminado pues el primer método (que puede considerarse de manera similar a un criterio habitualmente utilizado en el análisis del interés de proyectos de inversión, el pay-back o periodo de recuperación, que aporta una información siempre interesante –el tiempo que el proyecto tarda en devolver lo invertido-, pero que por sus problemas teóricos difícilmente puede entenderse como "criterio de decisión" y debe considerarse más bien como "información complementaria"), centraremos nuestra atención en los otros dos.

La penalización no lineal tiene una ventaja indiscutible desde un punto de vista teórico: como hemos indicado, en las condiciones propuestas (utilidad marginal positiva y decreciente –que implica individuos que prefieren más a menos y se comportan como enemigos del riesgo- y resultado normalmente distribuido –lo que permite razonar considerando sólo los dos parámetros utilizados, el resultado esperado y el riesgo-) puede demostrarse matemáticamente que los pares de valores promedio-riesgo que resultan indiferentes se sitúan en curvas cóncavas (vistas desde arriba) en el mapa μ-σ; y la penalización lineal (propuesta 3) se basa en la aceptación de que el individuo presenta rectas de indiferencia.

[5] Este mismo problema tiene el conocido índice de Sharpe (véase Gómez-Bezares y Gómez-Bezares, 2015).

El problema que presenta la penalización no lineal radica en la dificultad a la hora de dar valor al parámetro de penalización "t", ya que no tenemos razones claras para justificar la utilización de un valor igual a 2 ó a 17.

En el caso de la penalización lineal, la interpretación de "t", y por tanto, su elección, es mucho más clara. Efectivamente, cuando calculamos el VAP restando t desviaciones típicas al promedio lo que hacemos es "fijarnos" (para tomar la decisión correspondiente) en aquel valor que deja a su izquierda una determinada probabilidad, que depende del valor elegido. Así, por ejemplo, calcular VAPs utilizando una t=1 supone tomar como referencia el "VAN mínimo garantizado con una probabilidad del 84%, aproximadamente" (ya que la probabilidad de encontrar un dato que en una distribución normal se aleje una desviación típica o más por la izquierda es de un 16%, aproximadamente). Es por ello que hemos defendido en trabajos anteriores[6] la conveniencia de trabajar con penalizaciones lineales, dando con carácter general a t un valor entre 1 y 2 (lo que supone exigir garantías de entre el 84% y el 98% de que el VAN finalmente obtenido sea igual o superior al tomado como referencia –el propio VAP-). Sin embargo, nos encontramos con el problema apuntado: en las condiciones descritas, deberíamos trabajar con curvas (y no rectas) de indiferencia.

El reto, pues, consiste en mantener las ventajas de la penalización lineal, tratando de superar sus problemas. El principal escollo radica en que no parece aceptable que incrementos sucesivos de riesgo lleven aparejados aumentos idénticos de resultado esperado para mantener el mismo nivel de utilidad; concretando un poco más, parece razonable que la exigencia de rendimiento esperado sea menor para los primeros incrementos de riesgo, y mayor cuando el individuo va acumulando más riesgo.

Una posibilidad tentadora consistiría en utilizar valores de t distintos dependiendo del nivel de riesgo de los proyectos. Así, por ejemplo, podrían definirse tres niveles de riesgo distintos (bajo, medio y alto), utilizando valores de t distintos según la "zona de riesgo" en la que el proyecto obligue a situarse. El problema que plantea este sistema sigue siendo el mismo, la linealidad implícita de las rectas de indiferencia, que haría en este caso que proyectos de riesgo elevado se vieran exageradamente penalizados (al presuponer que los premios por riesgo exigidos son idénticos para los primeros aumentos de riesgo y para los últimos). Dicho de otro modo, el sistema supondría penalizaciones exageradas para los proyectos que se clasificaran como de riesgo alto (véase figura 5).

La forma de superar la crítica anterior es sencilla: se trataría de entender una curva como una "concatenación de pedacitos de recta" (véase Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 2001). Lo anterior implica aceptar la hipótesis de que, para "niveles suficientemente parecidos de riesgo", suponer que cambios en el eje horizontal no conllevan cambios en la pendiente de la curva supone cometer un error pequeño. Aplicado a nuestro ejemplo anterior (figura 5), los proyectos A y B podrían perfectamente aparecer como indiferentes, al situarse en la misma "curva" de indiferencia (entendida como concatenación de trozos de recta; puede verse la figura 6).

[6] Véanse Gómez-Bezares (1993), Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (2001 y 2003), Laka y Santibáñez (1995) o Santibáñez (1995 y 2018), entre otros.

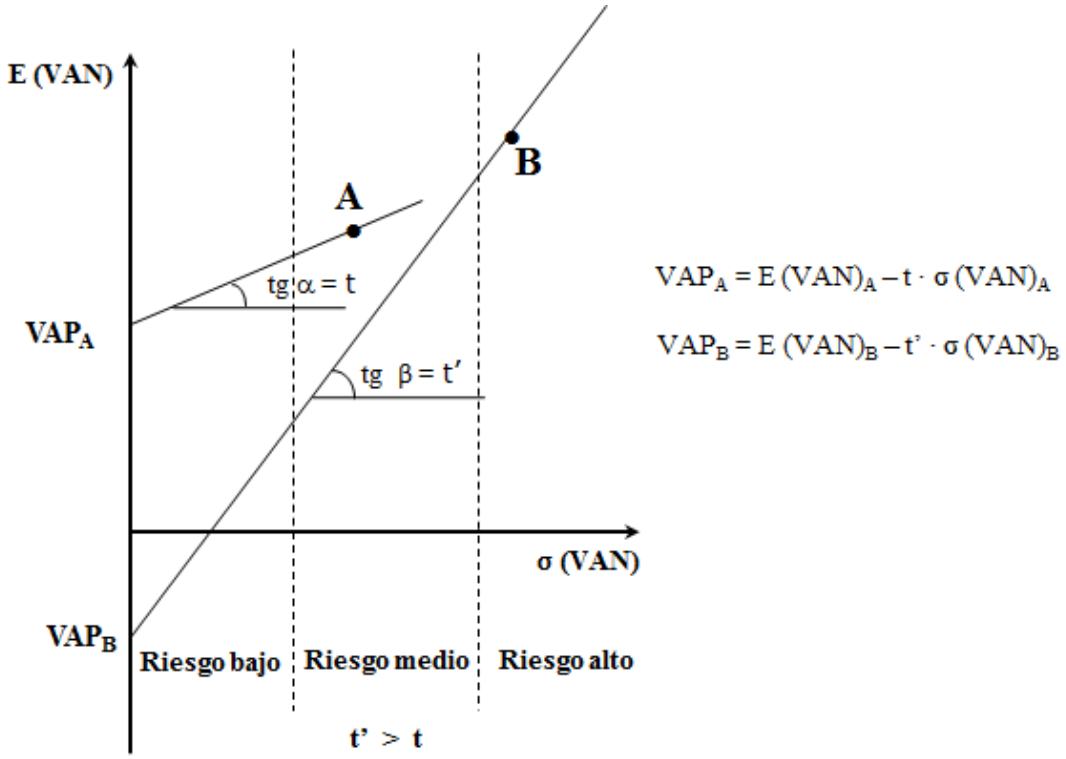


Figura 5

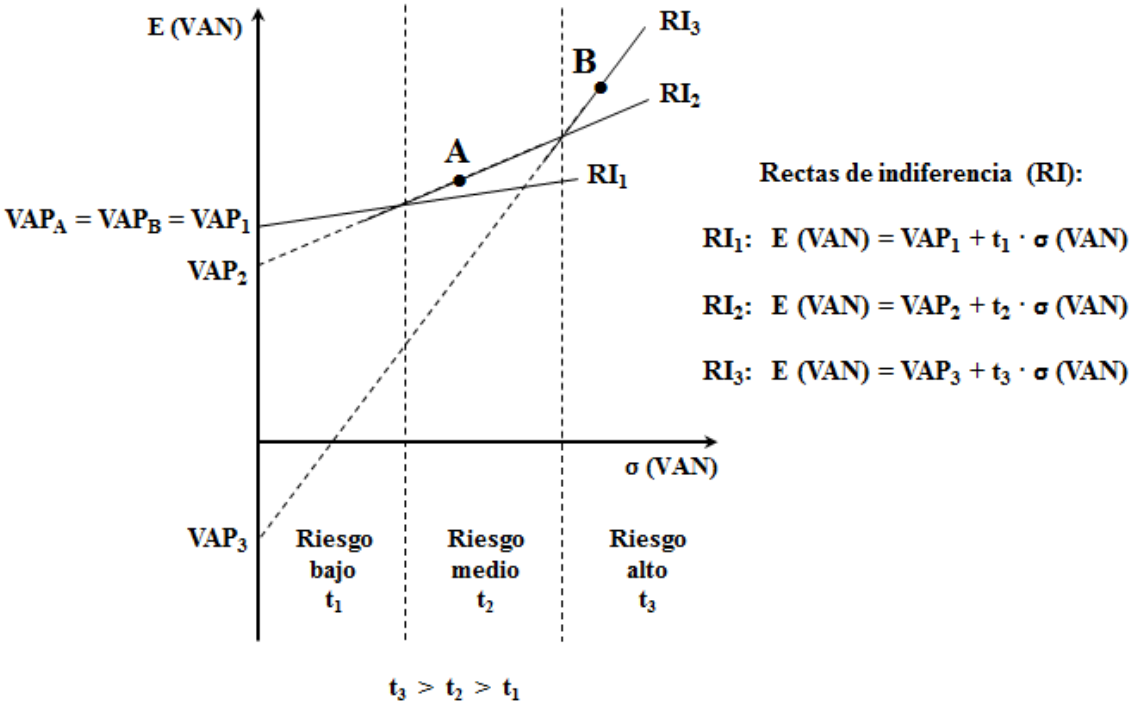


Figura 6

Bastaría para proceder de la manera indicada con definir un sencillo algoritmo que permita al decisor "ir saltando" de recta a recta cuando corresponda. Veámoslo con algún mayor nivel de detalle (para un mejor seguimiento, véase figura 7).

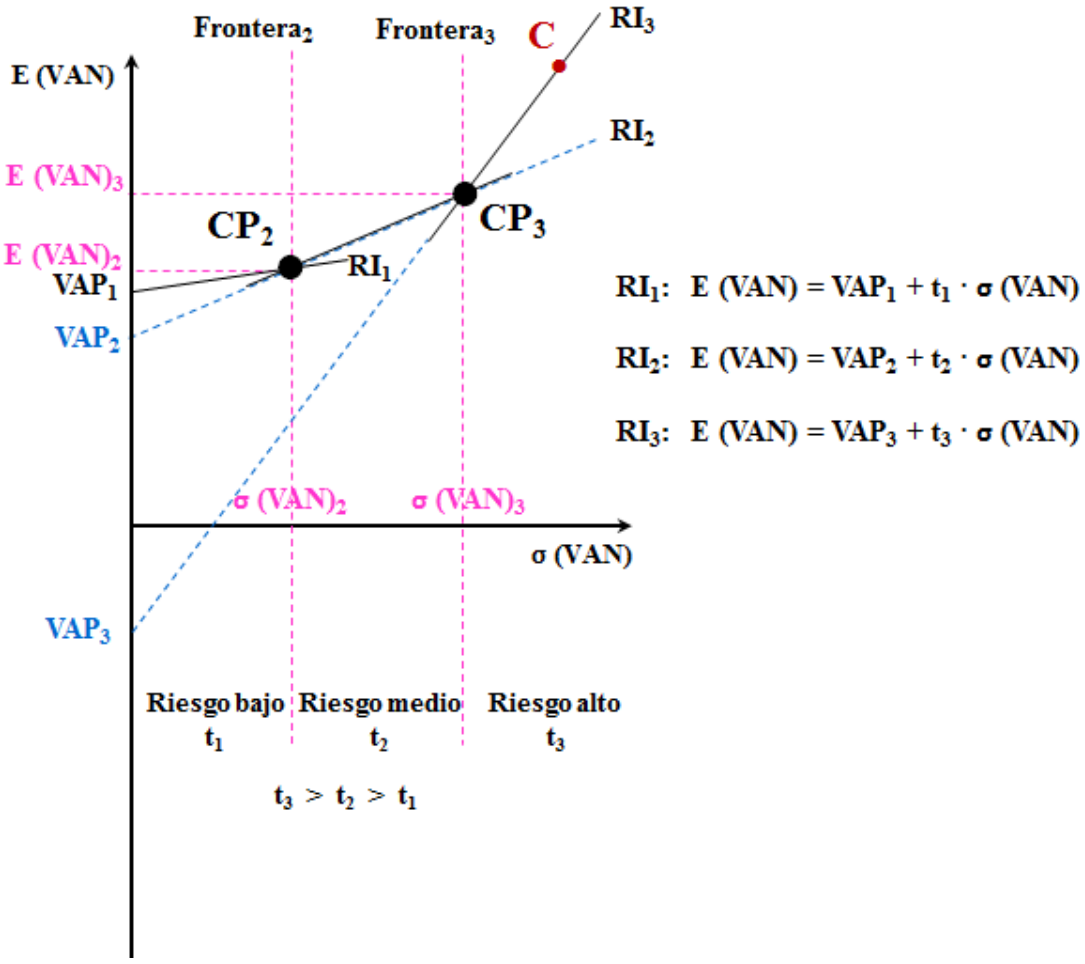


Figura 7

Llamemos "corner points" a los puntos de intersección de rectas de indiferencia con pendientes distintas que se corresponderían con el mismo nivel de utilidad. Dada la forma en que hemos dividido el mapa completo μ-σ de VAN, los corner points estarían situados en las rectas verticales que definen las distintas zonas de riesgo, y a las que llamaremos "fronteras". Este procedimiento presupone haber definido unos valores concretos para σ (VAN) que delimitan las tres zonas de riesgo (bajo, medio y alto), y que llamaremos $\sigma\ (VAN)_2$ y $\sigma\ (VAN)_3$. En consonancia, llamemos CP_2 y CP_3 a los corner points que nos interesan: los que se corresponden con la intersección de las rectas de indiferencia asociadas al proyecto estudiado. Puede verse todo ello en la figura aludida, en la que estudiamos el interés de un hipotético proyecto C.

El procedimiento es sencillo:

- El primer paso consiste en "situar al proyecto" en una zona de riesgo. Para ello, comparamos su desviación típica de VAN con las que delimitan las distintas zonas de riesgo. En nuestro caso, y tal como puede verse en el gráfico, el proyecto C es de "alto riesgo".

- El siguiente paso consiste en determinar en qué recta de indiferencia concreta de la zona 3 (alto riesgo) se sitúa el proyecto. Para ello, calculamos el VAP_3 (ordenada en el origen de la recta de indiferencia de pendiente t_3).

- Sustituyendo ahora el valor $\sigma\ (VAN)_3$ en la ecuación de la recta de indiferencia RI_3 que tiene como ordenada en el origen VAP_3 obtenemos el valor $E\ (VAN)_3$, es decir, el que corresponde al corner point CP_3. Podemos decir que un hipotético proyecto CP_3 sería indiferente al proyecto C original, por lo que seguimos trabajando con los valores de promedio y desviación que corresponden a dicho CP_3.

- Calculamos VAP_2, es decir, la ordenada en el origen de la recta de indiferencia de pendiente t_2 en la que se sitúa CP_3.

- Sustituimos el valor $\sigma\ (VAN)_2$ en la recta de indiferencia de pendiente t_2 que tiene como ordenada en el origen VAP_2 para así obtener $E\ (VAN)_2$, con lo que queda perfectamente definido CP_2, que resulta indiferente a CP_3 (y a C).

- Finalmente, calculamos VAP_1, la ordenada en el origen de la recta de pendiente t_1 en la que se sitúa CP_2. Si el valor obtenido es positivo, aceptamos el proyecto; y viceversa.

Como puede comprobarse, el procedimiento es sencillo, y permite superar el problema asociado a la asunción de rectas de indiferencia, manteniendo las ventajas de la penalización lineal (interpretación clara del significado del parámetro t, asociado al nivel de garantía exigido, en cada tramo en nuestro caso, al valor que se toma como referencia para valorar el proyecto). Sin embargo, el procedimiento descrito se encuentra con un nuevo problema: ¿cómo determinar los valores de σ (VAN) que delimitan las distintas "zonas de riesgo"? En el procedimiento propuesto se entiende implícitamente que un riesgo determinado tiene las mismas consecuencias (es igualmente valorado) con independencia del resultado esperado con el que se combine. Y razonando una vez más por reducción al absurdo, es fácil comprobar que no es lógico.

En la figura 8 se muestran las distribuciones de probabilidad (ambas normales) correspondientes a dos proyectos con idéntico riesgo medido con la desviación típica de VAN, pero con valores de VAN esperado completamente distintos (donde los VANes se han calculado al tipo de interés sin riesgo, k).

Como puede comprobarse, el valor garantizado como mínimo con un 84%, aproximadamente, es de 500.000 euros en el proyecto A y de -400.000 en el proyecto B. Y la probabilidad de obtener un VAN negativo es de un 2% en el primero, y de un 42% en el segundo. Supuesto que los dos son accesibles por la misma empresa, las consecuencias negativas que el proyecto tendría en su rentabilidad y solvencia en el caso de que "algo saliera mal" son radicalmente distintas en ambos casos, lo que parecería aconsejar aplicar niveles de exigencia distintos para cada uno (aunque con el procedimiento descrito hasta ahora quedarían clasificados en la misma zona de riesgo).

Lo anterior puede tenerse en cuenta de alguna manera si "barremos" el mapa μ-σ de VAN con rectas de pendiente positiva finita: las fronteras que delimitan las distintas "zonas de riesgo" no serían ahora rectas verticales, sino rectas con pendiente positiva finita, tal como puede verse en la figura 9.

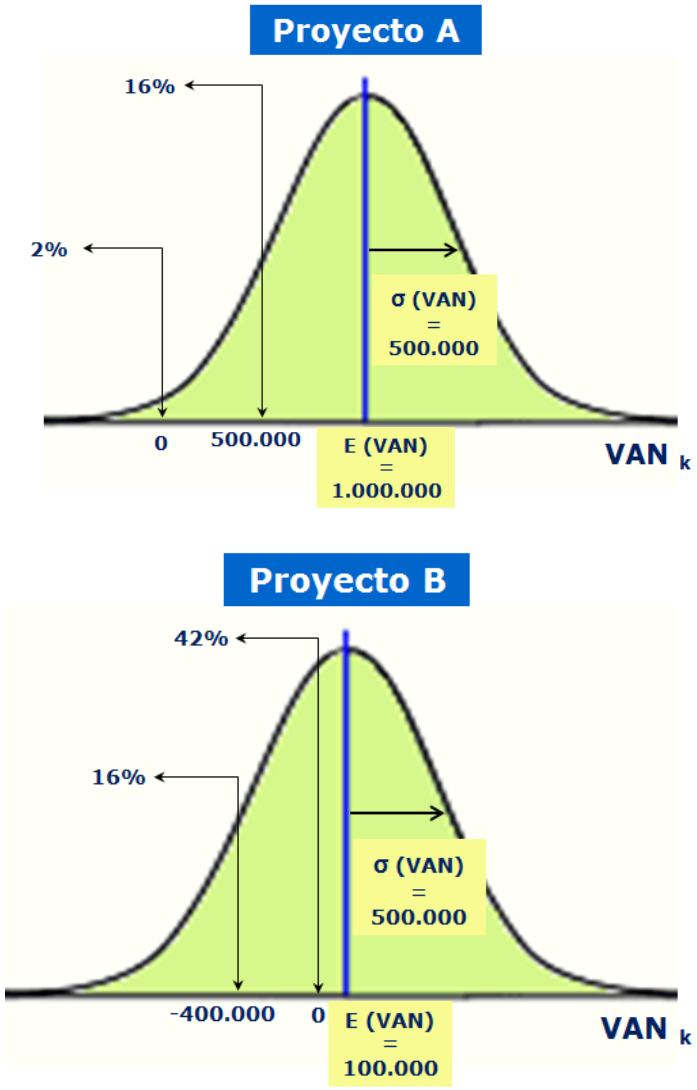


Figura 8

No se trata ahora de definir las zonas de riesgo en función de unos valores concretos de σ (VAN), que tienen el problema de causar efectos muy diferentes dependiendo del nivel de VAN esperado con el que se combinen. La pregunta inmediata es, ¿y cómo definir lo que hemos llamado "fronteras", que delimitan las tres zonas que estamos considerando (bajo, medio y alto riesgo)? Una posibilidad sería definiendo dichas zonas en función de las consecuencias negativas que el proyecto tendría en caso de que "algo no saliera bien". Veamos el proceso algo más despacio.

Supongamos que definimos las consecuencias negativas de un proyecto dentro de tres clases de riesgo:

- Zona 1 (riesgo bajo). Se sitúan aquí proyectos en los que la pérdida máxima supone, por ejemplo, un 5% del patrimonio de la compañía. Supongamos que consideramos este tipo de proyecto como "dentro de las operaciones normales de la empresa", es decir, como proyectos de alguna manera "repetitivos", en los que estaría justificado actuar con indiferencia ante el riesgo, ya que el promedio "se hace efectivo por repetición". Así

pues, en esta zona podría utilizarse un valor nulo para el parámetro de penalización ($t_1 = 0$).

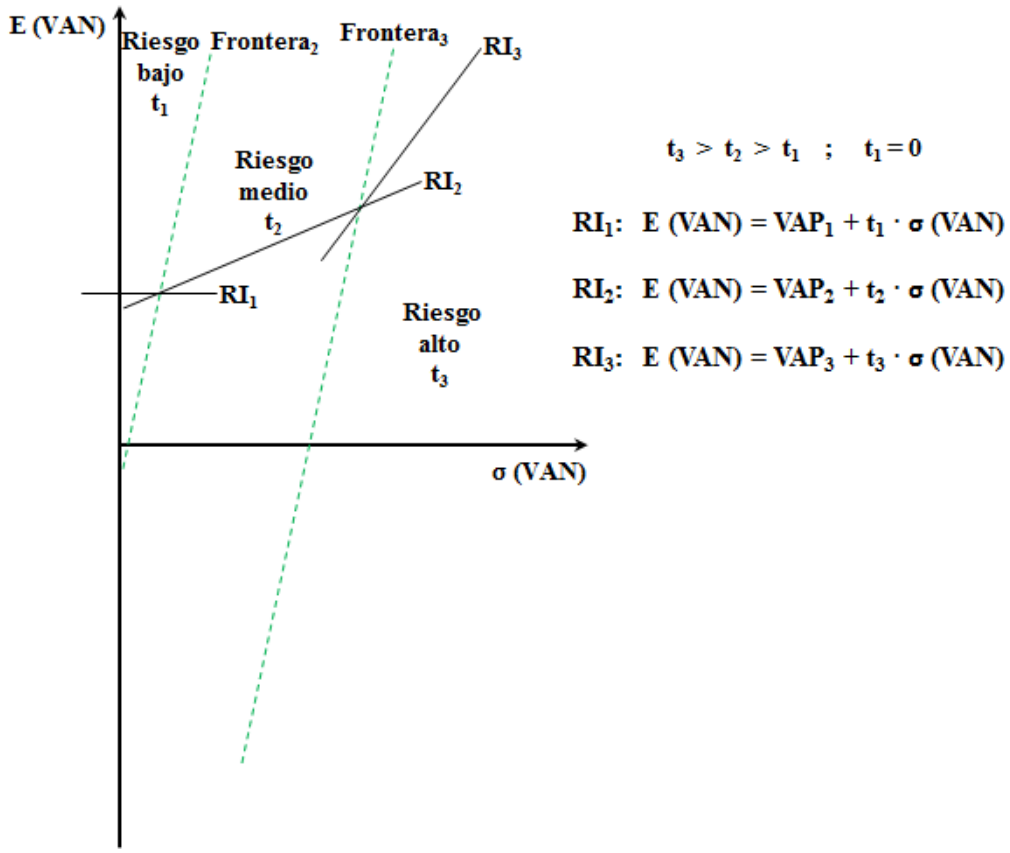


Figura 9

- Zona 2 (riesgo medio). Proyectos en los que puede perderse entre un 5% y un, pongamos, 40% del patrimonio neto. Se entiende que no se trata de proyectos repetitivos, pero tampoco comprometen la supervivencia de la empresa, no acercan a la compañía a una situación de suspensión de pagos o bancarrota en el caso de que no salgan de la manera apetecida. En esta zona podría mostrarse una aversión moderada al riesgo, que podría plasmarse en un valor $t_2 = 1$ (garantía exigida al valor de referencia de un 84%, aproximadamente).

- Zona 3 (riesgo alto). Se clasificarían aquí aquellos proyectos en los que puede perderse más de un 40% del patrimonio neto, lo que pondría a la empresa en una tesitura complicada. Supongamos (los valores considerados son matizables y dependen de cada situación y del criterio del analista) que entendemos que en tal caso la exigencia es alta, pongamos de un 98% de garantía ($t_3 = 2$).

El procedimiento descrito se encuentra nuevamente con un problema: en una distribución normal es teóricamente posible obtener cualquier valor entre $\pm\infty$. Sin embargo, podemos identificar como imposible aquello que tiene una probabilidad de ocurrencia suficientemente pequeña. Supongamos que consideramos como "imposible" aquello que sólo ocurre en un 0,5% de los casos (o menos): buscando dicha probabilidad en la distribución normal tipificada vemos que

valores que se alejan 2,58 desviaciones típicas o más del promedio son los que tienen una probabilidad de ocurrencia igual al 0,5% (véase la figura 10).

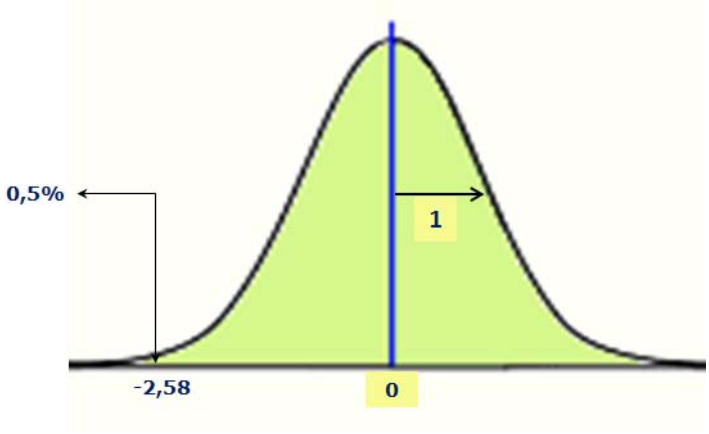


Figura 10

En estas condiciones, las zonas de riesgo vendrían definidas por rectas de pendiente t = 2,58, y cuya ordenada en el origen correspondería al máximo valor de pérdida considerado en cada caso. Para clasificar a los proyectos en la clase de riesgo que les corresponde bastaría con calcular la ordenada en el origen de la recta de pendiente 2,58 en la que el proyecto se sitúa y comparar dicho valor con los valores de pérdida máxima considerados para delimitar las áreas de riesgo. Y partiendo de lo anterior, el algoritmo sería el mismo que el definido anteriormente para el caso en el que fijábamos las zonas de riesgo mediante rectas verticales. Repitamos en cualquier caso el proceso completo, definiendo claramente la nomenclatura que utilizaremos. Para un seguimiento más claro, véase todo ello en la figura 11.

Definición de la nomenclatura a utilizar[7]:

Proyecto original "X": [E (VAN) , σ (VAN)]

Ecuación de las rectas que delimitan las zonas de riesgo (*fronteras*):

Frontera zonas 1 y 2:	F – 2:	$E\,(VAN) = PM_2 + t_{zona} \cdot \sigma\,(VAN)$
Frontera zonas 2 y 3:	F – 3:	$E\,(VAN) = PM_3 + t_{zona} \cdot \sigma\,(VAN)$

donde PM_i indica para cada frontera la "pérdida máxima"; y t_{zona} es el número de desviaciones máximo que puede alejarse un dato del promedio para considerarlo como "posible".

[7] A la hora de referirnos a las rectas implicadas utilizaremos indistintamente RI_j ó RI-j para las rectas de indiferencia; y F_k ó F-k para las fronteras que delimitan las diferentes zonas de riesgo; usaremos también de manera indistinta CP_t ó CP-t para los corner points.

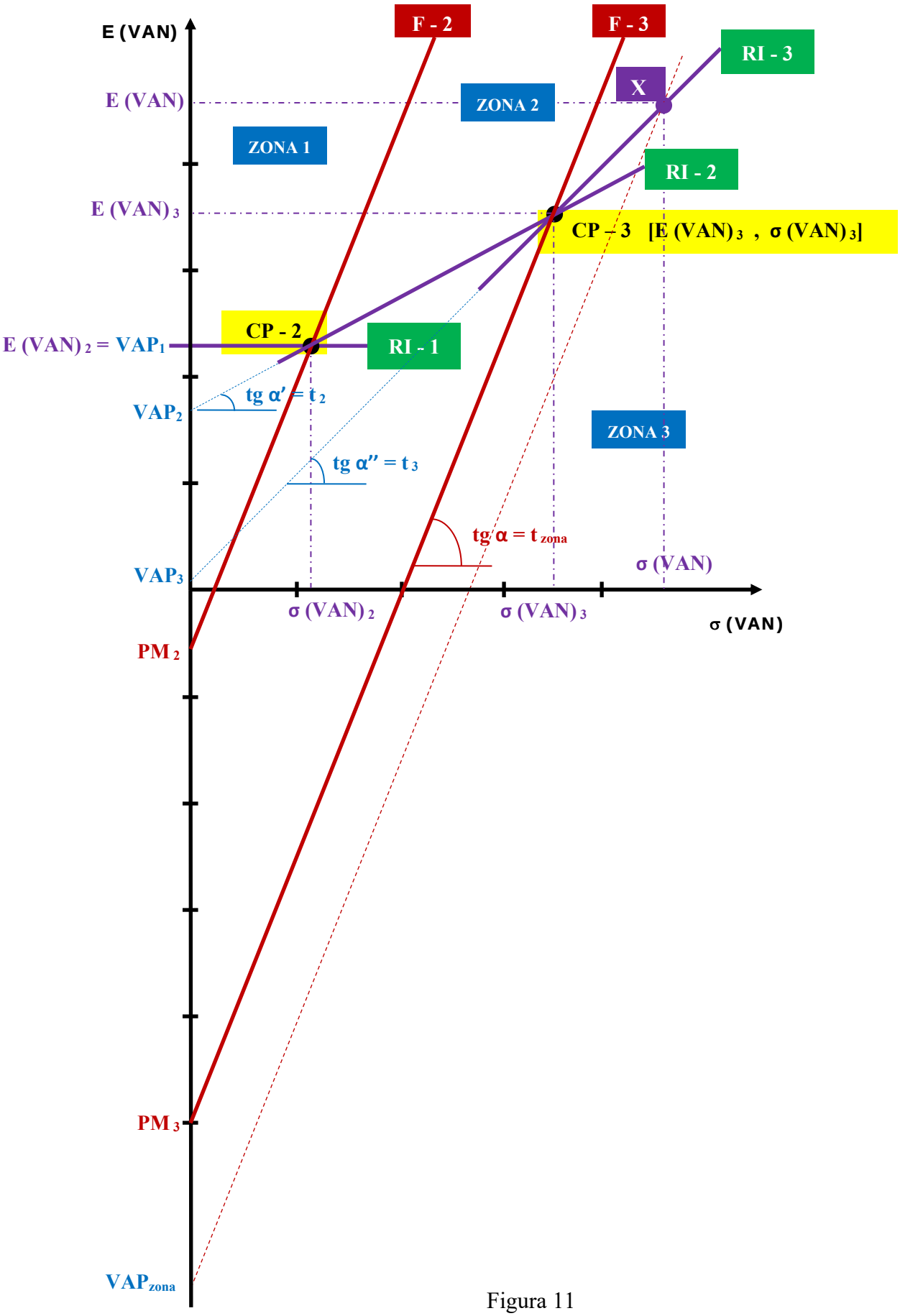

E (VAN)
F - 2
F - 3
RI - 3
X
E (VAN)
ZONA 2
ZONA 1
RI - 2
E (VAN) 3
CP – 3 [E (VAN) 3 , σ (VAN) 3]
CP - 2
RI - 1
E (VAN) 2 = VAP1
tg α' = t 2
VAP2
ZONA 3
tg α'' = t 3
tg α = t zona
σ (VAN)
VAP3
σ (VAN) 2
σ (VAN) 3
σ (VAN)
PM 2
PM 3
VAP zona

Figura 11

Ecuación de las *rectas de indiferencia* asociadas a cada zona:

Recta indiferencia zona 1 (riesgo bajo): RI – 1: $E(VAN) = VAP_1 + t_1 \cdot \sigma(VAN)$
Recta indiferencia zona 2 (riesgo medio): RI – 2: $E(VAN) = VAP_2 + t_2 \cdot \sigma(VAN)$
Recta indiferencia zona 3 (riesgo alto): RI – 3: $E(VAN) = VAP_3 + t_3 \cdot \sigma(VAN)$

donde lógicamente $t_3 > t_2 > t_1$ (de manera implícita, y aunque trabajemos con la nomenclatura general, supondremos en los gráficos los valores anteriormente propuestos, 2, 1 y 0, respectivamente).

Definición de los "*corner points*"[8]:

Corner point 3 (intersección F – 3 con RI – 3) $CP_3 = [E(VAN)_3 , \sigma(VAN)_3]$
Corner point 2 (intersección F – 2 con RI – 2) $CP_2 = [E(VAN)_2 , \sigma(VAN)_2]$

Definición del proceso:

Paso 1

¿En qué zona de riesgo se sitúa el proyecto?

Cálculo de VAP_{zona}: ordenada en el origen de la recta de pendiente t_{zona} en la que el proyecto original permite situarse.

$$VAP_{zona} = E(VAN) - t_{zona} \cdot \sigma(VAN)$$

Si $VAP_{zona} < PM_3$ → Proyecto de riesgo alto (zona 3) → Paso 2
Si $PM_3 < VAP_{zona} < PM_2$ → Proyecto de riesgo medio (zona 2) → Paso 4
Si $PM_2 < VAP_{zona}$ → Proyecto de riesgo bajo (zona 1) → Paso 6

Paso 2

Cálculo de VAP_3: ordenada en el origen de la recta de indiferencia RI_3 en la que el proyecto original permite situarse.

$$VAP_3 = E(VAN) - t_3 \cdot \sigma(VAN)$$

[8] Los "corner points" son a la vez intersección de rectas de indiferencia de distintas zonas de riesgo y de éstas con las fronteras correspondientes.

Paso 3

Búsqueda de CP_3: intersección de las rectas RI_3 (con ordenada = VAP_3) y F_3.

$$\text{RI} - 3: \quad E(VAN)_3 = VAP_3 + t_3 \cdot \sigma(VAN)_3$$
$$\text{F} - 3: \quad E(VAN)_3 = PM_3 + t_{zona} \cdot \sigma(VAN)_3$$

Despejamos $[E(VAN)_3 , \sigma(VAN)_3]$

Paso 4

Cálculo de VAP_2: ordenada en el origen de la recta de indiferencia RI_2 en la que el proyecto original (si venimos de paso 1) o el corner point 3 (si venimos de paso 3) permite situarse.

$$VAP_2 = E(VAN)_3 - t_2 \cdot \sigma(VAN)_3 \quad \text{(si venimos de paso 3)}$$
$$\text{ó}$$
$$VAP_2 = E(VAN) - t_2 \cdot \sigma(VAN) \quad \text{(si venimos de paso 1)}$$

Paso 5

Búsqueda de CP_2: intersección de las rectas RI_2 (con ordenada = VAP_2) y F_2.

$$\text{RI} - 2: \quad E(VAN)_2 = VAP_2 + t_2 \cdot \sigma(VAN)_2$$
$$\text{F} - 2: \quad E(VAN)_2 = PM_2 + t_{zona} \cdot \sigma(VAN)_2$$

Despejamos $[E(VAN)_2 , \sigma(VAN)_2]$

Paso 6

Cálculo de VAP_1: ordenada en el origen de la recta de indiferencia RI_1 en la que el proyecto original (si venimos de paso 1) o el corner point 2 (si venimos de paso 5) permite situarse.

$$VAP_1 = E(VAN)_2 - t_1 \cdot \sigma(VAN)_2 \quad \text{(si venimos de paso 5)}$$
$$\text{ó}$$
$$VAP_1 = E(VAN) - t_1 \cdot \sigma(VAN) \quad \text{(si venimos de paso 1)}$$

4. UN EJEMPLO NUMÉRICO COMPLETO

Supongamos una empresa que estudia el interés de un proyecto de inversión que exige un desembolso de 100.000 euros, y que ha determinado tres escenarios posibles (pesimista, normal y optimista) en cuanto al valor que pueden tomar los flujos de fondos asociados al mismo (cuya vida útil es en cualquier caso de tres años), a los que se ha asignado unas probabilidades de

ocurrencia del 30%, 40% y 30%, respectivamente. Se muestran los datos concretos en el cuadro 1.

Año/Escenario	**Pesimista**	**Normal**	**Optimista**
0	-100.000	-100.000	-100.000
1	24.000	30.000	36.000
2	32.000	40.000	48.000
3	40.000	50.000	60.000

Cuadro 1

La empresa en cuestión presenta un activo total de 524.800 euros; y su pasivo está compuesto por un patrimonio neto de 157.440 euros y una deuda de 367.360 euros. Se considera como "imposible" aquello que tiene una probabilidad de ocurrencia igual o menor al 0,5%; y se han delimitado las siguientes zonas de riesgo (cuadro 2).

Zona	Nivel de riesgo	pérdida máxima en % sobre fondos propios	pérdida máxima en euros
1	Operaciones normales	10%	15.744
2	Bajo	20%	31.488
3	Medio	30%	47.232
4	Alto	50%	78.720
5	Inasumible	>50%	-

Cuadro 2

La empresa valora el interés de las inversiones mediante un procedimiento de penalización lineal por tramos, exigiendo los siguientes niveles de garantía (cuadro 3).

Zona	Nivel de riesgo	Garantía exigida	Valor de t
1	Operaciones normales	50%	0,00
2	Bajo	75%	0,67
3	Medio	85%	1,04
4	Alto	98%	2,05
5	Inasumible	100%	-

Cuadro 3

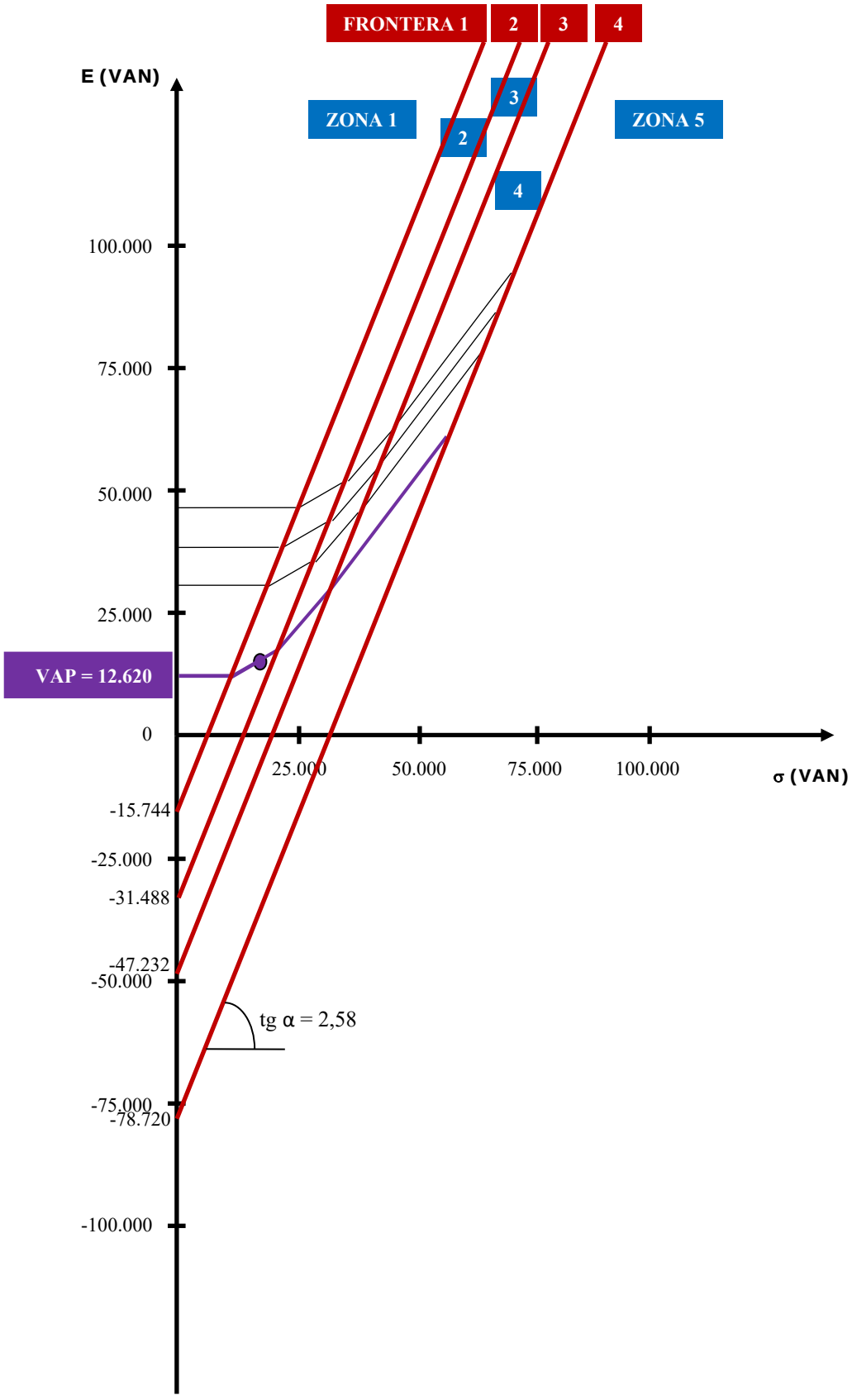

FRONTERA 1
2
3
4
E (VAN)
ZONA 1
ZONA 5
3
2
4
100.000
75.000
50.000
25.000
VAP = 12.620
0
25.000
50.000
75.000
100.000
σ (VAN)
-15.744
-25.000
-31.488
-47.232
-50.000
tg α = 2,58
-75.000
-78.720
-100.000

Figura 12

Sabemos también que el tipo de interés sin riesgo se ha estimado en un 1% anual[9].

El primer paso consiste en calcular los VANes posibles, utilizando el tipo de interés sin riesgo (es decir, suponiendo certeza en cada caso; véase cuadro 4).

Año/Escenario	Pesimista	Normal	Optimista
0	-100.000	-100.000	-100.000
1	24.000	30.000	36.000
2	32.000	40.000	48.000
3	40.000	50.000	60.000
VAN (k=1%)	-6.045	17.444	40.933

Cuadro 4

A continuación, calculamos la esperanza matemática y la desviación típica de VAN, teniendo en cuenta los valores posibles y las probabilidades de ocurrencia (cuadro 5)[10].

	Pesimista	Normal	Optimista
VAN (k=1%)	-6.045	17.444	40.933
Probabilidad	30%	40%	30%

$$E(VAN) = 17.444$$
$$\sigma(VAN) = 18.194$$

Cuadro 5

Presentamos las ecuaciones de las rectas que sirven para delimitar las distintas zonas de riesgo (las que hemos llamado anteriormente "fronteras"):

Frontera 1: $E(VAN) = -15.744 + 2{,}58\ \sigma(VAN)$
Frontera 2: $E(VAN) = -31.488 + 2{,}58\ \sigma(VAN)$
Frontera 3: $E(VAN) = -47.232 + 2{,}58\ \sigma(VAN)$
Frontera 4: $E(VAN) = -78.720 + 2{,}58\ \sigma(VAN)$

Explicitamos así mismo las ecuaciones de las rectas de indiferencia que se consideran en cada zona de riesgo:

Zona 1: RI_1 $E(VAN) = VAP_1 + 0 \times \sigma(VAN)$
Zona 2: RI_2 $E(VAN) = VAP_2 + 0{,}67 \times \sigma(VAN)$
Zona 3: RI_3 $E(VAN) = VAP_3 + 1{,}04 \times \sigma(VAN)$
Zona 4: RI_4 $E(VAN) = VAP_4 + 2{,}05 \times \sigma(VAN)$
Zona 5: - Proyecto rechazado

[9] Para un mejor seguimiento del proceso, véase figura 12.

[10] A pesar de que hemos "discretizado" los valores posibles de los flujos de fondos, y por tanto sus VANes, asumiremos que en realidad siguen una distribución normal.

Y comenzamos el proceso. El primer paso consiste en determinar en qué zona queda situado el proyecto, lo que exige calcular la pérdida máxima asociada al mismo (considerando como imposible aquello que sólo ocurre en un 0,5% de los casos o menos):

$$\text{Pérdida máxima} = E(VAN) - 2{,}58 \times \sigma(VAN) = 17.444 - 2{,}58 \times 18.194 = -29.497$$

El resultado obtenido sitúa al proyecto en la zona comprendida entre las fronteras 1 y 2 (es decir, es un proyecto considerado de bajo riesgo, ya que su pérdida máxima supondría un porcentaje menor del 20% del patrimonio neto). Por lo tanto, el proceso resultará relativamente corto, ya que sólo debemos buscar un corner point (el que resulta de la intersección de la recta de indiferencia en la que el proyecto permite situarse (zona 2) y la ecuación de la frontera 1:

$$VAP_2 = E(VAN) - 0{,}67 \times \sigma(VAN) = 17.444 - 0{,}67 \times 18.194 = 5.254{,}02$$

Buscamos el corner point:

RI Zona 2: $E(VAN) = 5.254{,}02 + 0{,}67 \times \sigma(VAN)$
Frontera 1: $E(VAN) = -15.744 + 2{,}58\ \sigma(VAN)$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$E(VAN) = 12.619{,}82$
$\sigma(VAN) = 10.993{,}73$

Y dado que la siguiente zona (la 1) presenta rectas de indiferencia con pendiente cero, el VAP finalmente obtenido coincide con E (VAN) en el corner point:

$$VAP = E(VAN) - 0{,}00 \times \sigma(VAN) = 12.619{,}82 - 0{,}00 \times 10.993{,}73 = 12.619{,}82$$

Así las cosas, el proyecto debería aceptarse.

Podemos ver cuál es la garantía implícita solicitada en este caso, para lo que calculamos la pendiente de la recta que une el VAP obtenido con el comportamiento original del proyecto (E (VAN) = 17.444; σ (VAN) = 18.194; véase figura 13, en la que se amplía la zona relevante de la figura 12):

$$\text{Pendiente} = \frac{17.444 - 12.620}{18.194} = 0{,}27$$

Buscando en tablas el valor obtenido vemos que la probabilidad de que un dato se aleje en una distribución normal 0,27 o más desviaciones típicas del promedio (por la izquierda) es de un 39%, aproximadamente, lo que supone que el valor de VAP obtenido es el VAN mínimo garantizado con una probabilidad del 61%, aproximadamente (recuérdese que se trata de un proyecto de riesgo bajo).

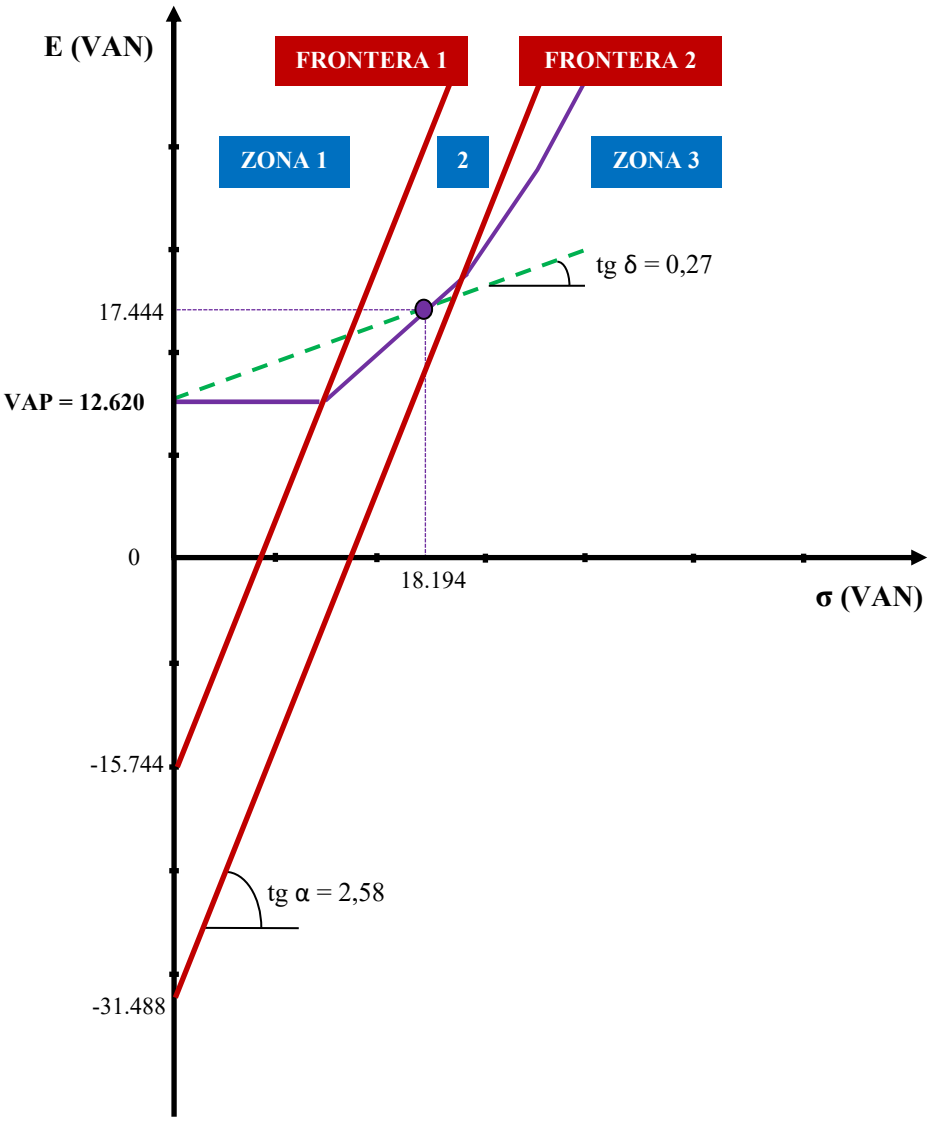


Figura 13

Por otra parte, podemos también en este caso analizar la tasa de descuento que habría que aplicar a los flujos esperados para alcanzar el mismo VAN ajustado por el riesgo (con el criterio del ajuste del tipo de descuento). Para ello, calculamos en primer lugar el perfil de fondos esperado (cuadro 6).

Probabilidad Año/Escenario	30% Pesimista	40% Normal	30% Optimista	E(TINV)[11]
0	-100.000	-100.000	-100.000	-100.000
1	24.000	30.000	36.000	30.000
2	32.000	40.000	48.000	40.000
3	40.000	50.000	60.000	50.000

Cuadro 6

[11] Esperanza de la tesorería de la inversión.

Y ahora despejamos la tasa de descuento (coste medio ponderado del pasivo, generalmente conocido con las siglas WACC, Weighted Average Cost of Capital) que conduce a un VAN = 12.620:

$$12.620 = -100.000 + \frac{30.000}{(1+\text{WACC})} + \frac{40.000}{(1+\text{WACC})^2} + \frac{50.000}{(1+\text{WACC})^3}$$

$$\text{WACC} \approx 2{,}99\%$$

Lo anterior supone una prima de riesgo muy baja (1,99%, aproximadamente), cuya lógica podríamos intentar conectar con el CAPM. Supongamos que conocemos el premio por riesgo esperado para el mercado (Premio = 4% anual). Según la ecuación fundamental del CAPM:

$$E(R_i) = R_0 + \text{Premio x } \beta_i$$

donde $E(R_i)$ es la rentabilidad a exigir al proyecto (el WACC en nuestro caso); R_0 es el tipo de interés sin riesgo; Premio es la diferencia entre la rentabilidad esperada para el conjunto del mercado y el tipo de interés sin riesgo; y β_i es la medida del riesgo relevante según el modelo (el conocido como riesgo sistemático o no diversificable). Sustituyendo y despejando en la ecuación anterior:

$$2{,}99\% = 1\% + 4\% \text{ x } \beta_i$$

$$\beta_i \approx 0{,}497$$

Valor que se corresponde con un riesgo bajo (en el lenguaje del CAPM estaríamos ante una inversión “defensiva”, que atenúa los cambios del mercado), lo que da coherencia al resultado obtenido. En cualquier caso, el razonamiento del CAPM, suponiendo que los inversores diversifican el riesgo diversificable y sólo se les retribuye por el riesgo sistemático asumido, tiene poco que ver con el planteamiento de este trabajo, en el que se asume que el riesgo es más o menos relevante según su impacto en la propia empresa.

5. CONCLUSIONES

El proceso de valoración de proyectos y empresas es siempre complicado, ya que requiere hacer algo que está fuera del radio de acción de la contabilidad financiera: mirar hacia el futuro con una intención distinta a la de aplicar el principio contable de prudencia (esa es al menos la lógica implícita en la técnica mejor desde el punto de vista teórico, el descuento de flujos de caja).

A la dificultad de estimar los impactos futuros del proyecto en la tesorería de la empresa o individuo (los conocidos habitualmente como “free cash-flows”) se añade la de estimar los parámetros necesarios para considerar el riesgo asociado a las decisiones, supuesto aceptada una

premisa fundamental de las Finanzas modernas, como es la hipótesis de aversión al riesgo. Los criterios clásicos exigen el cálculo de primas de riesgo (ajuste del tipo de descuento) o de coeficientes correctores que permitan sustituir en el proceso de valoración los flujos esperados por sus equivalentes ciertos (equivalente de certeza).

Frente a los criterios clásicos, proponíamos desde el Departamento de Finanzas de la Universidad Comercial de Deusto una tercera vía: la penalización directa del VAN esperado con su riesgo. Muchas son las formas de realizar esta penalización, de entre las cuales nos hemos decantado en trabajos anteriores por la penalización lineal, que supone restar al VAN esperado un determinado número (t) de desviaciones típicas. Supuesta normalidad del VAN, ello presenta la ventaja de que el parámetro es fácilmente interpretable, ya que, al fijarlo, determinamos el nivel de garantía que exigimos al valor obtenido. El problema que presenta esta aproximación radica en que asume implícitamente la existencia de rectas (en lugar de curvas) de indiferencia.

En este artículo se muestra cómo puede superarse el problema asociado a la penalización lineal, manteniendo sus ventajas. El sistema consiste en el diseño de un sencillo algoritmo que permite aplicar la lógica de la penalización lineal por tramos de riesgo. El criterio exige delimitar distintas zonas de riesgo (que pueden establecerse en función de las potenciales consecuencias negativas del proyecto en el caso de no funcionar de la manera deseada; proponiéndose un criterio sencillo y claro para hacerlo, relacionando dichas consecuencias con la situación de solvencia de la empresa) y establecer niveles de exigencia distintos para cada una de dichas zonas de riesgo.

El criterio resulta coherente con la hipótesis de aversión al riesgo y permite definir una medida de utilidad sencilla y evitar los problemas de estimación del tipo de descuento aplicable (ya que los cálculos necesarios deben realizarse utilizando siempre el tipo de interés sin riesgo).

Finalmente, en el artículo se propone un sencillísimo método para comprobar la coherencia de los resultados con los que se alcanzarían con los métodos tradicionales, ligando dichos resultados a la lógica del CAPM.

5. BIBLIOGRAFÍA

BREALEY, R.A., S.C. MYERS y F. ALLEN (2007): *Principles or corporate finance*, McGraw–Hill, New York, 9ª ed.

GOMEZ-BEZARES, F. (1984): "Algunos modelos básicos para la selección de inversiones con flujos relacionados", *XIV Congreso de la SEIO*, Caja de Ahorros de Granada, Granada, vol. 1, págs. 40-51.

GOMEZ-BEZARES, F. (1993): "Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions", en Aggarwal, ed., *Capital budgeting under uncertainty* (1993), Prentice - Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, págs. 91-102.

GÓMEZ-BEZARES, F. (2010): *Dirección financiera*, Desclée de Brouwer, Bilbao (4ª ed).

GÓMEZ-BEZARES, F. (2012): *Elementos de finanzas corporativas,* Desclée de Brouwer, Bilbao.

GOMEZ-BEZARES, F. y F.R. GOMEZ-BEZARES (2015): "Don't use quotients to calculate performance", *Cogent Economics & Finance*, 3: 1065584. http://dx.doi.org/10.1080/23322039.2015.1065584.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (1995): "VAN vs TRI: algunos ejemplos prácticos", *Harvard-Deusto Finanzas & Contabilidad*, 7, Septiembre-Octubre, págs. 48-58.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2001): "La decisión de inversión en entornos de riesgo", *Estudios Empresariales*, nº 107, Tercer Cuatrimestre, págs. 22-37.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2003): "Medidas de performance: algunos índices clásicos y relación de la TRIP con la Teoría de cartera", *Análisis Financiero Internacional*, 113, Tercer trimestre, págs. 5-19.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2004): "Performance ajustada al riesgo: índices clásicos y nuevas medidas", *Análisis Financiero*, 93, Primer Cuatrimestre, págs. 6-16.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA, J. SANTIBÁÑEZ y A. APRAIZ (2007a): "Índices de performance, gestión activa y eficiencia. Un análisis empírico", *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, vol. 16, nº 2, págs. 21-40.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA, J. SANTIBÁÑEZ y A. APRAIZ (2007b): "Índices de performance, gestión activa y eficiencia. Un análisis de sensitividad y del fenómeno de la persistencia", *Ekonomiaz*, nº 66, 3er Cuatrimestre, págs. 220-245.

HERTZ, D.B. (1964): "Risk analysis in capital investment", *Harvard Business Review*, Enero–Febrero, págs. 95–106. Existe traducción al castellano en *Harvard–Deusto*, 2, Bilbao, 1977.

HILLIER, F.S. (1963): "The derivation of probabilistic information for evaluation of risky investments", *Management Science*, 9, Abril, págs. 443–457.

LAKA, J.P. y J. SANTIBÁÑEZ (1995): "Algunas reflexiones sobre el Valor Actualizado Penalizado (VAP)", presentada en el *III Foro de Finanzas*, Universidad Comercial de Deusto, Bilbao, Noviembre-Diciembre. Publicada en Gómez-Bezares, F. y J.V. Ugarte, ed., *III Foro de Finanzas (1995)*, Bilbao, págs. 75-91.

LINTNER, J. (1965): "The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets", *Review of economics and statistics*, Febrero, vol. 47, nº 1, págs. 13-37.

MARKOWITZ, H. (1952): "Portfolio selection", *Journal of finance*, Marzo, págs. 77-91.

MARKOWITZ, H. (1959): *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*, Wiley, Nueva York.

SANTIBÁÑEZ, J. (1995): "El tratamiento del riesgo en la decisión de inversión: VAP y distribuciones no conocidas", *Boletín de Estudios Económicos*, 154, Abril, págs. 119-140.

SANTIBÁÑEZ, J. (2018): "Coste de los fondos aplicable a proyectos de inversión: una aproximación a través del VAP", *Boletín de Estudios Económicos*, 223, Abril, págs. 133-159.

SHARPE, W.F. (1964): "Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk", *Journal of finance*, Septiembre, vol. 19, nº 3, págs. 425-442.

SHARPE, W.F. (1970): *Portfolio theory and capital markets*, McGraw–Hill, Nueva York.

ESTRUCTURA FINANCIERA Y CREACIÓN DE VALOR: UNA APROXIMACIÓN A TRAVÉS DE LA TRIP

Javier Santibáñez, Leyre Goitia-Berriozabal y José Antonio Madariaga*
Publicado en *Boletín de Estudios Económicos*, nº 229, Abril, 2020, págs. 143-170

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este artículo es el de ayudar al gestor financiero a conocer y valorar las consecuencias de la decisión de un mayor apalancamiento financiero en el binomio "rentabilidad esperada-riesgo" del accionista, tratando de ponerle en una mejor disposición a la hora de decidir si ese mayor endeudamiento crea o no valor.

Lógicamente, la decisión de un mayor endeudamiento solo creará valor en el caso de que el aumento de rentabilidad esperada sea más que suficiente para compensar el aumento de riesgo que supone para el accionista.

Desde un punto de vista teórico, y si atendemos a las ideas de Modigliani y Miller (1958), la decisión relativa a la estructura financiera sería irrelevante en mercados perfectos. Y solo serían las imperfecciones de mercado las que darían relevancia a dicha decisión; así, un trato fiscal imperfecto y discriminatorio podría provocar un interés por el endeudamiento (Modigliani y Miller, 1963); que tendría un límite en lo que se conoce como la aparición de los costes de bancarrota. Si aceptamos esta lógica, nos encontraríamos en una situación similar a la que proponía hace tiempo la conocida como "postura tradicional", en la medida en que habría un máximo valor posible para un mismo activo, que se correspondería con aquella estructura financiera que permitiera aprovechar la ventaja fiscal asociada al endeudamiento (cuando el sistema fiscal no es neutral), evitando que el mercado vea más grave la posibilidad de bancarrota cuando esos costes sean mayores que las ventajas fiscales citadas. En cualquier caso, el estudio de la estructura financiera adecuada se circunscribiría al análisis de las consecuencias de las imperfecciones de mercado apuntadas (Gómez-Bezares, 2012; Gómez-Bezares y Santibáñez, 2011).

El razonamiento de Modigliani y Miller es perfectamente compatible con la lógica de otro elemento emblemático de las finanzas modernas: el Modelo de valoración de activos de capital, más conocido por sus siglas en inglés CAPM (Capital Asset Pricing Model[1]). De hecho, la formulación habitualmente utilizada en el cálculo del coste de los fondos a partir del apalancamiento de betas está en esa línea (la conocida fórmula de Hamada[2] se deriva de la

* Queremos agradecer al profesor Fernando Gómez-Bezares, compañero y amigo, sus interesantes sugerencias al texto original. Los errores, en todo caso, son responsabilidad exclusiva de los autores.

[1] Sharpe (1964 y 1970).

[2] Hamada (1969).

conjunción de los planteamientos propuestos por ambos modelos, asumiendo la hipótesis de existencia –solo– de un impuesto de sociedades que trata mejor a la deuda que a los fondos propios, y que da lugar a una ventaja para el endeudamiento[3]).

Como es sabido, el CAPM indica cuál debería ser la rentabilidad a exigir a una inversión en función de su riesgo relevante que, en el contexto del modelo, sería únicamente el sistemático. Así, el modelo exige calcular cuál es la cantidad de riesgo sistemático (la conocida beta), lo que permite, mediante la fórmula de la Línea del Mercado de Títulos (SML en inglés), obtener la rentabilidad que la inversión debería proporcionar: inversiones con rendimiento superior serían interesantes (crean valor); y viceversa.

Muchas son las hipótesis en las que se apoya el modelo, unas más fáciles de aceptar y otras que podrían plantear alguna mayor dificultad[4]. En cualquier caso, el modelo plantea diversos problemas: las herramientas de las que disponemos para hacer los cálculos y estimaciones necesarias para aplicarlo en la realidad tienen una escasa precisión y tampoco la robustez del modelo está del todo clara. No disponemos de una metodología ideal para calcular la beta, ni tenemos garantías de que se mantenga estable en el tiempo. Tampoco nuestras estimaciones del tipo de interés sin riesgo y del premio por riesgo que el mercado dará en el futuro son incuestionables. Por otro lado, el modelo se asienta sobre la idea de que el aportante de los fondos puede evitar todo el riesgo eliminable por diversificación, lo que no siempre es cierto, y en cualquier caso plantea problemas al aplicarlo a empresas pequeñas.

En definitiva, el CAPM plantea sin duda ideas y reflexiones extraordinariamente interesantes y con consecuencias directas en la gestión empresarial, pero no es “la verdad absoluta”. En cuanto a las ideas de Modigliani y Miller, nos encontramos también ante un planteamiento intelectualmente difícil de discutir en abstracto, pero el mundo real no se comporta en muchos aspectos según lo propuesto en ese razonamiento ideal. Nuevamente, no se trata de tirar a la papelera sus conclusiones (sería una necedad desde todo punto de vista; por reducción al absurdo, en la medida que ambos son Premios Nobel de Economía; y porque cuando se piensa en sus ideas es fácil colegir que son puro sentido común financiero), pero lo cierto es que si tratamos de convencer a los profesionales que trabajan en el mundo real de la idea de que “la financiación no importa” corremos el riesgo de que la conversación termine de inmediato (y tal vez de manera abrupta).

Pero vayamos más allá (o tal vez más acá, en la medida en que hay hipótesis implícitas en todo lo anterior que tal vez convenga explicitar). El CAPM se apoya en la Teoría de cartera de Markowitz (1952 y 1959), que da lugar a la conocida como “frontera eficiente”: el modelo se basa en la idea de que, supuesta la hipótesis de mercados eficientes, en los que la información es pública y disponible para todos los agentes (que la interpretan de la misma forma), somos capaces de calcular el “mapa de oportunidades posibles” (combinaciones de rentabilidad y riesgo alcanzables en un determinado momento a partir de los títulos disponibles); y sobre la base de dicho mapa, el individuo solo tendrá en cuenta algunas de las carteras posibles (las que se encuentran en la mencionada frontera eficiente, es decir, aquellas que “baten” a las demás, al

[3] Aunque cabe hacer muchas matizaciones a este procedimiento, tal como puede comprobarse en Santibáñez, Alcañiz y Gómez-Bezares (2014a, 2014b y 2015).

[4] Aunque no parece lógico criticar un modelo en función del grado de cumplimiento de sus hipótesis de partida (siempre supuesto que no son absurdas), sino más bien en función de su capacidad explicativa de la realidad (tal como se deriva de los trabajos de Karl Popper, que defiende que la calidad científica de un modelo depende de las posibilidades que tenga de ser falsado).

permitir alcanzar la máxima rentabilidad esperada para cada nivel de riesgo y el mínimo riesgo posible para cada rendimiento esperado). Todo ello exige una buena cantidad de estimaciones discutibles (y más teniendo en cuenta que la información de la que disponemos, en el mejor de los casos, es histórica; y la utilizamos para referirnos al futuro), entre ellas las que tienen que ver con el grado de aversión al riesgo del decisor (lo que constituye una auténtica pesadilla para la legislación que viene desarrollándose en los últimos tiempos con relación a la información que debe conocer el potencial inversor, el proceso que debe seguirse para garantizar que es consciente de las consecuencias de sus decisiones, así como la propia formación que debe tener el gestor de sus fondos[5]).

Vaya pues por delante nuestro respeto a las ideas de autores, en nuestra opinión auténticamente geniales, por proponer líneas de razonamiento sumamente interesantes; pero tengamos también en cuenta que la realidad es siempre más compleja de lo que podemos representar en nuestros modelos, y que dada la escasa calidad de la información con la que contamos y nuestra limitada capacidad para hacer estimaciones sobre rentabilidades futuras o de elementos como el grado de aversión al riesgo al que aludíamos anteriormente, parece razonable plantear también modelos que tal vez puedan "chocar" en algunos puntos con la aceptación "a ultranza" de los mencionados planteamientos. Se trata de proporcionar herramientas que vayan en la línea de "ayudar" a tomar decisiones, que hagan consciente al gestor de las potenciales consecuencias de dichas decisiones, y que le permitan estar en una mejor posición para elegir aquellas opciones que creen valor.

Insistimos en la idea que defendemos: si aceptamos al pie de la letra las proposiciones de estos dos premios Nobel en Economía (Modigliani y Miller), no tendría sentido perder el tiempo pensando en si la decisión de estructura financiera crea o no valor: en mercados perfectos no lo haría; y en mercados reales la reflexión parecería ir en la línea de tratar de aprovechar las ventajas fiscales y evitar la posibilidad de bancarrota. Pero dadas las condiciones reales en cuanto a información, transparencia de los mercados, grado de conocimiento de los agentes de muchas de las variables (incluida su propia aversión al riesgo), puede resultar de interés explicitar las consecuencias de las decisiones (incluida la relativa al endeudamiento) para ayudar al decisor a valorar la conveniencia de endeudarse más o menos. Dicho de otra manera: en la medida en que los mercados se perfeccionan, la decisión de financiación pierde importancia con relación a la de inversión (siempre en cuanto a su contribución al objetivo financiero, crear valor); pero mientras no se den las condiciones de dichos mercados perfectos no podemos dedicar nuestro tiempo únicamente a la decisión de inversión[6].

2. EL CONCEPTO DE APALANCAMIENTO

Es fácil encontrar en cualquier libro de finanzas el concepto de apalancamiento. En Física, el concepto de palanca tiene que ver con la posibilidad de aprovechar el intelecto para conseguir, con un esfuerzo "razonable", cosas que a primera vista podrían parecer imposibles.

[5] Cfr. MIFID, en sus distintas ediciones.

[6] En todo este apartado, y en el resto del artículo, partimos de una hipótesis de racionalidad de los agentes que operan en los mercados. Sin embargo, no siempre se observa dicha racionalidad y, de hecho, una línea importante que ha venido desarrollándose en Finanzas en los últimos años tiene que ver con este tema: es lo que se conoce como "behavioral finance" (véase, por ejemplo, Przychodzen, Gómez-Bezares, Przychodzen y Larreina, 2016; o Gómez-Bezares y Przychodzen, 2018).

Efectivamente, una persona con una fuerza "normal" sería incapaz de mover una piedra de 200 kilos. Sin embargo, si se dan las condiciones adecuadas, es posible que "haciendo palanca" pueda llegar a mover la mencionada piedra realizando un esfuerzo mucho menor. En Economía hablamos en muchas ocasiones de "efectos multiplicadores" que tendrían también que ver con este concepto.

También en Filosofía hay referencias a este mecanismo. Un ejemplo sería la conocida "plusvalía" de Marx, según la cual el propietario de los medios de producción se enriquece (injustamente), aprovechándose de que dicha propiedad le permite "apropiarse" de una parte del valor creado por otro interviniente necesario en el proceso de producción, el trabajador; lo que da como resultado un "apalancamiento" de la riqueza del empresario.

En el contexto financiero puede hablarse de distintos "apalancamientos". Fernando Gómez-Bezares (2012) habla del apalancamiento operativo y el apalancamiento financiero.

Siguiendo a este autor, el apalancamiento operativo se manifiesta en una fórmula sencilla, que en realidad está implícita en la propia definición del beneficio (antes de intereses e impuestos; en la medida en que el respeto a las ideas de Modigliani y Miller aconseja separar el análisis del activo del correspondiente al pasivo[7]):

$$BAII = (V - VPM) \cdot MBP \tag{1}$$

donde BAII es el beneficio antes de intereses e impuestos; V representa las ventas realizadas; VPM son las ventas de punto muerto (las que permiten cubrir los costes operativos, fijos y variables) y MBP es el margen bruto por euro vendido (lo que un euro de ventas deja como margen para la empresa después de cubrir solo su coste variable). Es fácil deducir de lo anterior que un aumento del MBP (supuestos dados los costes fijos a cubrir) tendría dos efectos: para el mismo nivel de ventas, permitiría aumentar el beneficio; y simultáneamente, las ventas de punto muerto serían menores, haría faltar vender menos para cubrir los mismos costes[8]; lo que a su vez volvería a redundar en un mayor beneficio. En otras palabras, un aumento del MBP "apalancaría el beneficio" (y, por tanto, la rentabilidad de la inversión realizada; rentabilidad "operativa", es decir, no influida por la forma en que se financie la empresa, rentabilidad "previa" a la decisión de endeudamiento).

El mismo autor propone también una explicación sencilla e interesante de otro apalancamiento: el financiero, que se deduce fácilmente de la propia definición de beneficio neto (supuesto definidos también una serie de ratios particularmente relevantes). Veámoslo.

Podemos definir el beneficio neto de la siguiente forma:

$$BN = (V - C - AM - I - IS) = (V - C - AM - I) \cdot (1-t) \tag{2}$$

[7] Véase nuevamente que nuestro respeto por la lógica de las ideas de los autores señalados en la introducción es total. Sus ideas influyen en nuestros razonamientos, y de manera poderosa, aunque ello no suponga que cualquier planteamiento que no respete al 100% las hipótesis de partida o las conclusiones que se derivan de ellas sea automáticamente descartable.

[8] Los costes fijos se podrían cubrir con unas menores ventas al aumentar el margen por euro vendido.

donde V son las ventas realizadas; C hace referencia a los costes operativos (los que no son financieros) con desembolso; AM es la amortización (que en general incluiría cualquier coste operativo sin desembolso); I son los intereses pagados por la utilización de deuda con coste explícito; e IS es el impuesto sobre beneficios, que resulta de aplicar el tipo impositivo (t) a la base imponible. Supondremos en todo el desarrollo que no hay resultados de operaciones no recurrentes.

Sobre la base de lo anterior podemos definir algunos ratios especialmente relevantes: hablaremos de "rendimiento operativo" para referirnos a lo que un euro invertido en el activo rinde con independencia de su procedencia (es decir, de si ha sido aportado por los accionistas o por los prestamistas); definiremos un ratio de coste de la financiación ajena, que indica lo que, en términos incrementales, cuesta utilizar un euro de deuda (considerando que el pago de intereses conlleva también el ahorro fiscal correspondiente); plantearemos un ratio de rentabilidad (contable) del accionista que indica lo que cada euro de financiación propia obtiene en la empresa; finalmente, definiremos un ratio de estructura financiera, que "habla" de las proporciones utilizadas por la empresa en la financiación de las actividades. Y realizaremos todo el análisis desde una perspectiva de largo plazo, centrándonos en las inversiones permanentes (activo fijo + fondo de maniobra, AF+FM) y en los capitales permanentes (fondos ajenos a largo plazo y fondos propios, FALP+FP).

Rendimiento operativo $$r = \frac{BAIdI}{AF + FM} = \frac{(V - CV - CF - AM)\cdot(1 - t)}{AF + FM} \quad (3)$$

donde a la nomenclatura anterior hay que añadir BAIdI, que es el Beneficio antes de intereses y después de impuestos (BAIdI = BAII · (1–t); es decir, el beneficio neto si no hubiera deuda); y CV y CF que son los costes operativos con desembolso variables y fijos, respectivamente.

Rendimiento financiero $$e = \frac{BN}{FP} = \frac{(V - CV - CF - AM - I)\cdot(1 - t)}{FP} = \frac{BAII\cdot(1 - t) - I\cdot(1 - t)}{FP} \quad (4)$$

Coste de la financiación ajena a largo plazo $$i = \frac{I\cdot(1 - t)}{FALP} \quad (5)$$

Ratio de endeudamiento $$E = \frac{FALP}{FP} \quad (6)$$

A partir de las definiciones anteriores es fácil llegar a la fórmula del apalancamiento financiero propuesta por el autor. Así, la rentabilidad del accionista puede descomponerse en dos elementos: la que se obtendría en ausencia de endeudamiento (el rendimiento operativo); y la aportación del citado endeudamiento (supuesto r>i, el accionista ve apalancada su rentabilidad como consecuencia de la "apropiación" del diferencial correspondiente entre lo que renta un euro invertido en el activo, y lo que cuesta si procede de financiación ajena):

Rendimiento financiero $$e = \frac{BN}{FP} = r + (r - i)\cdot\frac{FALP}{FP} \quad (7)$$

Así pues, pueden mostrarse gráficamente los dos conceptos señalados (figura 1). Como puede comprobarse fácilmente, en ambos gráficos puede hablarse del concepto de apalancamiento: en el izquierdo (apalancamiento operativo), supuesto unos costes fijos dados, un aumento del margen bruto por euro vendido (pendiente de la recta que relaciona BAII con las ventas) permite conseguir un "apalancamiento" del beneficio (y, por tanto, de la rentabilidad, del rendimiento operativo resultante), tal como puede verse al pasar de la situación "MBP bajo" a "MBP alto". En el gráfico derecho de la misma figura (apalancamiento financiero) se muestra la aportación del endeudamiento a la rentabilidad del accionista: en este caso, el punto de palanca es el coste de la financiación ajena, sobre el que bascula la recta que toma una mayor pendiente cuanto mayor sea el endeudamiento (apalancando así la rentabilidad del accionista, así como su riesgo).

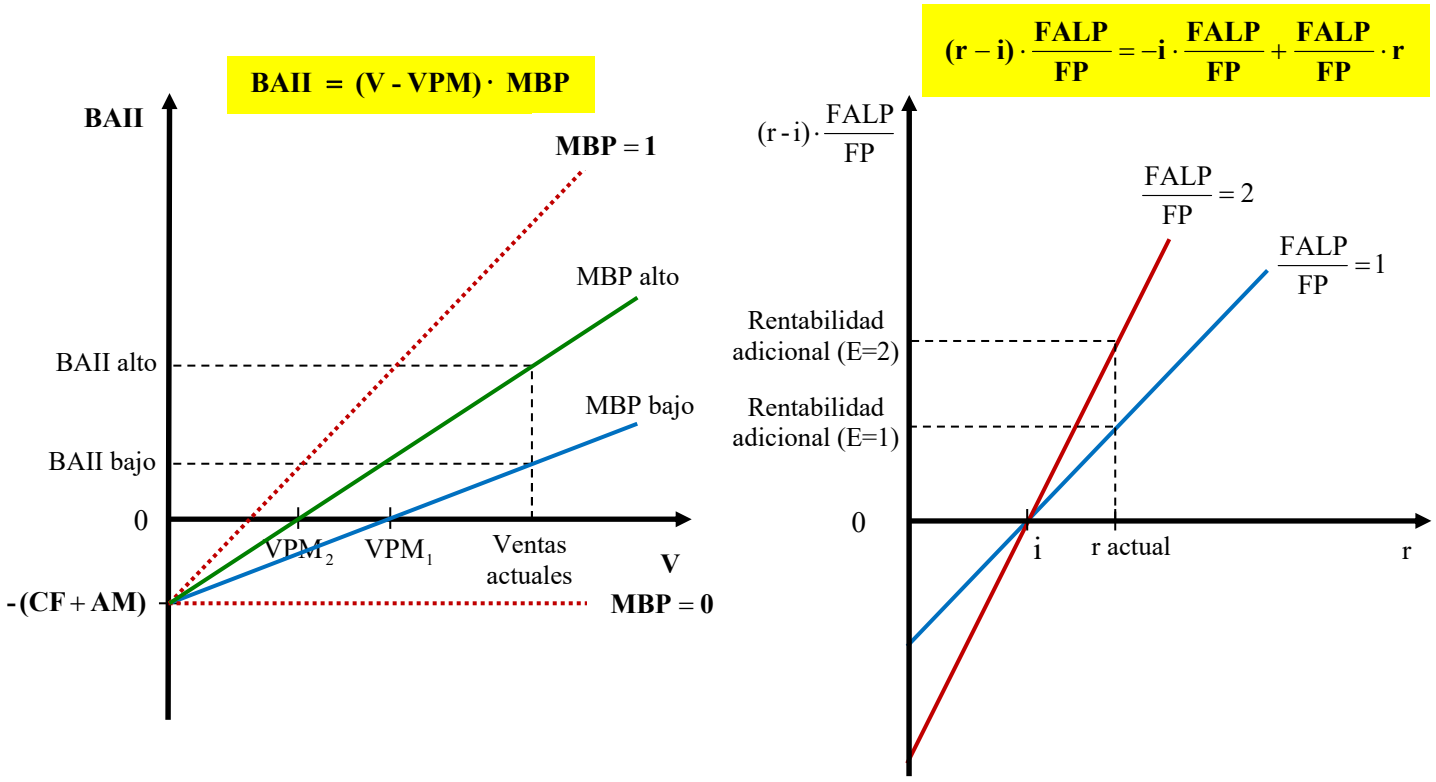


Figura 1 (apalancamiento operativo y apalancamiento financiero)

3. UNA VISIÓN INTEGRADA DEL APALANCAMIENTO OPERATIVO Y EL APALANCAMIENTO FINANCIERO

En este punto analizaremos la rentabilidad del accionista y su relación con el rendimiento operativo. De alguna manera, se trata de estudiar nuevamente las consecuencias de un mayor o menor endeudamiento, por lo que presentaremos también ese "efecto palanca", aunque desde una perspectiva algo diferente (con ventajas e inconvenientes con respecto a la anterior).

El punto de partida es la misma ecuación propuesta en el punto anterior, en la que descomponíamos la rentabilidad del accionista en dos elementos: el rendimiento operativo (que

se corresponde exclusivamente con un comportamiento dado del activo) y el "apalancamiento financiero" (elemento que combina el desempeño del activo, el coste de la deuda y el nivel de endeudamiento que se decida para la empresa):

$$e = \frac{BN}{FP} = r + (r - i) \cdot \frac{FALP}{FP} \tag{7}$$

Operando, podemos expresar la misma fórmula de otra manera:

$$e = r + (r - i) \cdot \frac{FALP}{FP} = r \cdot \left(1 + \frac{FALP}{FP}\right) - i \cdot \frac{FALP}{FP} \tag{8}$$

Que, como puede verse, es la ecuación de una recta en el mapa que relaciona la rentabilidad del accionista (e) con el rendimiento operativo (r): la ordenada en el origen sería $-i \cdot (FALP/FP)$; y la pendiente viene dada por el término (1+FALP/FP). Por otro lado, puede también calcularse fácilmente el punto de corte con el eje horizontal: supuesto un valor positivo de endeudamiento (en caso contrario la recta sería la bisectriz del primer cuadrante, es decir, el rendimiento financiero coincidiría con el rendimiento operativo y pasaría por el origen de coordenadas), dicho punto de corte se calcularía buscando el valor de r que hace que el rendimiento financiero sea nulo:

$$e = r \cdot \left(1 + \frac{FALP}{FP}\right) - i \cdot \frac{FALP}{FP} = 0 \tag{9}$$

$$r \cdot \left(1 + \frac{FALP}{FP}\right) = i \cdot \frac{FALP}{FP}$$

$$r = \frac{i \cdot \frac{FALP}{FP}}{1 + \frac{FALP}{FP}} = \frac{\frac{i \cdot FALP}{FP}}{\frac{FALP + FP}{FP}} = i \cdot \frac{FALP}{FALP + FP} \tag{10}$$

Podemos representar gráficamente la relación entre el rendimiento financiero y el operativo (figura 2). Una visión rápida del gráfico propuesto permite constatar que, como es obvio, en ausencia de endeudamiento, el rendimiento financiero coincide con el operativo, por lo que la recta que relaciona ambos conceptos es la bisectriz del primer y tercer cuadrantes (es decir, la recta de 45 grados que pasa por el origen de coordenadas).

Si consideramos ahora la posibilidad de que la empresa se endeude, y supuesto un determinado coste de la deuda, la recta basculará sobre el punto que representa el mencionado coste de la deuda, tomando una pendiente superior a 1 en el momento en que haya algún endeudamiento; pudiendo por tanto hablarse de "apalancamiento de la rentabilidad del accionista", que actúa en sentido positivo (si r se sitúa por encima de i) y viceversa. Así pues, la rentabilidad del accionista es tanto más alta cuanto mayor sea el endeudamiento si $r>i$; pero es menor a más endeudamiento si finalmente $r<i$. Lo anterior significa que el endeudamiento lleva aparejado, como también es lógico a priori, un mayor riesgo para el accionista (de hecho, solo tiene sentido suponer que i se

mantiene constante si asumimos deuda garantizada, es decir, si suponemos que r no puede tomar un valor que ponga en riesgo el cumplimiento del servicio de la deuda; en caso de que ese riesgo existiera, el punto sobre el que basculan las rectas se desplazaría hacia la derecha y hacia arriba en el gráfico propuesto; pero, en aras de una mayor simplicidad en los razonamientos, no consideraremos por el momento esta posibilidad).

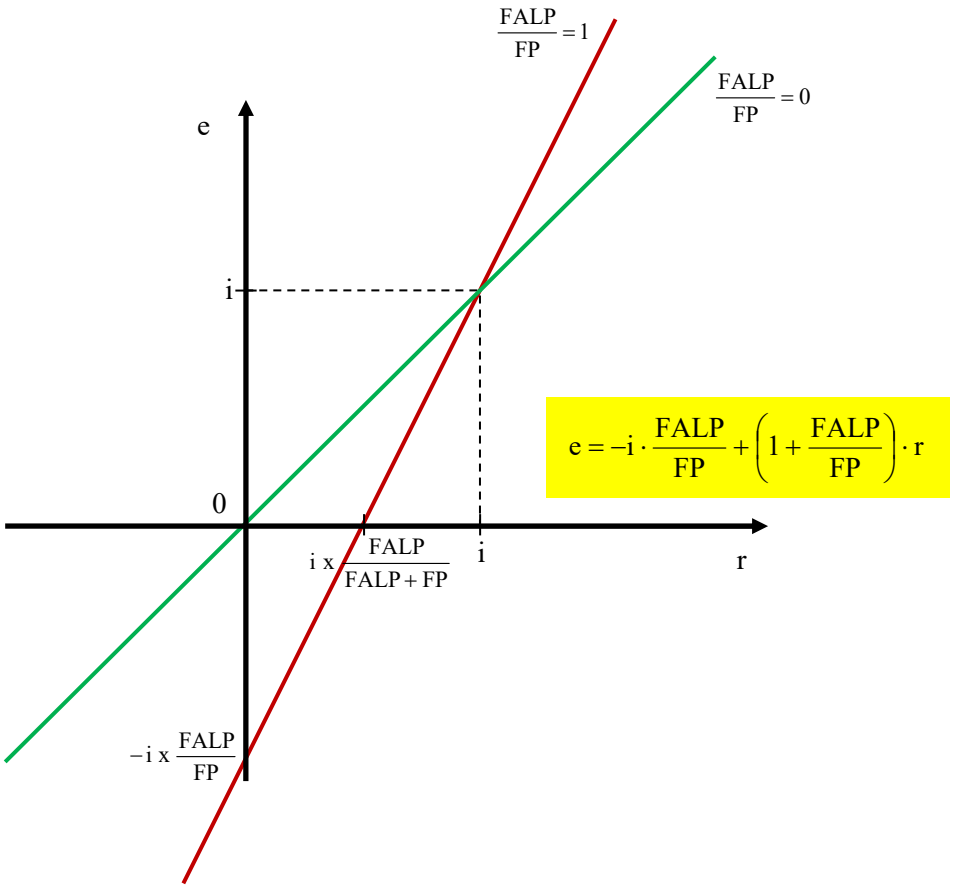


Figura 2 (relación entre rendimiento financiero y rendimiento operativo)

Veamos un ejemplo concreto para poner de manifiesto de una manera clara las consecuencias de un mayor endeudamiento en el riesgo del accionista (figura 3). Supongamos un determinado rango de valores posibles para r (que vendrá determinado –supuestos constantes los costes fijos operativos a cubrir, un margen bruto por euro vendido, así como la inversión a realizar y el tipo impositivo– por el rango posible que puedan tomar las ventas).

En la mencionada figura 3 se representa la situación asociada a “endeudamiento cero”, que, dados los valores posibles de r, determina lo que llamamos “riesgo operativo” (y que, en ausencia de endeudamiento, es el que soporta el accionista); y también una situación de riesgo moderado (ratio de endeudamiento FALP/FP = 1), que da lugar a un mayor rango posible de valores de e, poniendo de manifiesto un mayor riesgo (por euro invertido) para el accionista. La diferencia entre el riesgo total y el riesgo operativo es lo que podemos llamar “riesgo financiero”.

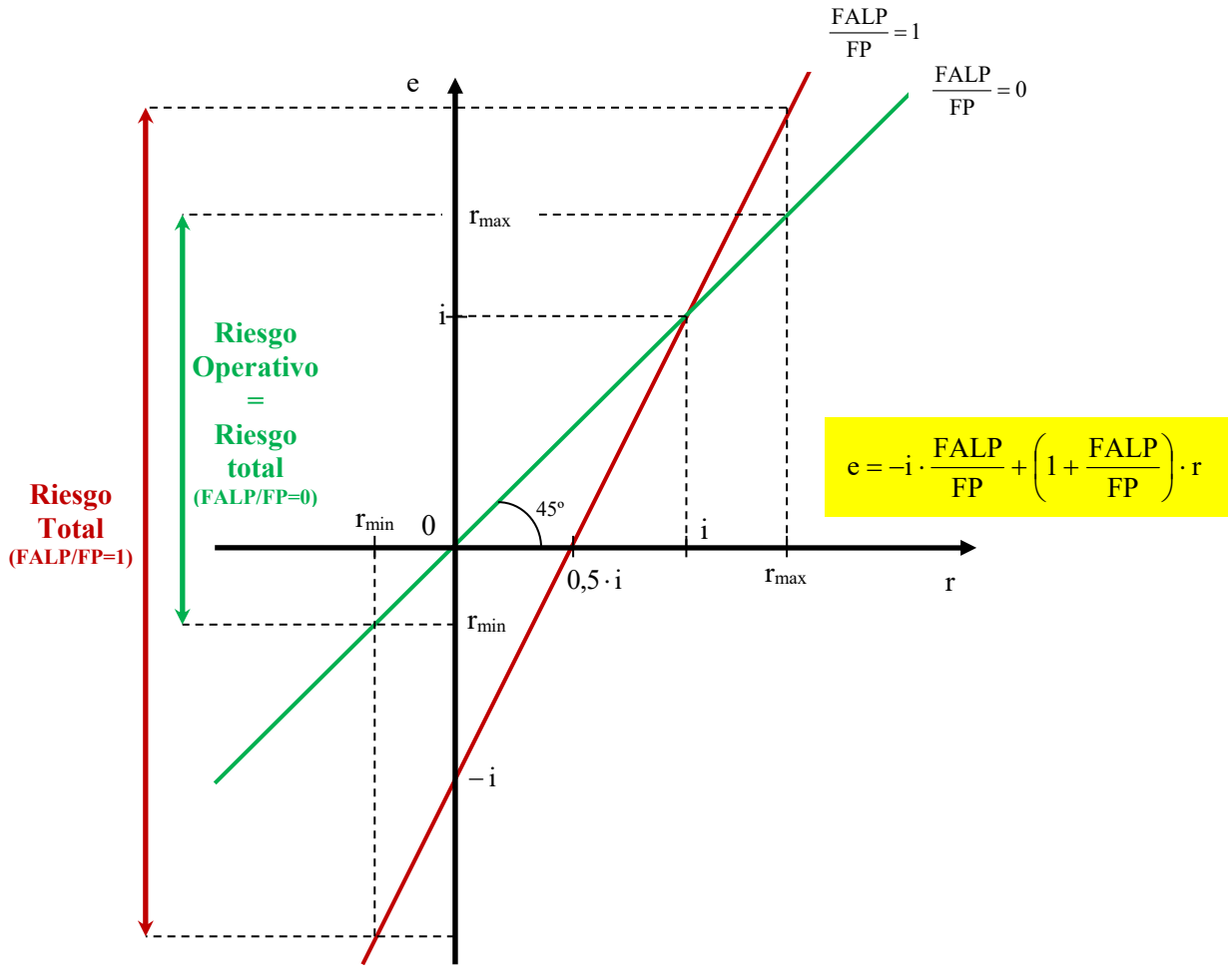


Figura 3 (riesgo operativo y riesgo total)

En la situación representada, es fácil ver que no solo aumenta el riesgo (el rango posible de valores), sino que ese riesgo se sitúa en una zona "mala" (no hemos asignado probabilidades a los distintos valores posibles; de momento supondremos que son "equiprobables"). Así, lo que vemos es la consecuencia de que la r máxima está mucho más cerca del coste de la financiación ajena que el rendimiento operativo mínimo (que, además, puede incluso tomar valor negativo; aunque no muy alto).

Evidentemente, la situación cambiaría si el rango de valores posible de r se desplazara hacia la derecha: si se mantiene la diferencia entre los extremos, también lo hará el riesgo (tanto el operativo como el total), pero ese rango se situará en una zona más alta (idéntico riesgo, pero rentabilidad esperada, tanto operativa como financiera, mayores).

En la figura 4 introducimos también el concepto de "apalancamiento operativo", en una versión algo modificada: en la parte izquierda del gráfico se presenta la visión original propuesta por Gómez-Bezares, mientras que en la derecha puede verse la alternativa. Supuesto dados los costes fijos operativos (CF+AM), la inversión necesaria (AF+FM), el margen bruto por euro vendido

(MBP) y el tipo impositivo (t), el rango de valores de ventas determina el rango posible de valores que tomará el rendimiento operativo (r).

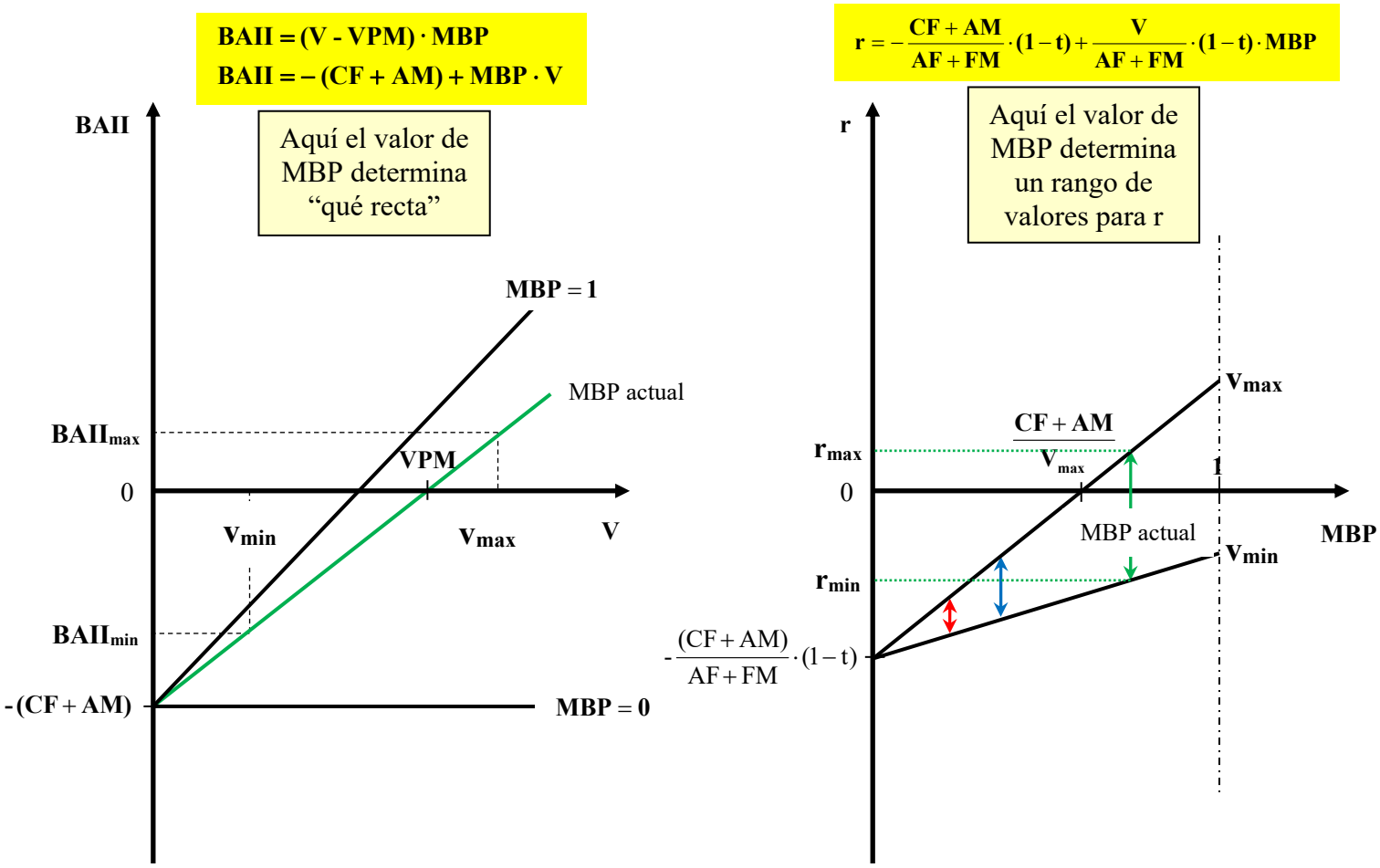


Figura 4 (visión complementaria del apalancamiento operativo)

Si invertimos los ejes del gráfico presentado a la derecha, de manera que en abscisas aparezca el rendimiento operativo, dejando el margen bruto por euro vendido en el eje vertical, podemos presentar el gráfico relativo al leverage operativo debajo del correspondiente al leverage financiero y obtener así una imagen de conjunto. Es lo que se muestra en la figura 5.

A la vista del gráfico propuesto en la figura 5, el lector puede pensar en las consecuencias que provocaría en los distintos elementos implicados la adopción de diferentes medidas posibles. Plantearemos, sin ánimo de ser exhaustivos, algunas de ellas.

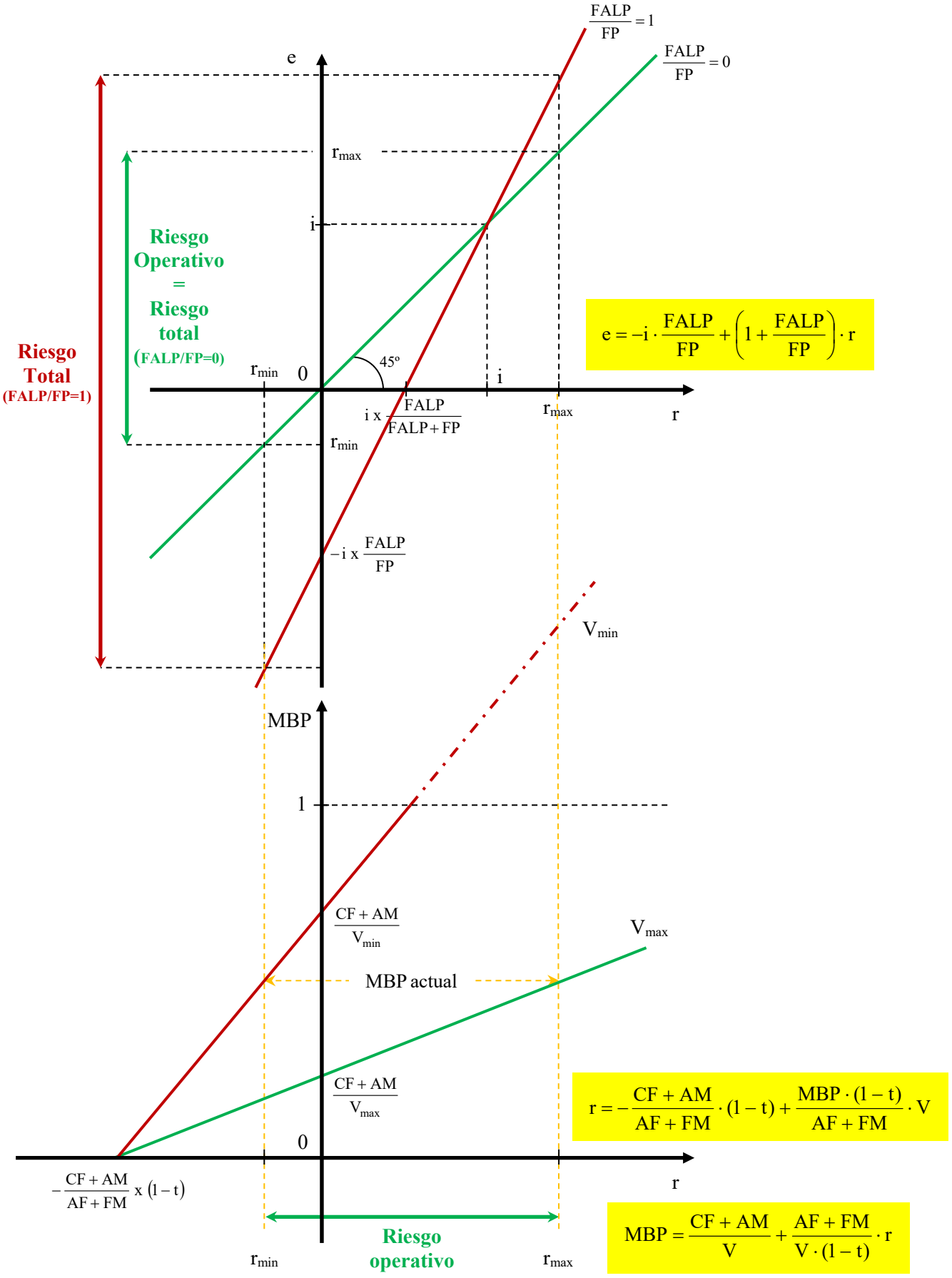


Figura 5 (visión integrada de los apalancamientos operativo y financiero)

Pensemos primero en cualquier medida que consiguiera aumentar el margen bruto por euro vendido. Ejemplos de ello serían, a todo lo demás constante, una reducción en el precio de compra de alguna materia prima; una mejora en el control de calidad que supusiera una disminución de las unidades compradas con defectos; un incremento en el precio de venta del producto; un mejor aprovechamiento de la materia prima utilizada que propiciara una disminución de las mermas; o la reducción de la mano de obra directa necesaria en el proceso de fabricación; entre otras muchas. Cualquiera de estas medidas tendría como efecto un aumento del MBP, por lo que en la parte inferior del gráfico la horquilla de valores posibles de "r" se trasladaría en vertical hacia arriba, provocando simultáneamente un desplazamiento hacia la derecha de los valores r_{min} y r_{max}, a la vez que un aumento de la diferencia entre ambos. En la parte superior del gráfico, lo anterior se traduciría en un aumento del rendimiento financiero esperado, pero también en un incremento del riesgo total, que sería tanto mayor cuanto más alto sea el endeudamiento.

¿Y qué efecto tendría, a igualdad de todo lo demás, una reducción de los costes fijos operativos? Estaríamos pensando, por ejemplo, en la reducción del coste de iluminación de las oficinas o del coste de personal cuyo importe no cambie directamente con la cantidad fabricada y vendida; o en medidas como el abaratamiento del alquiler de un local o la reducción de una prima de seguro. En este caso, el efecto en la parte inferior del gráfico sería un desplazamiento hacia la derecha de las dos rectas que delimitan los valores posibles de r (ya que el punto de corte de ambas con el eje horizontal se trasladaría a la derecha; es decir, que a igualdad de todo lo demás, una reducción de los costes fijos provocaría una rentabilidad menos negativa en caso de que MBP fuera nulo); supuesto el mismo MBP, ello significaría que el riesgo operativo se mantiene (la diferencia entre r_{max} y r_{min} es la misma), al igual que el riesgo financiero asociado a cualquier nivel de endeudamiento, pero todo ello con valores superiores tanto de r como de e. Dicho de otro modo, este tipo de medida permitiría aumentar la rentabilidad esperada sin alterar el riesgo.

Finalmente, dediquemos unas breves líneas a reflexionar sobre los efectos en el gráfico de medidas relativas a la inversión necesaria; ejemplos de lo anterior serían la reducción del plazo de cobro a clientes, el aumento del plazo de pago a proveedores o la utilización de una maquinaria más barata; todas ellas supondrían una menor inversión necesaria para realizar la actividad habitual. En cualquiera de los casos anteriores, y a igualdad de todo lo demás, el punto de corte con el eje horizontal se desplazaría hacia la izquierda (los mismos costes fijos netos divididos entre una inversión menor provocan una rentabilidad más negativa), manteniéndose los puntos de corte con el eje vertical (que tienen que ver con el MBP necesario para cubrir los costes fijos) y reduciéndose por tanto la pendiente de dichas rectas. Supuesto que MBP se mantiene, así como el rango posible de valores para las ventas, se reduce la r_{min} y aumenta la r_{max}, siendo el cambio en el segundo elemento más acusado que el correspondiente al primero. Todo ello se traduce en el gráfico superior en un aumento de la horquilla de valores posibles de r (aumenta el riesgo operativo; y lo hace también el financiero en el caso de que haya endeudamiento), todo ello junto con un aumento en la rentabilidad esperada.

El lector puede comprobar que una reducción del tipo impositivo soportado provocaría idénticos resultados que los correspondientes a una disminución de la inversión necesaria y que han sido apuntados en el párrafo anterior.

4. UNA BREVE REFERENCIA A LA TASA DE RENTABILIDAD INTERNA PENALIZADA

En el año 1984, Fernando Gómez-Bezares proponía un método de análisis del interés de los proyectos de inversión en entornos de riesgo que podía complementar la visión dada por los métodos tradicionales, los sistemas clásicos conocidos como "ajuste del tipo de descuento" y "equivalente de certeza"[9]. Ambos parten de la hipótesis de aversión al riesgo, y tratan de penalizar el interés de los proyectos en función de su riesgo de dos maneras distintas: mientras que el primero lo hace a través del denominador del Valor Actualizado Neto –VAN– (descontando las generaciones de fondos esperadas a un tipo primado, que se calcula añadiendo al tipo de interés sin riesgo una prima que será mayor cuanto más alto sea el riesgo del proyecto), el equivalente de certeza lo hace en el propio numerador del VAN (aplicando una penalización a las generaciones de fondos esperadas mediante un coeficiente, menor que la unidad, de manera que la generación de fondos resultante pueda ser interpretada como la "equivalente cierta" de la esperada sujeta a riesgo).

De manera alternativa a los anteriores (aunque no excluyente), Gómez-Bezares propone penalizar directamente el VAN esperado con su riesgo (medido con la desviación típica). Lógicamente, ello exige calcular los VANes posibles para, a partir de ellos y de sus probabilidades de ocurrencia, estimar su promedio y desviación típica, todo lo cual se hace descontando los flujos de los distintos escenarios posibles al tipo de interés sin riesgo: se evita así caer en el problema de la "doble penalización". De esta manera, los VANes posibles se calculan "como si fueran ciertos", y a partir de los valores posibles y de sus probabilidades se estima el valor esperado y el riesgo, procediendo en ese momento a realizar la penalización.

Muchas son las formas posibles de realizar la penalización aludida. De entre ellas, nos decantamos por la penalización lineal, que presenta ventajas teóricas (aunque también plantea inconvenientes[10]) frente a las demás; ventajas que son mayores aún en contextos en los que sea aceptable la normalidad de la distribución del VAN, en cuyo caso la interpretación del parámetro de penalización aparece más clara. Así pues, supuesto un proyecto de inversión con un comportamiento conocido en términos de flujos de fondos esperados como el que se presenta en la figura 6, los criterios aplicables en el análisis de su interés serían los que se proponen a continuación:

Ajuste del tipo de descuento: $$VAN_{ajustado} = -DI + \frac{E(GF_1)}{(1+R)} + \frac{E(GF_2)}{(1+R)^2} + ... + \frac{E(GF_n)}{(1+R)^n} \quad (11)$$

Equivalente de certeza: $$VAN_{ajustado} = -DI + \frac{\alpha_1 \cdot E(GF_1)}{(1+k)} + \frac{\alpha_2 \cdot E(GF_2)}{(1+k)^2} + ... + \frac{\alpha_n \cdot E(GF_n)}{(1+k)^n} \quad (12)$$

Valor actualizado penalizado: $$VAP = E(VAN) - t \cdot \sigma(VAN) \quad (13)$$

[9] Gómez-Bezares (1984 y 1993).

[10] Véase Santibáñez, Gómez-Bezares y Madariaga (2019), trabajo en el que se aprovechan las ventajas de la penalización lineal tratando de superar sus inconvenientes. Aunque a los efectos de una mayor simplicidad, no entraremos en ello aquí.

donde DI es el desembolso inicial; E (GF_i) es el flujo (o generación) de fondos esperado del año "i" (μ_i en la figura 6); k es el tipo de interés sin riesgo; R es el tipo de descuento primado (entendido como k+P, tipo sin riesgo más prima de riesgo); α_i es el coeficiente de penalización utilizado para convertir la generación de fondos esperada en la "equivalente cierta"; E (VAN) y σ (VAN) son, respectivamente, la esperanza y desviación típica de VAN, calculados ambos al tipo de interés sin riesgo; y t es en este contexto el parámetro de penalización utilizado en el criterio VAP.

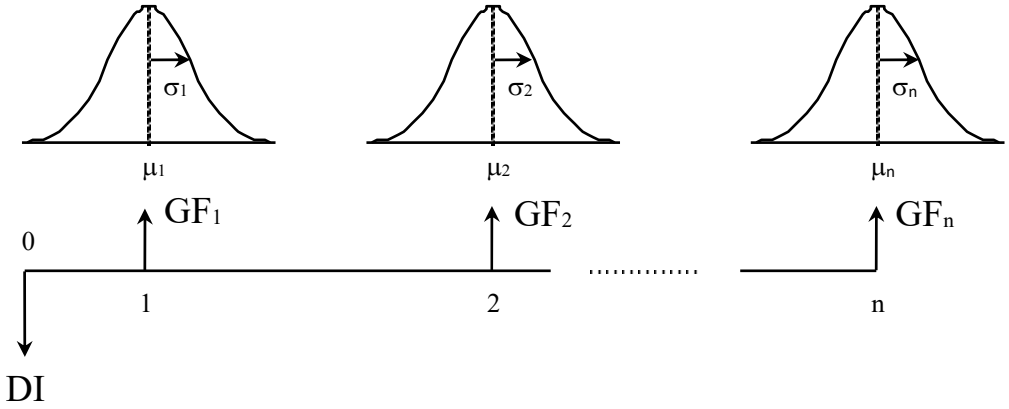


Figura 6 (perfil de fondos de un proyecto de inversión con riesgo)

Como indicábamos anteriormente, supuesta normalidad del VAN, la interpretación del parámetro de penalización "t" es sencilla: depende de la garantía que queramos exigir al valor tomado como referencia. En efecto, al decidir el valor de "t" estamos fijando "a cuántas desviaciones típicas del promedio" se aleja el valor (de VAN) que tomamos como referencia para analizar el interés del proyecto, por lo que definimos la probabilidad a la izquierda y a la derecha de dicho valor (figura 7).

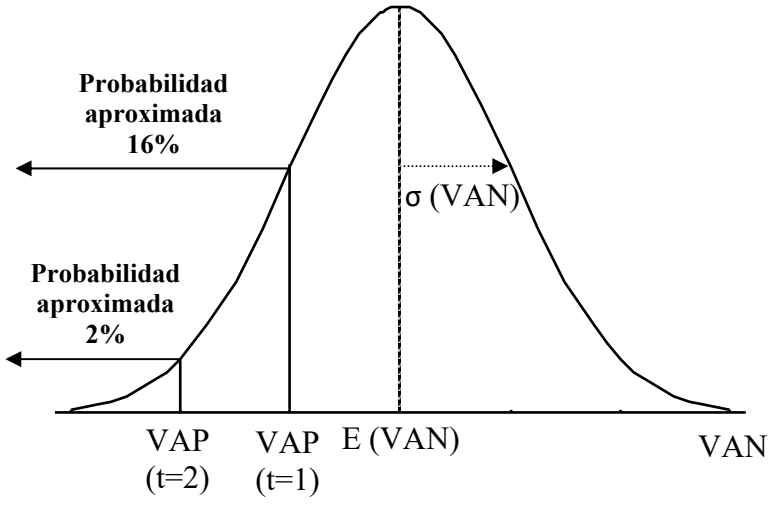


Figura 7 (VAP y valor del parámetro de penalización t)

Así pues, calcular el VAP restando una desviación del promedio (penalización lineal; valor del parámetro t igual a uno), supone que "nos fijamos" en aquel valor de VAN que deja a su izquierda un 16% de probabilidad, aproximadamente, por lo que podemos decir que "está garantizado como mínimo" en un 84% de los casos.

En trabajos posteriores hemos seguido trabajando sobre el criterio. En 1995 dos profesores del Departamento de Finanzas de la Facultad presentábamos una comunicación[11] en la que aplicábamos la lógica propuesta por Gómez-Bezares a la Tasa de Rentabilidad Interna, TRI, dando lugar al criterio que llamamos TRIP (Tasa de rentabilidad interna penalizada). De manera análoga a lo propuesto para el VAN, de lo que se trataría es de obtener los posibles valores de TRI que se corresponden con los distintos escenarios, y a partir de ellos y teniendo en cuenta sus probabilidades de ocurrencia, estimar la TRI esperada y la desviación típica. Si suponemos normalidad en la distribución de la TRI, la interpretación de la TRIP es nuevamente sencilla: es la rentabilidad mínima garantizada con una determinada probabilidad, que depende del valor de t elegido. Así pues, a mayor valor de "t", más garantía (y mayor posibilidad de rechazar el proyecto).

Además, es fácil ver que la TRIP puede entenderse como una "TRI equivalente cierta" (del mismo modo que el VAP es también un VAN equivalente cierto): efectivamente, si representáramos los proyectos en los que se puede invertir en un mapa "μ-σ" (promedio-riesgo) de rentabilidad, todos aquellos que se situaran en la misma recta de pendiente "t" presentarían una TRIP común, idéntica a la de un proyecto que se sitúa en el propio eje de ordenadas (que, por definición, sería un proyecto seguro). Así las cosas, la TRIP sería algo así como "la rentabilidad segura por la que estaríamos dispuestos a renunciar a una rentabilidad esperada (superior, supuesto $t>0$), pero sujeta a riesgo".

Puede verse lo anterior de una manera gráfica en la figura 8. En ella se ha representado el comportamiento de tres proyectos en el mapa "rentabilidad esperada-riesgo": el proyecto "A" tiene una rentabilidad esperada del 12% con un riesgo (medido con la desviación típica de resultado) del 10%; el proyecto "B" presenta una rentabilidad esperada inferior (un 11%), pero reporta también un menor riesgo (5%); y finalmente, tenemos el proyecto "C", que ofrece una rentabilidad esperada (segura) del 10%.

Supongamos que el decisor muestra una aversión al riesgo que le lleva a decidir y valorar los proyectos en función de su rentabilidad mínima garantizada con una probabilidad del 58%. En estas condiciones, y supuesta normalidad de las distribuciones de TRI, el valor que daría al parámetro de penalización sería de $t=0,2$; puede comprobarse que los tres proyectos propuestos presentarían la misma TRIP, por lo que aparecerían como indiferentes. Y todos ellos son igualmente deseables que el proyecto C, que recordemos que es un proyecto seguro. Así pues, la TRIP puede entenderse como la "rentabilidad equivalente cierta" de cada rentabilidad esperada sujeta a riesgo.

Supongamos ahora que el tipo de interés sin riesgo (suele entenderse por tal el rendimiento de la renta fija del Estado) fuera del 9%: en estas condiciones cualquiera de los tres proyectos sería interesante (rentabilidad equivalente cierta superior a la que reporta el título sin riesgo), y los tres (A, B y C) serían totalmente indiferentes.

[11] Laka y Santibáñez (1995).

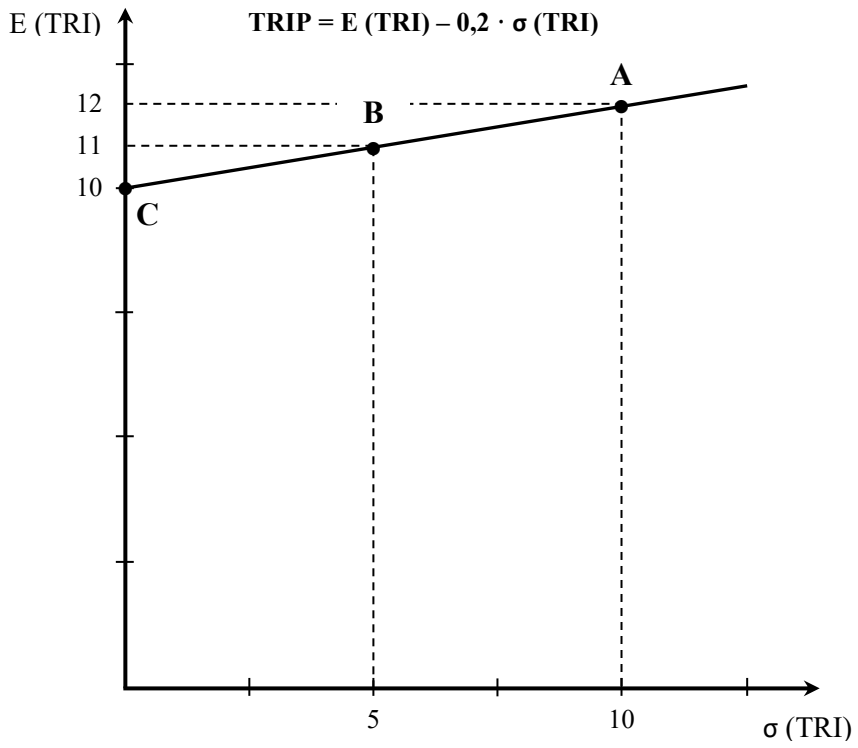


Figura 8 (representación gráfica de la TRIP)

En trabajos posteriores también relacionábamos la TRIP con algunas medidas clásicas en lo que se refiere a la evaluación de la gestión de fondos y carteras en bolsa. Así, el criterio puede verse como una alternativa a los índices de Sharpe, Treynor y Jensen, el M2 de Modigliani y Modigliani o el ratio de información, con ventajas (e inconvenientes) frente a cada uno de ellos[12].

En este trabajo, proponemos utilizar el criterio como una medida que ayude a detectar la posibilidad de crear valor mediante la decisión de endeudamiento. Así, y dado que, como hemos indicado, un mayor endeudamiento supuesto un determinado activo en el que está invertido el dinero supone un apalancamiento de la rentabilidad esperada y el riesgo del accionista, lo que se trataría de ver es en qué condiciones dicha decisión de endeudamiento conduciría a una "rentabilidad equivalente cierta superior" (lo que supondría que el aumento de rendimiento esperado compensa con creces el riesgo que obliga a tomar; en cuyo caso podríamos hablar de creación de valor asociada a la decisión de endeudamiento); y viceversa.

Aunque naturalmente ello es discutible, supondremos en lo que sigue que el valor de t que recoge de una manera adecuada la aversión al riesgo del accionista es 1. Esto significa que el accionista considera suficiente que el valor tomado como referencia esté garantizado con un 84% de probabilidad, aproximadamente, lo que probablemente es una garantía demasiado elevada[13].

[12] Véase Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (2003 y 2004) y Gómez-Bezares, Madariaga, Santibáñez y Apraiz (2007a y 2007b).

[13] En algunos de los trabajos citados anteriormente, concretamente en Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (2003 y 2004), veíamos que cuando el riesgo relevante es el total –medido con la desviación típica–, una referencia

Lógicamente, la TRIP debería en cualquier caso ser superior al tipo de interés sin riesgo, pero aquí nos centraremos en el análisis de si un mayor endeudamiento provoca aumentos o disminuciones en TRIP (como indicio de creación de valor).

5. UN EJEMPLO SENCILLO DE SIMULACIÓN

A continuación, se presentan los resultados obtenidos supuestos diferentes escenarios posibles en lo que se refiere al rango de valores de r, combinados a su vez con distintos valores de i.

Un par de precisiones metodológicas previas. Como puede verse, se muestran en cada simulación los resultados asociados a distintos niveles de endeudamiento: la ordenada en el origen y la pendiente de la recta que relaciona el rendimiento financiero (e) y el rendimiento operativo (r) –figuras 2, 3 ó 5–, así como el punto de corte con el eje de abscisas; los valores mínimo y máximo de dicho rendimiento financiero, el valor esperado, el riesgo, la TRIP (rentabilidad equivalente cierta) y la probabilidad de que el mencionado rendimiento financiero presente un valor negativo. Calculamos la rentabilidad esperada como media equiponderada de los valores optimista y pesimista; y no se comete un error demasiado grande al suponer que entre dichos valores hay seis desviaciones típicas (lo que, supuesta normalidad de la rentabilidad, supondría prescindir de menos de un 0,3% de todos los valores posibles).

i	0,02	t (TRIP)	1,00	**e = -i x FALP/FP + (1+FALP/FP) x r**
r min	-0,02	Garantía	84%	
r max	0,16			

FALP/FP	FALP/(FALP+FP)	Ordenada	Pendiente	Corte con eje horizontal	e min	e max	(emax+emin)/2 E (e)	(emax-emin)/6 σ (e)	TRIP	Prob (e<0)
0,00	0,00	0,00	1,00	0,0000	-0,0200	0,1600	0,0700	0,0300	0,0400	0,0098
1,00	0,50	-0,02	2,00	0,0100	-0,0600	0,3000	0,1200	0,0600	0,0600	0,0228
2,00	0,67	-0,04	3,00	0,0133	-0,1000	0,4400	0,1700	0,0900	0,0800	0,0295
3,00	0,75	-0,06	4,00	0,0150	-0,1400	0,5800	0,2200	0,1200	0,1000	0,0334
4,00	0,80	-0,08	5,00	0,0160	-0,1800	0,7200	0,2700	0,1500	0,1200	0,0359
5,00	0,83	-0,10	6,00	0,0167	-0,2200	0,8600	0,3200	0,1800	0,1400	0,0377

Simulación 1

En la simulación 1 nos encontraríamos con un caso en el que "aumentos de endeudamiento se corresponderían siempre con rentabilidades equivalentes ciertas crecientes", lo que significa que el endeudamiento crea valor. La situación viene propiciada por una asimetría clara de r con respecto a i (el escenario optimista se aleja mucho más del coste de la deuda en comparación con lo que lo hace el pesimista) y un valor bajo del coste de la financiación ajena.

---

lógica para determinar el valor del parámetro de penalización (t) sería la pendiente de la línea del mercado de capitales; que normalmente presenta valores claramente inferiores al utilizado en este estudio.

Veamos lo que ocurre si suponemos un aumento del coste de la deuda de un par de puntos porcentuales (simulación 2).

i	0,04	t (TRIP)	1,00	**e = -i x FALP/FP + (1+FALP/FP) x r**
r min	-0,02	Garantía	84%	
r max	0,16			

FALP/FP	FALP/(FALP+FP)	Ordenada	Pendiente	Corte con eje horizontal	e min	e max	(emax+emin)/2 E (e)	(emax-emin)/6 σ (e)	TRIP	Prob (e<0)
0,00	0,00	0,00	1,00	0,0000	-0,0200	0,1600	0,0700	0,0300	0,0400	0,0098
1,00	0,50	-0,04	2,00	0,0200	-0,0800	0,2800	0,1000	0,0600	0,0400	0,0478
2,00	0,67	-0,08	3,00	0,0267	-0,1400	0,4000	0,1300	0,0900	0,0400	0,0743
3,00	0,75	-0,12	4,00	0,0300	-0,2000	0,5200	0,1600	0,1200	0,0400	0,0912
4,00	0,80	-0,16	5,00	0,0320	-0,2600	0,6400	0,1900	0,1500	0,0400	0,1026
5,00	0,83	-0,20	6,00	0,0333	-0,3200	0,7600	0,2200	0,1800	0,0400	0,1108

Simulación 2

Quiere la casualidad en este caso que la rentabilidad equivalente cierta se mantenga sea cual sea el nivel de endeudamiento (ya que, dados los comportamientos definidos, el diferencial entre rendimiento esperado y riesgo se mantiene constante). Estaríamos ante un caso en el que dicho nivel de endeudamiento es indiferente. Veamos qué ocurre si el tipo de interés sigue creciendo (simulación 3).

i	0,06	t (TRIP)	1,00	**e = -i x FALP/FP + (1+FALP/FP) x r**
r min	-0,02	Garantía	84%	
r max	0,16			

FALP/FP	FALP/(FALP+FP)	Ordenada	Pendiente	Corte con eje horizontal	e min	e max	(emax+emin)/2 E (e)	(emax-emin)/6 σ (e)	TRIP	Prob (e<0)
0,00	0,00	0,00	1,00	0,0000	-0,0200	0,1600	0,0700	0,0300	0,0400	0,0098
1,00	0,50	-0,06	2,00	0,0300	-0,1000	0,2600	0,0800	0,0600	0,0200	0,0912
2,00	0,67	-0,12	3,00	0,0400	-0,1800	0,3600	0,0900	0,0900	0,0000	0,1587
3,00	0,75	-0,18	4,00	0,0450	-0,2600	0,4600	0,1000	0,1200	-0,0200	0,2023
4,00	0,80	-0,24	5,00	0,0480	-0,3400	0,5600	0,1100	0,1500	-0,0400	0,2317
5,00	0,83	-0,30	6,00	0,0500	-0,4200	0,6600	0,1200	0,1800	-0,0600	0,2525

Simulación 3

Como puede verse, en este caso el endeudamiento dejaría de ser interesante, ya que la rentabilidad equivalente cierta más alta se obtiene en ausencia de endeudamiento (aunque todavía el rango de valores posibles de r no está "centrado" con respecto a i; situación que se daría para i=7%, tal como puede verse en la simulación 4).

i	0,07
r min	-0,02
r max	0,16

t (TRIP)	1,00
Garantía	84%

e = -i x FALP/FP + (1+FALP/FP) x r

FALP/FP	FALP/(FALP+FP)	Ordenada	Pendiente	Corte con eje horizontal	e min	e max	(emax+emin)/2 E (e)	(emax-emin)/6 σ (e)	TRIP	Prob (e<0)
0,00	0,00	0,00	1,00	0,0000	-0,0200	0,1600	0,0700	0,0300	0,0400	0,0098
1,00	0,50	-0,07	2,00	0,0350	-0,1100	0,2500	0,0700	0,0600	0,0100	0,1217
2,00	0,67	-0,14	3,00	0,0467	-0,2000	0,3400	0,0700	0,0900	-0,0200	0,2184
3,00	0,75	-0,21	4,00	0,0525	-0,2900	0,4300	0,0700	0,1200	-0,0500	0,2798
4,00	0,80	-0,28	5,00	0,0560	-0,3800	0,5200	0,0700	0,1500	-0,0800	0,3204
5,00	0,83	-0,35	6,00	0,0583	-0,4700	0,6100	0,0700	0,1800	-0,1100	0,3487

Simulación 4

Como era previsible, tampoco en este caso resulta interesante el endeudamiento, disminuyendo más rápido el valor de la TRIP ante aumentos del mismo. El lector puede ver lo que ocurre si se mantiene el rendimiento operativo esperado, pero se reduce el riesgo (manteniéndose el tipo de interés en el nivel considerado en la simulación 1). Lógicamente, en este caso, la TRIP aumenta más que en la situación original: el aumento del rendimiento esperado se combina con un menor incremento del riesgo y sigue interesando el endeudamiento. Y la situación persiste también si el tipo de interés subiera al 4%: la TRIP sigue aumentando con el endeudamiento (véase simulación 5).

i	0,04
r min	0,00
r max	0,14

t (TRIP)	1,00
Garantía	84%

e = -i x FALP/FP + (1+FALP/FP) x r

FALP/FP	FALP/(FALP+FP)	Ordenada	Pendiente	Corte con eje horizontal	e min	e max	(emax+emin)/2 E (e)	(emax-emin)/6 σ (e)	TRIP	Prob (e<0)
0,00	0,00	0,00	1,00	0,0000	0,0000	0,1400	0,0700	0,0233	0,0467	0,0013
1,00	0,50	-0,04	2,00	0,0200	-0,0400	0,2400	0,1000	0,0467	0,0533	0,0161
2,00	0,67	-0,08	3,00	0,0267	-0,0800	0,3400	0,1300	0,0700	0,0600	0,0316
3,00	0,75	-0,12	4,00	0,0300	-0,1200	0,4400	0,1600	0,0933	0,0667	0,0432
4,00	0,80	-0,16	5,00	0,0320	-0,1600	0,5400	0,1900	0,1167	0,0733	0,0517
5,00	0,83	-0,20	6,00	0,0333	-0,2000	0,6400	0,2200	0,1400	0,0800	0,0580

Simulación 5

Los presentados son los resultados obtenidos considerando una penalización por riesgo probablemente exagerada. Dejamos al lector el análisis de los mismos escenarios utilizando un valor inferior (entre 0,5 y 1, por ejemplo), en cuyo caso, y como puede comprobarse, el endeudamiento tiende a presentar una mayor capacidad de creación de valor.

6. CONCLUSIONES

Es generalmente admitido en Finanzas que la asunción de riesgos por parte de los inversores es y debe ser premiada en el largo plazo. En este artículo hemos propuesto un sencillo modelo que permite relacionar los conocidos conceptos de "apalancamiento operativo" y "apalancamiento financiero", viendo los efectos que diferentes medidas provocarían en ambos, y como consecuencia, en el binomio rentabilidad esperada-riesgo del accionista.

Aunque las finanzas modernas consideran que la decisión relativa a la estructura financiera (proporciones de deuda y fondos propios a utilizar en la financiación de la empresa) tiene una importancia relativa menor con respecto a la decisión de inversión, las imperfecciones de mercado, combinadas con nuestra limitada capacidad de prever el futuro o de medir el grado de aversión al riesgo del decisor, parecen sugerir la conveniencia de contar con herramientas sencillas que permitan decidir en qué momentos puede resultar interesante un mayor o menor endeudamiento.

Sobre la base de todo lo anterior, una posibilidad es apoyar el razonamiento en la que hemos denominado Tasa de Rentabilidad Interna Penalizada (TRIP). El criterio se basa en penalizar la rentabilidad esperada en función del riesgo asumido; en este trabajo nos hemos decantado por una penalización lineal. De esta manera, disponemos de una herramienta sencilla que nos permitirá detectar contextos en los que puede resultar conveniente un mayor endeudamiento, frente a otros en los que es más aconsejable utilizar mayores proporciones de fondos propios.

BIBLIOGRAFÍA

GOMEZ-BEZARES, F. (1984): "Algunos modelos básicos para la selección de inversiones con flujos relacionados", *XIV Congreso de la SEIO*, Caja de Ahorros de Granada, Granada, vol. 1, págs. 40-51.

GOMEZ-BEZARES, F. (1993): "Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions", en Aggarwal, ed., *Capital budgeting under uncertainty* (1993), Prentice - Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, págs. 91-102.

GÓMEZ-BEZARES, F. (2012): *Elementos de Finanzas Corporativas*, Desclée de Brouwer, Bilbao.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2003): "Medidas de performance: algunos índices clásicos y relación de la TRIP con la Teoría de cartera", *Análisis Financiero Internacional*, 113, Tercer trimestre, págs. 5-19. Puede verse una versión ampliada en GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2004): *Lecturas sobre Gestión de carteras*, Universidad Comercial de Deusto, Bilbao, págs. 253-303 (disponible para su descarga de manera gratuita en www.eumed.net).

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2004): "Performance ajustada al riesgo: índices clásicos y nuevas medidas", *Análisis Financiero*, 93, Primer Cuatrimestre, págs. 6-16.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA, J. SANTIBÁÑEZ y A. APRAIZ (2007a): "Índices de performance, gestión activa y eficiencia. Un análisis empírico", *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, vol. 16, nº 2, págs. 21-40.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA, J. SANTIBÁÑEZ y A. APRAIZ (2007b): "Índices de performance, gestión activa y eficiencia. Un análisis de sensitividad y del fenómeno de la persistencia", *Ekonomiaz*, nº 66, 3er Cuatrimestre, págs. 220-245.

GÓMEZ-BEZARES, F. y W. PRZYCHODZEN (2018): "Bank-Affiliated Mutual Fund Manager's Trading Patterns of Parent Banks' Stocks: International Evidence", *Journal of Behavioral Finance*, vol. 19, nº 2, págs. 199-208.

GÓMEZ-BEZARES, F. y J. SANTIBÁÑEZ (2011): "Perspectiva histórica de la financiación empresarial", *Revista de Contabilidad y Dirección*, Vol. 12, págs. 115-143.

HAMADA, R.S. (1969): "Portfolio analysis, market equilibrium and corporation finance", *Journal of Finance*, Marzo, págs. 13-31.

LAKA, J.P. y J. SANTIBÁÑEZ (1995): "Algunas reflexiones sobre el Valor Actualizado Penalizado (VAP)", presentada en el *III Foro de Finanzas*, Universidad Comercial de Deusto, Bilbao, Noviembre-Diciembre. Publicada en Gómez-Bezares, F. y J.V. Ugarte, ed., *III Foro de Finanzas (1995)*, Bilbao, págs. 75-91.

MARKOWITZ, H. (1952): "Portfolio selection", *Journal of finance*, Marzo, págs. 77-91.

MARKOWITZ, H. (1959): *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*, Wiley, Nueva York.

MODIGLIANI, F. y M.H. MILLER (1958): "The cost of capital, corporation finance and the theory of investment", *American economic review*, 48, Junio, págs. 261–297.

MODIGLIANI, F. y M.H. MILLER (1963): "Corporate income taxes and the cost of capital: A correction", *American economic review*, 53, Junio, págs. 433–443.

PRZYCHODZEN, J., F. GÓMEZ-BEZARES, W. PRZYCHODZEN y M. LARREINA (2016): "ESG Issues among Fund Managers - Factors and Motives", *Sustainability*, vol. 8, nº 10:1078, págs. 1-19.

SANTIBÁÑEZ, J., L. ALCAÑIZ y F. GÓMEZ-BEZARES (2014a): "Cost of funds on the basis of Modigliani and Miller and CAPM propositions: a revision", *Análisis Financiero*, 124, págs. 6-16.

SANTIBÁÑEZ, J., L. ALCAÑIZ y F. GÓMEZ-BEZARES (2014b): "Alternativa a la formulación clásica para el proceso de betas apalancadas: una aplicación al caso español", *Boletín de Estudios Económicos*, 212, Agosto, págs. 329-356.

SANTIBÁÑEZ, J., L. ALCAÑIZ y F. GÓMEZ-BEZARES (2015): "Alternative formulation for the estimation of cost of funds: sensitivity analysis", *Revista Española de Capital Riesgo*, 3/2015, págs. 17-32.

SANTIBÁÑEZ, F. GÓMEZ-BEZARES y J.A. MADARIAGA (2019): "Valor actualizado penalizado: penalización lineal por tramos", *Boletín de Estudios Económicos*, 226, Abril, págs. 191-221.

SHARPE, W.F. (1964): "Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk", *Journal of finance*, Septiembre, vol. 19, nº 3, págs. 425-442.

SHARPE, W.F. (1970): *Portfolio theory and capital markets*, McGraw–Hill, Nueva York.

ÁRBOLES DE DECISIÓN Y VAN PENALIZADO (Una alternativa a la valoración por opciones reales)

Fernando Gómez-Bezares, José Antonio Madariaga y Javier Santibáñez*
Publicado en *Revista Española de Capital Riesgo*, nº 3/2020, págs. 5-16

INTRODUCCIÓN

El uso de árboles de decisión para la toma de decisiones financieras ha tenido un largo recorrido (Magee, 1964; Gómez-Bezares, 2012). Tal vez su mayor dificultad consiste en buscar los tipos de descuento apropiados para las diferentes posibilidades. Una alternativa interesante es usar la valoración por opciones reales. Pero las opciones reales plantean también sus dificultades al usar en su valoración hipótesis difíciles de asumir o por resultar compleja su utilización; el caso es que su uso en la práctica empresarial es limitado (Burns y Walker, 2009; Brotherson, Eades, Harris y Higgins, 2014; de Andrés, de Fuente y San Martín, 2015; Gómez-Bezares, 2017).

En este artículo vamos a explorar la resolución de este tipo de problemas aplicando el Valor Actualizado Penalizado (VAP) sobre un árbol de decisión; concretamente lo aplicaremos a un "caso" en el que a los decisores se les plantean diferentes escenarios. Comenzaremos recordando brevemente el concepto del VAP. Partiendo de que los decisores son enemigos del riesgo, para tomar decisiones tenemos que penalizar de alguna manera el VAN (Valor Actualizado Neto). Gómez-Bezares (2010) resume de forma muy sencilla cómo el VAP consiste en penalizar el VAN en función del riesgo; una posibilidad es la siguiente:

$$VAP = \mu - t \cdot \sigma \tag{1}$$

donde μ es el VAN medio y σ su desviación típica (descontado todo al tipo sin riesgo, para no incurrir en una doble penalización); la t es el parámetro de penalización, que deberá ser mayor que cero para enemigos del riesgo. Consideramos que t=1,5 es un valor razonable en proyectos de inversión. En determinadas condiciones, si llamamos B al VAN máximo y A al VAN mínimo, podemos aproximar el VAP como:

$$VAP = 0{,}25 \cdot B + 0{,}75 \cdot A \tag{2}$$

para el caso de distribuciones simétricas. Para distribuciones asimétricas, con asimetría a la derecha, tendríamos:

$$VAP = 0{,}05 \cdot B + 0{,}95 \cdot A \tag{3}$$

Y para asimetría a la izquierda:

* Profesores del Departamento de Finanzas y Economía de Deusto Business School.

$$VAP = 0{,}45 \cdot B + 0{,}55 \cdot A \quad (4)$$

Todo esto puede ampliarse en Gómez-Bezares (1993 y 2010) o en Santibáñez, Gómez-Bezares y Madariaga (2019). Pero, de una manera intuitiva, es lógico que un enemigo del riesgo pondere menos en su decisión el VAN optimista que el pesimista (lo que sucede en la fórmula 2; aunque cabrían otras ponderaciones). Si la asimetría es a la derecha (el valor máximo B, y los próximos a él son muy improbables), es lógico que pondere mucho más el valor mínimo A (fórmula 3). Finalmente, si la asimetría es a la izquierda (el valor mínimo A, y los próximos a él son muy improbables), es razonable que ponderen parecido (el mayor peso de B por estar más cerca de la zona más probable, se compensa con la aversión al riesgo del decisor: fórmula 4). El VAP puede interpretarse como un VAN equivalente cierto.

Pasamos, a continuación, a exponer un caso que nos servirá para mostrar la operatividad del VAP aplicado en un sencillo árbol de decisión. El caso está basado en hechos reales, obviamente simplificados y relatados con cierta libertad, sobre datos de hace aproximadamente una década, lo que permitirá al lector comprobar la utilidad de nuestra propuesta en una situación perfectamente verosímil. También en la resolución, que expondremos tras la presentación del caso, realizaremos ciertas simplificaciones para no alargar excesivamente la explicación.

2. EL CASO: “Sweet Dreams”

Supongamos un país (en adelante el candidato) que está negociando la entrada en una unión aduanera (UA). Actualmente los aranceles exteriores de la citada unión son bastante altos, pero si la negociación tiene éxito, los aranceles desaparecerán para el país candidato (en los productos que nos interesan) a comienzos del tercer año desde la entrada, reduciéndose un tercio cada año. Hoy nos encontramos comenzando el segundo semestre del año 01 y, dadas las circunstancias, parece muy difícil que la negociación se cierre para finales de este año, lo que permitiría que nuestro país entrara en la UA el uno de enero de 02. De no entrar en ese momento, parece muy probable que las negociaciones se cierren exitosamente a finales de 02, siendo efectiva la entrada en enero de 03. Cabe también la posibilidad de que no se llegara a un acuerdo en 02, en cuyo caso el candidato quedaría definitivamente fuera de la UA; esta posibilidad resulta también muy improbable.

La empresa “Sweet Dreams” (en adelante SD) es una pequeña empresa familiar, situada en el país candidato, que se dedica a la fabricación de caramelos, toffees, productos bañados de chocolate, mazapanes… Precisamente los mazapanes de Soto son una de sus especialidades, y este tipo de mazapán prácticamente es desconocido en la UA. Actualmente los altos aranceles, junto con lo poco conocido que es el producto, desaniman a SD a hacer ningún tipo de aventura comercial en la UA; lo mismo pasa con otros productores de mazapán de Soto vecinos de SD, que también resultan ser pequeñas empresas familiares. En todo caso, los fabricantes piensan que el mercado de la UA, sin aranceles, sería muy interesante para los ricos mazapanes de Soto, pues el mazapán en esos países no está asociado a la Navidad, y puede venderse de manera estable durante todo el año.

Dionisio Sorzano y Laureano Villaseca, cuñados y dueños del negocio, se están planteando diferentes alternativas para aprovechar la posible entrada en la UA. La bajada de los aranceles, si actúan rápido, les puede posicionar muy bien con su exquisito mazapán en los grandes distribuidores de la UA; el problema es que para eso deberían contratar un agente comercial experto en el tema, que conociera bien a los grandes compradores de la UA y que, por supuesto,

hablara varios idiomas. A una persona así hay que pagarle un gran sueldo. Además, habría que dotarlo de cierta infraestructura, pareciendo lo más adecuado ubicarlo con una oficina propia en una de las ciudades centrales de la UA. Afortunadamente, un paisano y amigo de Dionisio y Laureano, Arturo Camerano, cumple con todas las características pedidas para el puesto, por lo que deciden ponerse en contacto con él.

Arturo trabaja desde hace años para una importante bodega situada en el país candidato, dedicándose a la exportación de vinos a la UA, por lo que conoce perfectamente su mercado de alimentación, y podría tratar de comercializar los mazapanes; además, no vería mal un cambio de trabajo, pues la bodega le hace reportar quincenalmente en su sede, lo que le obliga a complicados viajes, que se unen a los que tiene que realizar casi continuamente en su trabajo comercial. Arturo desearía pasar algo más de tiempo en su ciudad de residencia, una gran ciudad en el centro de la UA, donde conoció a su mujer y vive con ella y con sus dos pequeños hijos.

Reunidos Dionisio, Laureano y Arturo, la conversación se plantea con la franqueza propia de viejos amigos. Laureano y Dionisio le explican que SD quiere vender en la UA sus mazapanes de Soto si se produce el ingreso del país en la unión, y que les gustaría que Arturo se incorporara al proyecto: lo aprecian, confían en él y no dudan de su capacidad en todos los sentidos. Arturo, que le había dado vueltas al tema desde que los cuñados se lo adelantaron por teléfono, les plantea los siguientes números:

- Coste anual de la oficina (donde se incluye el alquiler de una oficina perfectamente equipada y el resto de gastos asociados al uso del local, el sueldo fijo de Arturo -similar al que ahora cobra- y el de una secretaria cuatrilingüe a media jornada -puesto que desempeñaría Collette, esposa de Arturo-, además de las correspondientes contribuciones a la Seguridad Social, gastos de promoción del producto en diferentes canales, software específico y otros gastos menores): 250.000 €.
- Retribución variable de Arturo (de donde Arturo, además, pagaría los gastos de viaje, dietas, etc. -incluido un viaje bimestral a la sede de SD-, así como las necesarias invitaciones a algunos clientes): 10% sobre ventas.
- Ventas anuales estimadas:
    - 1.000.000 € el primer año en la UA.
    - 1.500.000 € a partir del segundo año en la UA.

Laureano y Dionisio, mientras comparten con Arturo una buena botella de Rioja, comentan que las cifras les parecen muy atinadas, y llegan a la conclusión de que ahora es el momento de tomar la decisión: hay que tener la oficina preparada el uno de enero de 02, eso les permitiría empezar a vender en la UA ese mismo año, si se produjera la improbable entrada rápida, y, en caso contrario, ir contactando con los clientes para la muy probable entrada en enero de 03; de no actuar así, les advierte Arturo, otros competidores se situarán antes que nosotros, y luego será todo mucho más difícil.

Lo que Dionisio y Laureano ven claro es que resulta imposible vender mazapanes en la UA hasta que bajen algo los aranceles (actualmente del 30%). Una vez dentro habrá que hacer un "importante esfuerzo" el primer año y algo menos el segundo, para mantener un precio estable y competitivo en los mazapanes (es decir, pagarán ellos el arancel); esto se verá compensado por los beneficios que se obtendrán a partir del tercer año. En consecuencia, habría que tener montada la oficina, con una parte importante de sus gastos, a uno de enero de 02, aun sabiendo que es muy improbable que ese año se empiece a vender, lo que no ocurrirá hasta el ingreso

efectivo del candidato en la UA. Los años que no haya venta el coste de la oficina se situará en 150.000 € anuales, pues podrían ahorrarse 100.000 al reducir, sobre todo, drásticamente la promoción. Este planteamiento pone de manifiesto que en el también improbable caso de que no se culminen exitosamente las negociaciones a finales de 02, se cerraría en ese momento la oficina, habiendo incurrido solamente en gastos. Arturo también comenta que, en tal caso, él y su esposa dejarían la empresa sin ningún tipo de indemnización, lo que, junto con el alto porcentaje de retribución variable, demuestra su implicación en el proyecto; este hecho también le da fuerza para comentar a los cuñados que deben tomar la decisión antes de octubre, de tal manera que en enero de 02 la oficina esté funcionando, entre o no el candidato en la UA ese mes: además de los motivos comerciales antes apuntados, Arturo y Collette no están dispuestos a retrasar su incorporación si el ingreso efectivo no se produce para 02.

Los cuñados muestran su acuerdo, también, con este último planteamiento, pues entienden que Arturo quiera decidir ya si continúa en la bodega o busca otra empresa; por lo que la decisión hay que tomarla ahora.

Otros datos que se manejan en la cordial reunión son:

- En caso de no abrir la oficina, SD renunciaría prácticamente al mercado de la UA, pudiéndose considerar las cifras de ventas presentadas por Arturo como incrementales respecto a la situación de no abrir ahora la oficina.
- Si se abre la oficina, habría que incurrir en algunos gastos (sobre todo en acciones para dar a conocer la empresa y el producto entre los grandes compradores), lo que supondría un desembolso de 200.000€. Pero este desembolso está totalmente subvencionado en el país candidato para favorecer el acceso de las empresas a la UA en vísperas del ingreso del país en la unión. No tiene, en consecuencia, repercusiones en tesorería, y tampoco fiscales o de otro tipo.
- Por otro lado, los dos primeros años de venta en la UA habría que gastar 200.000 € adicionales por año, en campañas cerca del cliente final.
- Dado que en la UA el mazapán se consume a lo largo de todo el año, se presenta aquí una ventaja importantísima para SD. Ahora Laureano y Dionisio tienen toda la maquinaria para fabricar mazapanes a tope entre septiembre y diciembre (pues es en Navidades cuando se consumen de manera muy mayoritaria), teniendo abundante capacidad ociosa el resto de los meses del año; la exportación a la UA les permitiría fabricar durante todo el año, almacenando algo para no interferir en los últimos meses del año con el consumo nacional. En estas condiciones se puede entender que la exportación (a pesar de su importante volumen para la dimensión de SD) no alteraría los costes fijos en la sede de la compañía (fabricación, administrativos…).
- La imposición fiscal relevante sobre beneficios, sería del 30%. Si un año hay pérdidas, se pueden compensar con los beneficios que tiene SD en el resto de actividades.
- La actividad no implicará inversiones en Fondo de Maniobra, pues SD suele descontar sus efectos (coste que se incluye en los costes variables), y la financiación de proveedores cubre el crecimiento del almacén.
- El tipo sin riesgo es el 2% y el premio por riesgo adecuado se considera el 4%, lo que significa un riesgo medio, habida cuenta de que, aunque la actividad de alimentación se puede entender como poco arriesgada, al tratarse de un mercado nuevo, parece que se haría más arriesgada.

Después de despedirse muy cordialmente de Arturo, y de prometerle una respuesta rápida, Dionisio y Laureano sacan los datos de su contabilidad de costes, y llegan a la conclusión de que los variables representan un 65% de las ventas (donde se incluye el 10% que cobraría Arturo, y a lo que habría que sumar el arancel cuando lo haya).

Con todos estos datos, Laureano y Dionisio, se ponen en contacto con un profesor de finanzas de Deusto Business School (DBS) con el que, tras analizar todos los detalles, llegan a las siguientes conclusiones:

- El análisis se realizará suponiendo que los efectos de la decisión terminan el año 07, que sería el último año en generar fondos, pues es difícil hacer previsiones a más largo plazo en este mercado. En concreto se prevé que nuevos países, de gran tradición en la fabricación de dulces, se incorporen para esas fechas a la UA, con lo que la competencia sería muy dura. Si la actividad exportadora de mazapán pudiera durar más tiempo, sería un elemento más a favor de la decisión.
- También acuerdan considerar que de los valores obtenidos en cada escenario (entrada el 02, el 03 o no entrada) se debería considerar una horquilla del 50%, como límites máximos de variación.

Con estos datos el profesor de DBS procede a analizar la decisión.

3. RESOLUCIÓN de “Sweet Dreams”

3.1. Resumen de la información relevante

Comenzaremos realizando un breve resumen de la información relevante presentada.

Ventas (V; a partir del momento de ingreso en la UA):

$\Delta V_{\text{año 1}} = 1.000.000$

$\Delta V_{\text{años 2 y ss}} = 1.500.000$

Costes (variables, CV, y fijos, CF) e inversiones en fondo de maniobra, FM (a partir del momento de ingreso en la UA):

$\Delta CV_{\text{año i}} = 65\%$ s/ $\Delta V_{\text{año i}}$ (incluye retribución variable de Arturo) + $\text{Arancel}_{\text{año i}}$

$\Delta CF\ (1)_{\text{año i}} = 250.000$ (si $V_{\text{año i}} \neq 0$) ó 150.000 (si $V_{\text{año i}} = 0$)

$\Delta CF\ (2)_{\text{años 1 y 2}} = 200.000$ (promoción)

$\Delta FM_{\text{año i}} = 0$

Otros datos:

Desembolso inicial: DI = 0 (los 200.000€ iniciales de promoción están subvencionados)

Tipo impositivo: t = 30%; empresa en beneficios

Tipo de interés sin riesgo: K = 2%

Prima de riesgo: P = 4%

Tipo de interés primado: R = K + P = 2% + 4% = 6%

Vida útil del proyecto: n = 6 años (desde año 01 hasta año 07)

Límites máximos de variación: horquilla ±50%

Arancel actual = 30% (se reduciría un 10% anual desde primer año de entrada en UA)

Una primera alternativa de resolución consistiría en aplicar uno de los criterios clásicos de tratamiento del riesgo: el conocido como "Ajuste del tipo de descuento". Se trataría de identificar un escenario "promedio" (esperado) y descontar los flujos de fondos correspondientes a un tipo primado por el riesgo. Utilizaremos esta técnica en un tercer paso, y la concebiremos a su vez como un análisis de la robustez de la solución presentada primeramente a través de dos caminos distintos, relacionados ambos con el uso de la técnica de "Árboles de decisión"; y es que el análisis puede enriquecerse estudiando el entramado de decisiones y apariciones del azar que el caso involucra, probablemente es aquí donde radica la mayor potencia de la técnica, que obliga a explicitar "todo lo que puede pasar y las acciones que el decisor puede adoptar en cada caso".

3.2. Una primera aproximación utilizando árboles de decisión y VAP

Presentaremos primero los cálculos previos necesarios para realizar el análisis. Existen en este sentido cinco posibles escenarios, dependiendo de lo que ocurra con relación a la entrada o no en la Unión Aduanera y de lo que se haya decidido en un primer momento (vender asumiendo el coste del arancel vigente en la actualidad o no hacerlo). Efectivamente, hay en principio tres grandes escenarios posibles:

- Entrada en la UA al final del año 01. Es lo que identificaremos como "escenario optimista", que tiene una probabilidad de ocurrencia baja.
- Entrada en la UA al final del año 02. Es el que denominaremos "escenario intermedio", al que asignamos una probabilidad alta.
- No entrada en la UA. Llamaremos "escenario pesimista" a esta alternativa, a la que asignamos también, al igual que a la optimista, una probabilidad baja.

A su vez, y siempre supuesto que se abre la oficina y que no se produce la entrada en la UA en el año 01, habrá que decidir si empezar a vender en el año 02 (asumiendo el coste actual del arancel; se trata de una opción que también debemos analizar) o no hacerlo (estrategia propuesta); quedan así definidos los cinco escenarios posibles (a los que lógicamente se añade el de no abrir la oficina). En la tabla 1 se presentan los cálculos correspondientes a los cinco escenarios, incluyendo los VANes calculados al tipo de interés sin riesgo (K=2%).

Escenario optimista (entrada en UA en el año 01)

Año	Δ V	Δ CV	Δ CF	Δ BAII	Δ Imp	Δ BAIdI	Δ GF
02	1.000.000	850.000	450.000	-300.000	-90.000	-210.000	-210.000
03	1.500.000	1.125.000	450.000	-75.000	-22.500	-52.500	-52.500
04	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
05	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
06	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
07	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
						VAN (K)	448.181

Escenario intermedio (entrada en UA en el año 02) – Sin vender hasta haber entrado

Año	Δ V	Δ CV	Δ CF	Δ BAII	Δ Imp	Δ BAIdI	Δ GF
02	0	0	150.000	-150.000	-45.000	-105.000	-105.000
03	1.000.000	850.000	450.000	-300.000	-90.000	-210.000	-210.000
04	1.500.000	1.125.000	450.000	-75.000	-22.500	-52.500	-52.500
05	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
06	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
07	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
						VAN (K)	168.869

Escenario pesimista (no entrada en UA) – Sin vender hasta haber entrado

Año	Δ V	Δ CV	Δ CF	Δ BAII	Δ Imp	Δ BAIdI	Δ GF
02	0	0	150.000	-150.000	-45.000	-105.000	-105.000
03	0	0	0	0	0	0	0
04	0	0	0	0	0	0	0
05	0	0	0	0	0	0	0
06	0	0	0	0	0	0	0
07	0	0	0	0	0	0	0
						VAN (K)	-102.941

Escenario intermedio (entrada en UA en el año 02) – Empezando a vender en 02

Año	Δ V	Δ CV	Δ CF	Δ BAII	Δ Imp	Δ BAIdI	Δ GF
02	1.000.000	950.000	450.000	-400.000	-120.000	-280.000	-280.000
03	1.500.000	1.275.000	450.000	-225.000	-67.500	-157.500	-157.500
04	1.500.000	1.125.000	250.000	125.000	37.500	87.500	87.500
05	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
06	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
07	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
						VAN (K)	179.687

Escenario pesimista (no entrada en UA) – Empezando a vender en 02

Año	Δ V	Δ CV	Δ CF	Δ BAII	Δ Imp	Δ BAIdI	Δ GF
02	1.000.000	950.000	450.000	-400.000	-120.000	-280.000	-280.000
03	0	0	0	0	0	0	0
04	0	0	0	0	0	0	0
05	0	0	0	0	0	0	0
06	0	0	0	0	0	0	0
07	0	0	0	0	0	0	0
						VAN (K)	-274.510

Tabla 1

donde a la nomenclatura previamente definida se añaden ahora BAII (beneficio antes de intereses e impuestos), Imp (que representa el impuesto de sociedades), BAIdI (beneficio antes

de intereses y después de impuestos) y GF (generación de fondos o impacto en caja anual del proyecto estudiado); todos ellos incrementales con respecto a "no abrir la oficina".

Representemos a continuación en un sencillo árbol de decisión la situación de partida, junto con los VANes (calculados al tipo de interés sin riesgo) que se obtendrían en el caso de llegar a cada final de rama (figura 1). A los efectos de una identificación más rápida y sencilla de las distintas cifras implicadas y para una más fácil explicación de los cálculos a realizar, identificaremos cada uno de los nudos y ramas con un número correlativo, sin que en ningún caso dicha numeración esté relacionada con la secuencia temporal o ninguna otra circunstancia.

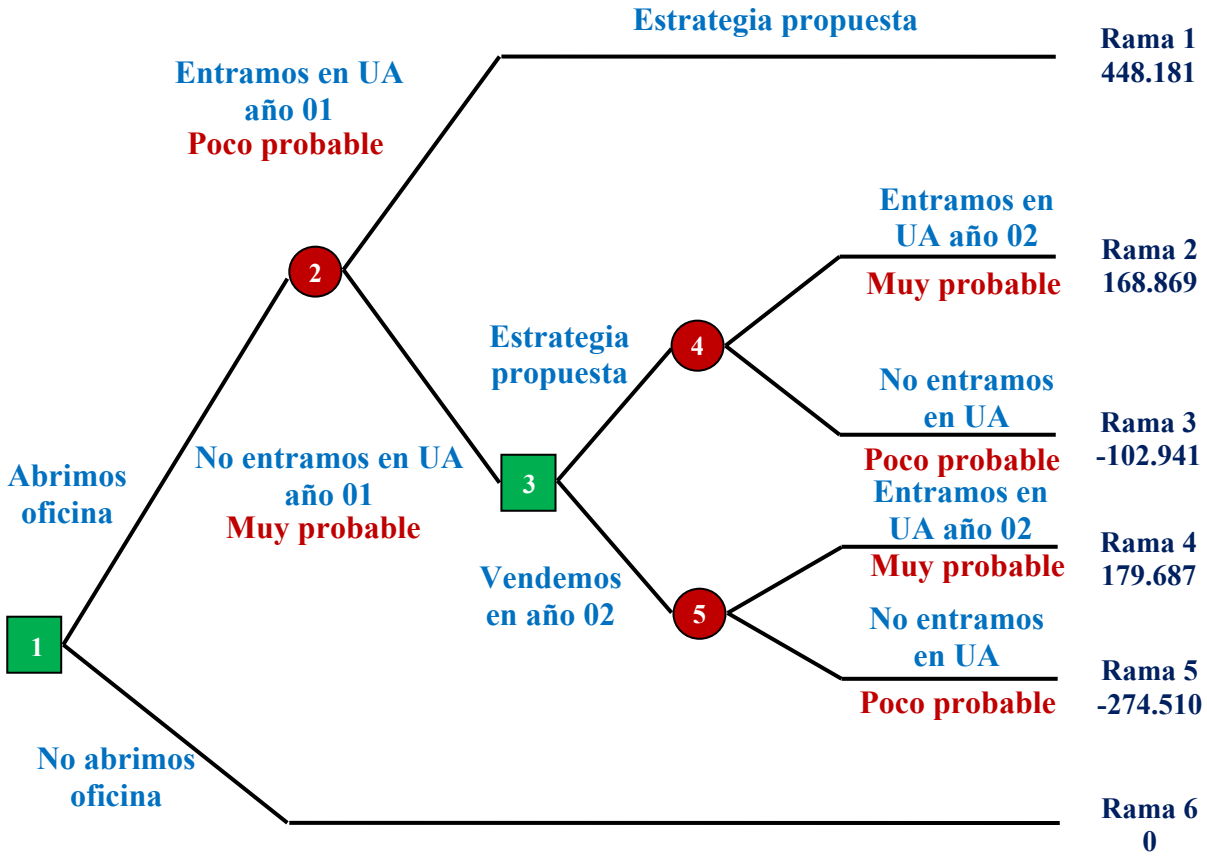


Figura 1

Pero en este punto debemos tener en cuenta que las cifras señaladas al final de cada rama no son "seguras" (incluso "suponiendo que pasa todo lo necesario para llegar a dicho final de rama"): debe considerarse un rango máximo de variación del 50% sobre las cifras estimadas (que tiene que ver con el hecho, por otro lado obvio, de que, por ejemplo, las ventas del primer año no tienen por qué ser exactamente 1.000.000, sino que la cifra es la mejor estimación posible de lo que ocurrirá en ese primer año de ventas; y la misma interpretación debe realizarse para el resto de datos, lo que justifica el rango de variación apuntado). Por otro lado, no parece lógico considerar el mencionado rango de variación en el escenario "pesimista" (no entrada en la UA;

que, según la estrategia propuesta, no involucraría ventas, que es el dato sobre el que pueden recaer mayores dudas), de manera que entenderemos que es difícil pensar que valores inferiores a los propuestos sean realmente posibles.

Considerando lo anterior, podríamos modificar las cifras presentadas aplicando una lógica "VAP" (penalización del VAN) en los distintos nudos y ramas, que nos permita llegar al árbol definido en la figura 2 (la obtención de las distintas cifras presentadas se explica a continuación).

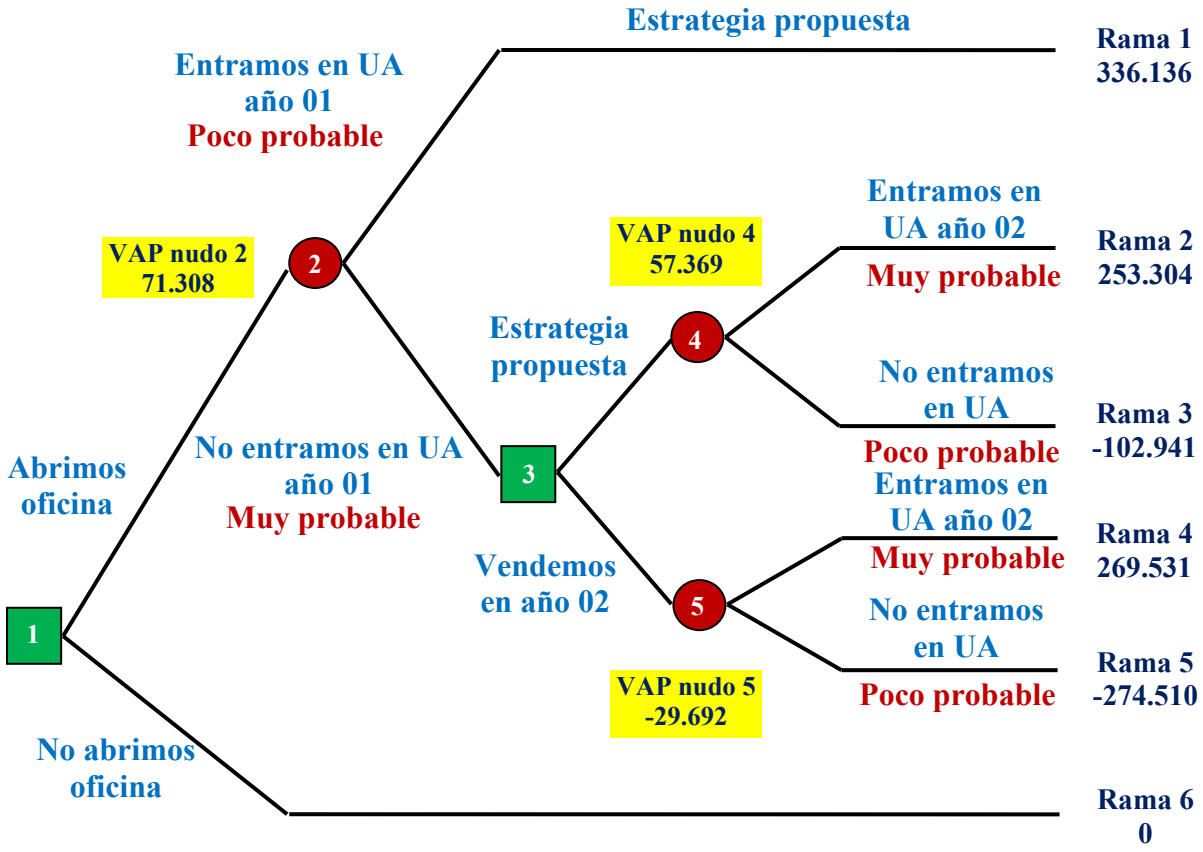


Figura 2

Rama 1:

Considerando el rango máximo de variación, tendríamos que los VANes posibles serían:

VAN máximo = 448.181 x 1,5 = 672.272

VAN mínimo = 448.181 x 0,5 = 224.091

Aplicando la fórmula 2 (distribuciones simétricas) de penalización del VAN, tenemos:

VAP (Rama 1) = 0,25 x 672.272 + 0,75 x 224.091 = 336.136

Nudo 4:

Involucra las ramas 2 y 3. En la primera debe considerarse el valor máximo posible (un 50% superior al presentado inicialmente); mientras que ya hemos dicho que las alternativas pesimistas no parece lógico penalizarlas más allá de las cifras presentadas. Así:

Rama 2: VAN máximo = 168.869 x 1,5 = 253.304

Rama 3: VAN mínimo = -102.941

Dado que en este caso las probabilidades de que se produzca un valor cercano al máximo son muy altas, sería de aplicación la fórmula 4 (penalización del VAN supuestas distribuciones con asimetría a la izquierda):

VAP (nudo 4) = 0,45 x 253.304 + 0,55 x -102.941 = 57.369

Nudo 5:

Involucra las ramas 4 y 5. En la primera debe considerarse el valor máximo posible (un 50% superior al presentado inicialmente); no se penalizan las alternativas pesimistas. Así:

Rama 4: VAN máximo = 179.687 x 1,5 = 269.531

Rama 5: VAN mínimo = -274.510

Siendo nuevamente de aplicación la fórmula 4 (penalización del VAN supuestas distribuciones con asimetría a la izquierda):

VAP (nudo 5) = 0,45 x 269.531 + 0,55 x -274.510 = -29.692

La resolución del nudo 3 (decisorio) es clara: la mejor alternativa sería la representada por la rama asociada al nudo aleatorio 4 (con un valor de 57.369). Con lo que tenemos la información necesaria para valorar el nudo 2 (y, por comparación, el nudo 1).

Nudo 2:

Dado que la Rama 1 tiene una baja probabilidad de ocurrencia frente a la asociada al nudo 3, es de aplicación la fórmula 3 (penalización del VAN con asimetría a la derecha):

VAP (nudo 2) = 0,05 x 336.136 + 0,95 x 57.369 = 71.308

Así pues, la decisión óptima sería abrir la oficina a finales de 01 y no vender hasta que se produzca, en su caso, la entrada en la UA, y se obtendría en esta primera aproximación un VAN (equivalente cierto, atendiendo a la lógica implícita en la penalización del VAN propuesta, VAP) de 71.308, que es el que aporta la decisión al escenario de no afrontar el proyecto (no abrir la oficina en el país de destino).

Veamos qué ocurre si optamos por un camino de resolución algo diferente, aunque coherente con el propuesto en este punto.

3.3. Una segunda aproximación mediante árboles de decisión y VAP

En este caso descartamos de antemano, a la vista de los resultados obtenidos en la aproximación anterior, la posibilidad de vender en el año 02 en el caso muy probable de que la entrada en la UA no tenga lugar en el año 01. Así pues, el árbol en el que estamos pensando en este caso sería el que se muestra en la figura 3 (las cifras que se presentan se corresponden nuevamente con las obtenidas al calcular los VANes al tipo de interés sin riesgo; por lo que debemos realizar algunos ajustes sobre lo presentado en dicha figura).

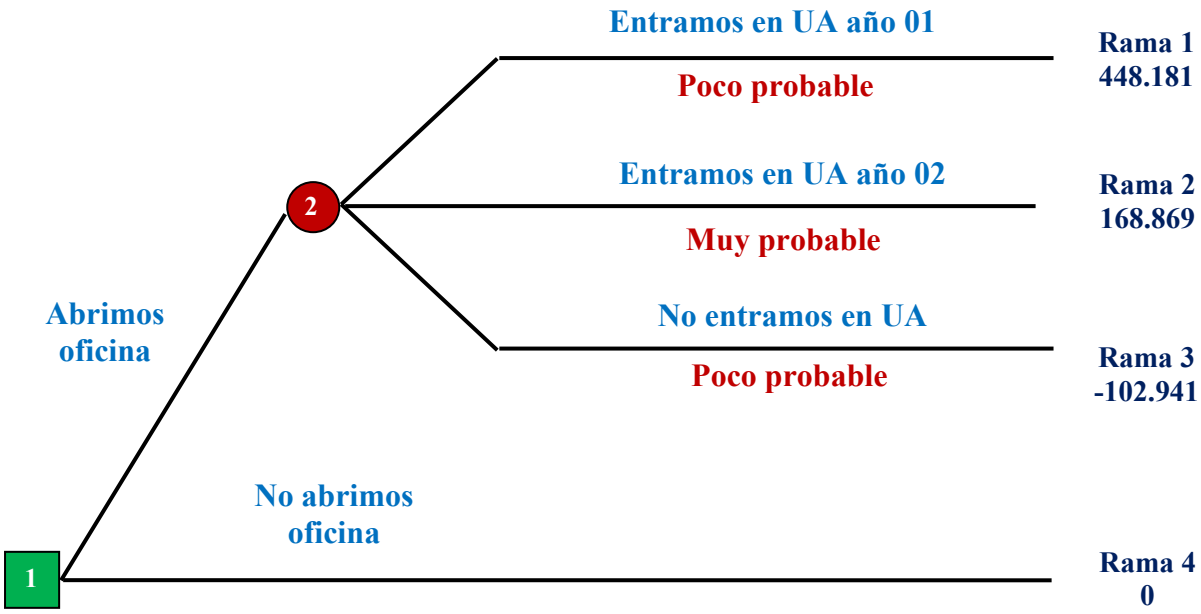


Figura 3

En este caso, parecería defendible también considerar en el nudo 2 los VANes máximo y mínimo, para después aplicar la fórmula 2 de penalización del VAN (para distribuciones simétricas; ya que los dos escenarios extremos son poco probables, siendo el intermedio el de más alta probabilidad). Así, y siguiendo la misma lógica justificada en el apartado anterior, los cálculos serían los siguientes:

Rama 1:

VAN máximo = 448.181 x 1,5 = 672.272

Rama 3:

VAN mínimo = -102.941

Nudo 2:

VAP = 0,25 x 672.272 + 0,75 x -102.941 = 90.862

A la vista de los resultados obtenidos, también por este segundo camino nos inclinaríamos por la apertura de la oficina, alcanzando un VAN equivalente cierto algo mayor que en la aproximación anterior.

3.4. Una tercera aproximación: Ajuste del tipo de descuento

Nos centraremos aquí en el escenario intermedio definido desde un primer momento como más probable (tabla 2). En este caso identificaremos las cifras correspondientes a este escenario como "esperadas", y calcularemos el VAN utilizando el tipo de descuento ajustado por el riesgo propuesto por el enunciado (R = K + P = 2% + 4% = 6%).

Escenario intermedio (entrada en UA en el año 02) – Sin vender hasta haber entrado

Año	Δ V	Δ CV	Δ CF	Δ BAII	Δ Imp	Δ BAIdI	Δ GF
02	0	0	150.000	-150.000	-45.000	-105.000	-105.000
03	1.000.000	850.000	450.000	-300.000	-90.000	-210.000	-210.000
04	1.500.000	1.125.000	450.000	-75.000	-22.500	-52.500	-52.500
05	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
06	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
07	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
						VAN (R)	101.994

Tabla 2

Y veamos qué ocurriría si aplicando la misma lógica analizamos la decisión de apertura de la oficina vendiendo desde el primer año (tabla 3):

Escenario intermedio (entrada en UA en el año 02) – Empezando a vender en 02

Año	Δ V	Δ CV	Δ CF	Δ BAII	Δ Imp	Δ BAIdI	Δ GF
02	1.000.000	950.000	450.000	-400.000	-120.000	-280.000	-280.000
03	1.500.000	1.275.000	450.000	-225.000	-67.500	-157.500	-157.500
04	1.500.000	1.125.000	250.000	125.000	37.500	87.500	87.500
05	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
06	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
07	1.500.000	975.000	250.000	275.000	82.500	192.500	192.500
						VAN (R)	101.171

Tabla 3

Como puede observarse, también este camino nos llevaría claramente a aceptar el proyecto.

3.5. Discusión de los resultados obtenidos

A la vista de los resultados obtenidos por los tres caminos propuestos, habría que concluir que la apertura de la oficina a finales de 01 es interesante, es decir, aporta valor con respecto a la decisión alternativa de no hacerlo. Los resultados alcanzados a través de la técnica de árboles de decisión combinada con la penalización del VAN son razonablemente coherentes en las dos alternativas contempladas (con VANes ajustados por el riesgo de 71.308 en el primer camino y 90.862 en el segundo), y lo son también a su vez con la cifra obtenida al aplicar el criterio clásico del Ajuste del tipo de descuento (que conduce a un VAN ajustado de 101.994 en la mejor de las opciones contempladas).

Interesante también, en nuestra opinión, es la constatación de que el Ajuste del tipo de descuento no discrimina bien entre las alternativas asociadas a la decisión de si empezar a vender o no en el año 02 en el caso de no entrar en la UA al final de 01, mientras que con la técnica de los árboles de decisión combinada con la penalización del VAN la diferencia entre ambas alternativas es importante (57.369 en el caso de no vender hasta haber entrado; frente a -29.692 en el caso de vender desde el primer momento). Lo que consideramos una prueba clara de que esta última técnica permite discriminar mejor entre alternativas en las que el resultado esperado es similar cuando la variabilidad es diferente (es de resaltar el hecho de que el VAN pesimista sería de -102.941 en el caso de no empezar a vender en 02 si no se ha producido la entrada en 01; que se convertirían en -274.510 –y podrían incluso convertirse en una cifra inferior, ya que sería aceptable en esta alternativa aplicar la horquilla en la parte negativa, al haber ventas involucradas- caso de empezar a vender en dicho año).

4. CONCLUSIONES

La utilización del VAP en los árboles de decisión puede ser una combinación interesante sobre la que se puede seguir trabajando, descubriendo posibilidades nuevas, así como superando algunas limitaciones. El campo es atractivo, y parece fácil introducir la estadística bayesiana o la simulación (Gómez-Bezares, 2012).

El VAP nos permite trabajar con equivalentes ciertos y la idea clave es ir situando en los nudos del árbol dichos equivalentes ciertos.

En este artículo proponemos potenciar la utilización en la práctica de los árboles de decisión, un instrumento que se ha usado mucho, con indudable éxito, para la toma de decisiones financieras, pero que hoy parece, en ocasiones, algo olvidado. Sin embargo, puede ser una atractiva alternativa complementaria al uso de las opciones reales. Y el VAP puede resultar un complemento interesante para su utilización.

BIBLIOGRAFÍA

BROTHERSON, W.T., K.M. EADES, R.S. HARRIS y R.C. HIGGINS (2014): “Company valuation in mergers and acquisitions: how is discounted cash flow applied by leading practitioners?”, *Journal of applied finance*, vol. 24, nº 2, págs. 43-51.

BURNS, R.M. y J. WALKER (2009): "Capital budgeting surveys: the future is now", *Journal of applied finance*, vol. 19, nº 1-2, págs. 78-90.

DE ANDRÉS, P., G. DE FUENTE y P. SAN MARTÍN (2015): "Capital budgeting practices in Spain", *Business research quarterly*, vol. 18, nº 1, págs. 37-56.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1993): "Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions", en Aggarwal, R., ed., *Capital budgeting under uncertainty*, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, págs. 91-102.

GÓMEZ-BEZARES, F. (2010): "Valoración en tiempos de crisis", *Revista española de capital riesgo*, nº 1/2010, págs. 17-24.

GÓMEZ-BEZARES, F. (2012): *Elementos de finanzas corporativas*, Desclée de Brouwer, Bilbao.

GÓMEZ-BEZARES, F. (2017): "Presente y futuro de las finanzas corporativas", *De Computis, revista española de historia de la contabilidad*, vol. 14, nº 27, págs. 101-130.

MAGEE, J.F. (1964): "Decision trees for decision making", *Harvard business review*, julio-agosto, págs. 126-138.

SANTIBÁÑEZ, J., F. GÓMEZ-BEZARES y J.A. MADARIAGA (2019): "Valor actualizado penalizado: penalización lineal por tramos", *Boletín de estudios económicos*, vol. 74, nº 226, págs. 191-221.

OPCIONES REALES Y PENALIZACIÓN LINEAL PARA VALORAR INVERSIONES

Fernando Gómez-Bezares, José Antonio Madariaga y Javier Santibáñez*
Publicado en *Revista Española de Capital Riesgo*, nº 4/2020, págs. 51-70

1. INTRODUCCIÓN

Una de las hipótesis fundamentales en las que se asientan las modernas finanzas es la aversión al riesgo, que obliga a considerar la variabilidad del resultado (y no solo el valor esperado) en la toma de decisiones. Los criterios clásicos de tratamiento del riesgo, que pueden encontrarse en cualquier manual de finanzas (véase, por ejemplo, Brealey, Myers y Allen, 2007) y que aparecen también de manera algo más velada en nuestro Plan General de Contabilidad (PGC, 2007), son los conocidos como Ajuste del tipo de descuento y Equivalente de certeza. El primero propone penalizar el interés de los proyectos a través del denominador del Valor Actualizado Neto, VAN (exigiendo una rentabilidad más alta a mayor riesgo); mientras que el segundo penaliza los numeradores de dicho VAN, convirtiendo los flujos esperados en sus "equivalentes ciertos", para descontar después dichos flujos al tipo de interés sin riesgo.

En la primera parte de esta introducción recordaremos la génesis y desarrollo del Valor Actualizado Penalizado (VAP), que representa una alternativa complementaria a los criterios clásicos de tratamiento del riesgo, y que trata de obtener un VAN equivalente cierto. Para algunos lectores, tal vez, puede ser interesante leer deprisa este resumen de contextualización, para "aterrizar" en la última parte de esta introducción y pasar después al "caso".

Hace ya más de treinta años, el profesor Gómez-Bezares (1984), apoyándose en el trabajo de Markowitz (1959), y relacionado con Baumol (1963), propuso un criterio alternativo (complementario) que consistía en penalizar directamente el VAN esperado con su riesgo (realizando todos los cálculos previos con el tipo de interés sin riesgo, para evitar incurrir en dobles penalizaciones). Se trata de conseguir el mismo resultado (considerar el riesgo, entendido como variabilidad, como un aspecto negativo de los proyectos) pero de una manera distinta, lo que exige la estimación de un parámetro diferente a los necesarios para utilizar los criterios clásicos.

En Gómez-Bezares (1986a) se proponen distintos métodos de penalización (lineal, por cociente, …) y se analizan las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos. Con carácter general, las ventajas de la penalización lineal desde un punto de vista práctico son claras: permite interpretar el resultado como un VAN equivalente cierto (frente a alternativas como la penalización por cociente) y facilita la estimación del parámetro de penalización (supuesta normalidad de la distribución del VAN); por contra, presenta como desventaja el hecho de que puede demostrarse que, en las condiciones descritas (aversión al riesgo y VAN normalmente distribuido), los individuos presentaríamos curvas (cóncavas desde arriba) y no rectas de indiferencia (problema que, como veremos, tratamos en un artículo posterior). Este trabajo se

* Profesores del Departamento de Finanzas y Economía de Deusto Business School.

completa con Gómez-Bezares (1986b, 1987 y 1988); en todos ellos se desarrolla la penalización del VAN, se proponen distintos métodos para hacerlo y se reflexiona sobre la importancia de aportar un método que trate de "objetivar" en la medida de lo posible la decisión de inversión, colaborando en el alineamiento de los intereses de gestor y propietario, que "sufren" de manera distinta las consecuencias del riesgo; y se señala cómo la simplificación de asumir rectas en lugar de curvas de indiferencia puede salvarse aplicando a la penalización una lógica relacionada con el CAPM para inversiones importantes, modulando el valor de t –parámetro de penalización- en función del riesgo que el proyecto "aporta" a la empresa.

En Gómez-Bezares (1989) y en Gómez-Bezares (1993) se completa la visión anterior relajando la hipótesis de normalidad del VAN. En muchas ocasiones, puede bastar con que el decisor "se atreva" a definir los escenarios más pesimista, más optimista y más frecuente (y en su caso, cuál de los escenarios extremos es más probable). A partir de los mismos, y deduciendo una formulación coherente con la distribución beta incompleta, pueden obtenerse fórmulas sencillas de penalización que mantienen la interpretación de "VAN equivalente cierto", entendido como mínimo garantizado con una determinada probabilidad. Además, la formulación permite considerar no solo la hipótesis de simetría en la distribución del resultado, sino también posibles asimetrías a izquierda o derecha.

Dos años más tarde, Santibáñez (1995) desarrolla una generalización del criterio, proponiendo un camino para aplicarlo en decisiones reales cuando el VAN no siga ninguna distribución conocida (es la que se denomina "visión histogramática" del VAP, que exige un conocimiento relativamente profundo del comportamiento del proyecto estudiado; lo que, combinado con su relativa complejidad de aplicación, puede apartarlo de su utilización en el mundo real).

En Laka y Santibáñez (1995) se hace una recopilación de los trabajos anteriores y se plantea la posibilidad de aplicar la lógica del Valor Actualizado Penalizado a otro de los criterios más frecuentemente utilizados en el análisis de viabilidad de proyectos de inversión, la TRI (Tasa de Rentabilidad Interna). En determinadas condiciones, la TRI es un criterio "tan solvente" como el VAN, presentando la ventaja de ser más utilizable en decisiones "estrictamente financieras" (entendiendo por tales las relacionadas con la gestión de carteras en los mercados de capitales). Supuesta la normalidad de las distribuciones teóricas (hipótesis que parece razonable en general; véanse, entre otros, Fama, 1976; Santibáñez, 1994; o Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 1994), la TRIP (Tasa de Rentabilidad Interna Penalizada) puede entenderse también como la rentabilidad equivalente cierta de una rentabilidad esperada sujeta a riesgo. Este paso permitirá en trabajos posteriores relacionar la lógica implícita en el VAP (que se convierte aquí en TRIP) con los criterios clásicos utilizados en el estudio de la performance en la gestión de fondos en los mercados de capitales (tal como veremos más tarde).

En un trabajo posterior (Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 2001) se apunta la base para superar el problema citado de la consideración implícita de rectas en lugar de curvas de indiferencia (siempre supuesta penalización lineal). En él, se enmarca el Valor Actualizado Penalizado en el contexto de toma de decisiones con riesgo dentro de la lógica de la Teoría de cartera de Markowitz y se sugiere la posibilidad de entender una curva de indiferencia como una sucesión de tramos de distintas rectas engarzados entre sí (reflexión que ya aparecía sugerida en trabajos anteriores). La idea que se defiende es que, en ocasiones, es aceptable suponer que en una "curva" no hay cambio de pendiente para rangos suficientemente pequeños del valor de la variable que figura en abscisas. Veremos que este problema se aborda de manera monográfica en un trabajo posterior (Santibáñez, Gómez-Bezares y Madariaga, 2019).

En Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (2003) se analiza la coherencia de la TRIP con algunas medidas de performance utilizadas habitualmente en el estudio del desempeño de títulos y carteras en Bolsa y que encuentran su base y justificación en la Teoría de cartera de Markowitz, (1952 y 1959) y en el CAPM (Sharpe, 1964 y 1970; Lintner, 1965; Fama, 1968; entre otros) (los conocidos índices de Sharpe, 1966, Treynor, 1965, y Jensen, 1968 y 1969), analizando las ventajas e inconvenientes de cada una de ellas y estudiando en qué condiciones puede resultar más adecuada la utilización de una u otra medida.

El trabajo anterior se completa en Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (2004), en el que los autores pasan a comparar la TRIP con algunas nuevas medidas de performance que se basan a su vez en las medidas clásicas (los mencionados índices de Sharpe, Treynor y Jensen): el índice M^2 (Modigliani y Modigliani, 1997 y Modigliani, 1997), en sus dos versiones (para riesgo total y para riesgo sistemático); y el ratio de información (que se basa a su vez en el estudio de la probabilidad de batir al benchmark relacionando el tracking error medio con su desviación típica; puede verse Muralidhar, 2000 y 2001). Además, y en línea con lo propuesto por Modigliani (1997), se aporta una alternativa a la TRIP original: la TRIP para beta.

Algunos años después, Gómez-Bezares, Madariaga, Santibáñez y Apráiz (2007a) continúan en la línea de los dos trabajos anteriores analizando y discutiendo las ventajas e inconvenientes de las distintas medidas aludidas con relación a la TRIP desde un punto de vista empírico. En concreto, se analiza la coherencia de las jerarquizaciones obtenidas con las distintas medidas en el análisis de la performance de carteras, así como la posibilidad de batir al mercado utilizando dichas jerarquizaciones en un periodo posterior; todo ello aplicado a datos reales del mercado de capitales. Las principales conclusiones apuntarían a una elevada coherencia entre los rankings obtenidos con las distintas medidas y a la posibilidad de batir al mercado utilizando dicha información (lo que podría entenderse como evidencia en contra de la hipótesis de eficiencia del mercado en su forma débil).

Este trabajo se completa a su vez con Gómez-Bezares, Madariaga, Santibáñez y Apráiz (2007b), en el que trata de profundizarse en las conclusiones del anterior. En él se estudia la sensibilidad de los resultados obtenidos ante cambios en algunos aspectos metodológicos (cambios en la medida utilizada como tipo de interés sin riesgo; utilización de benchmarks distintos de la cartera de mercado; y definición de un periodo de análisis básico distinto para el cálculo de las rentabilidades –semana en lugar de mes-); y se analiza de una manera más rigurosa desde el punto de vista estadístico el conocido como "fenómeno de persistencia" (estudiado, entre otros, por Malkiel, 1995; Busse y Irvine, 2006; o Kosowski, Timmermann, Wermers y White, 2006), tratando de ver hasta qué punto los resultados pudieran deberse al azar. El estudio apunta a una robustez suficiente en lo que se refiere a la metodología utilizada y corrobora el interés de tomar decisiones basadas en rankings confeccionados con las medidas propuestas (en la medida en que parece corroborarse el citado "fenómeno de persistencia").

También Gómez-Bezares y Gómez-Bezares (2012, 2013 y 2015) estudian la penalización lineal y sus ventajas, tanto en el caso del VAP como de la TRIP, profundizando en estos conceptos.

En Santibáñez (2018) se intenta relacionar los resultados obtenidos en el estudio de proyectos de inversión a través de un criterio clásico como el Ajuste del tipo de descuento con los alcanzados a través del VAP (en la forma que nos parece más adecuada con carácter general, la penalización lineal). Ante la dificultad de realizar estimaciones fiables de las primas de riesgo, se propone una metodología de análisis sencilla que permite estudiar, en decisiones de inversión reales, la relación de los resultados obtenidos con la lógica implícita en el VAP.

En Santibáñez, Gómez-Bezares y Madariaga (2019) se desarrolla de manera más rigurosa la solución que desde un punto de vista intuitivo se apuntaba en trabajos anteriores con relación al problema ya citado asociado a la penalización lineal: la asunción de rectas en lugar de curvas de indiferencia. En este artículo tratan de aprovecharse las ventajas asociadas a la penalización lineal (fundamentalmente relacionadas con la facilidad de interpretación del parámetro de penalización), superando el problema teórico apuntado (tal como hemos dicho, puede demostrarse que, supuesto enemigos del riesgo y distribuciones normales de resultado, los individuos presentamos curvas de indiferencia cóncavas vistas desde arriba). Para ello, se propone un sistema de penalización lineal por tramos, y se aporta un sencillo algoritmo que permite su fácil implementación en la realidad empresarial.

Un año más tarde, Santibáñez, Goitia-Berriozabal y Madariaga (2020) proponen la utilización de la TRIP en el estudio de la decisión de financiación en la empresa. En los años cincuenta del siglo pasado, dos premios Nobel de Economía, Franco Modigliani y Merton Miller, revolucionaron la teoría financiera, afirmando que la única decisión relevante es la de inversión: en mercados ideales, no habría forma de crear valor a través de la decisión de financiación (véanse Modigliani y Miller, 1958 y 1963; y Miller, 1977). Pero las imperfecciones de mercado (fiscales, relacionadas con la falta de transparencia informativa en dichos mercados, etc.), junto con los problemas para medir la propia aversión al riesgo, pueden justificar que se dediquen recursos a intentar determinar si en momentos concretos puede ser mejor optar por una determinada estructura financiera. En este artículo los autores trabajan sobre un modelo sencillo que relaciona los conceptos de apalancamiento operativo y apalancamiento financiero, utilizando la TRIP como medida de la posible creación de valor asociada a la mencionada decisión de financiación.

Finalmente, en este resumen de contextualización del presente trabajo, nos referiremos al último artículo que hemos publicado con relación al tema, Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez (2020), en el que combinamos el VAP con la utilización de otra herramienta de análisis muy potente como son los árboles de decisión (pionero en la utilización de la técnica en el ámbito de la viabilidad de proyectos de inversión es el trabajo de Magee, 1964; véase también Gómez-Bezares, 2012). En el artículo citado se comprueba cómo la metodología propuesta puede aplicarse a casos reales de cierta complejidad con resultados satisfactorios, pudiendo considerarse como una alternativa complementaria a la utilización de opciones reales.

En este artículo continuaremos la línea iniciada en el anterior. Analizaremos la posibilidad de aplicar de manera combinada la penalización del VAN con los árboles de decisión, centrándonos en algunos problemas estrictamente prácticos y tratando de proponer una metodología que combine adecuadamente rigor y simplicidad en su aplicación. Y todo ello lo haremos aplicando la metodología propuesta a un caso práctico extraído del mundo real.

Recordemos brevísimamente la formulación básica propuesta en trabajos anteriores y que extraemos directamente del último artículo citado (Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 2020). Así, la penalización lineal del VAN supone aplicar la siguiente fórmula:

$$VAP = \mu - t \cdot \sigma \tag{1}$$

donde VAP es el Valor Actualizado Penalizado; μ es el VAN medio y σ su desviación típica (descontado todo al tipo sin riesgo, para no incurrir en una doble penalización); la t es el parámetro de penalización, que deberá ser mayor que cero para enemigos del riesgo. Si

aceptamos la normalidad de la distribución del VAN, la interpretación del parámetro t es sencilla: determina la probabilidad que queda a la derecha e izquierda del valor que finalmente se tomará como referencia para tomar la decisión (el VAP), por lo que implícitamente establece el nivel de garantía exigido a que dicho valor se produzca como mínimo (valores altos de t indican exigencias mayores de que el valor tomado como referencia se produzca como mínimo; y viceversa).

Si aceptamos como adecuado un valor de t igual a 1,5 y relajamos la hipótesis de normalidad; y asumiendo que podemos definir el valor máximo (B), el mínimo (A) y el valor más frecuente, así como las posibles asimetrías que puedan producirse en el resultado, podemos llegar a:

$$VAP = 0{,}25 \cdot B + 0{,}75 \cdot A \tag{2}$$

para el caso de distribuciones simétricas. Para distribuciones asimétricas, con asimetría a la derecha tendríamos:

$$VAP = 0{,}05 \cdot B + 0{,}95 \cdot A \tag{3}$$

Y para asimetría a la izquierda:

$$VAP = 0{,}45 \cdot B + 0{,}55 \cdot A \tag{4}$$

Estos valores se obtienen de la distribución beta incompleta (Gómez-Bezares, 1993).

2. EL CASO: “Agencias Inmobiliarias”

El caso que utilizaremos para realizar la reflexión está inspirado de manera bastante fiel en una experiencia real propuesta hace algunos años por el profesor Luis Abril, a quien aprovechamos una vez más la oportunidad para agradecerle su deferencia al permitirnos utilizar algunos de sus materiales en distintos trabajos publicados en el departamento. El caso, tomado de Santibáñez y Gómez-Bezares (2014), podría resumirse en los términos que se proponen a continuación.

Don Tadeo Ruiz es el gerente de “Agencias Inmobiliarias, S.A.”, empresa especializada en encontrar compradores para fincas urbanas y rústicas. A tal empresa llegó un buen día un cliente que quería vender tres de sus propiedades. Los precios que quería recibir por ellas son:

1. Finca en Medina de Pomar	125.000 €
2. Chalet en Espinosa de los Monteros	250.000 €
3. Villa cerca de Arceniega	500.000 €

El Sr. Ruiz recibiría una comisión del 4% sobre cualquiera de ellas que consiguiera vender.

Pero el cliente, creyendo quizá que lograría un mayor esfuerzo por parte de Ruiz, le comunicó las condiciones siguientes:

- Ruiz debería vender la finca de Medina de Pomar primero. Si no conseguía hacerlo en un mes, el compromiso completo quedaría sin vigor, y no recibiría comisión alguna.

- De vender la finca de Medina en un mes, Ruiz recibiría por ella la comisión correspondiente, y esta opción:

    - Parar aquí sus esfuerzos.
    - Tratar de vender las otras dos propiedades bajo las mismas condiciones. Es decir, si vendiera una en un mes, cobraría la comisión y podría tratar o no de vender la tercera. Si no vendiera en un mes el chalet de Espinosa o la villa de Arceniega, no cobraría comisión sobre ninguna de las dos últimas, ni podría tratar de vender más.

Ruiz se disponía a analizar la propuesta que se le había hecho. Estimó los costes de su esfuerzo de venta y sus posibilidades, con base en experiencias pasadas, de vender cada propiedad al precio fijado por el cliente (véase tabla 1).

Propiedad	Costes	Probabil. de venta según Ruiz
Finca de Medina	4.000	0,7
Chalet de Espinosa	1.000	0,6
Villa de Arceniega	2.000	0,5

Tabla 1

La impresión que Ruiz tenía era que la venta de una propiedad concreta no haría ni más fácil ni más difícil vender las dos propiedades que quedasen. Los costes de venta, lógicamente, podrían evitarse eligiendo no aceptar el trato, pero de aceptarlo, se incurría en ellos independientemente de que la propiedad se vendiera o no.

Puesto que la finca de Medina era la primera a vender, Ruiz preparó, para su gobierno, la tabla 2.

	Probabilidad	Aceptar venta Finca Medina	Rechazar venta Finca Medina
Finca de Medina vendida	0,7	1.000	0
Finca de Medina no vendida	0,3	- 4.000	0
Valor esperado		- 500	0

Tabla 2

Así pues, con base en el valor esperado, el hecho de aceptar el intentar vender la finca de Medina no sería beneficioso en sí mismo. Con todo, Ruiz veía cómo el vender la finca de

Medina le permitiría intentar vender cualquiera de las otras dos propiedades de su cliente, punto este en el que sí podría encontrar su beneficio. Y, sin embargo, Tadeo Ruiz no supo cómo valorar esta oportunidad. Tadeo, en realidad, se encuentra ante lo que denominamos una "opción real". Trataremos de valorarla con nuestro procedimiento. De lo que se trata es de saber si merece la pena incurrir en un valor esperado negativo por tener la "opción" de poder seguir vendiendo el resto de propiedades.

3. RESOLUCIÓN de "Agencias Inmobiliarias"

3.1. Resumen de la información relevante

Comenzaremos realizando un breve resumen de la información relevante presentada.

- Ingresos, gastos y probabilidades (tabla 3):

Propiedad	Alias	Precio venta	Comisión (4% s/ Precio vta)	Coste esfuerzo comercial	Probab. venta
Medina Pomar	M	125.000	5.000	4.000	70%
Espinosa de los Monteros	E	250.000	10.000	1.000	60%
Arceniega	A	500.000	20.000	2.000	50%

Tabla 3

- Condiciones del contrato:

De manera resumida, las condiciones del contrato son las que se presentan en la figura 1.

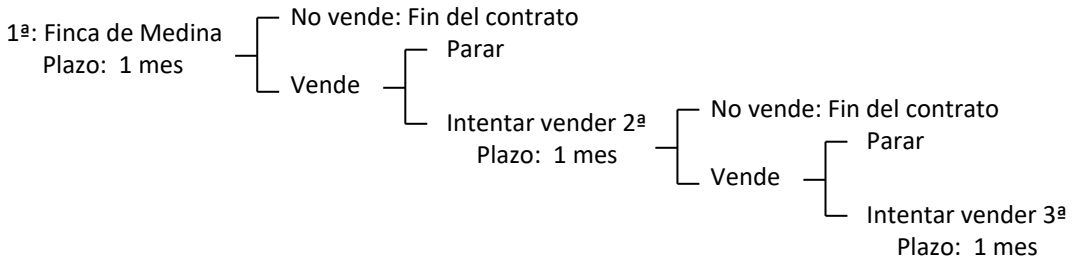


Figura 1

3.2. Resolución del caso: indiferencia ante el riesgo

Representemos en primer lugar el entramado de decisiones y apariciones del azar que incorpora el caso en un sencillo árbol de decisión (figura 2).

El siguiente paso es la valoración de cada una de las ramas a partir de la información que de manera resumida hemos presentado anteriormente. En este caso no parece tener sentido hablar de valores actualizados ni, en general, de valor del dinero en el tiempo, pues podemos fácilmente

suponer que las diferentes cifras se producen en un mismo momento (según los datos del problema, el caso quedará resuelto en un plazo no superior a tres meses). Podría utilizarse el coste de los fondos mensual, pero ello no cambiaría demasiado los resultados (y mucho menos en una situación como la actual, con tipos de interés cercanos a cero), y aportaría sin embargo un grado de dificultad adicional que consideramos innecesario. Por esta razón, aceptaremos la simplificación de que los valores manejados se producen en el mismo momento del tiempo. Por otro lado, y de cara a evitar complicaciones que se alejan de nuestro propósito, supondremos que las cifras presentadas incluyen ya los correspondientes efectos fiscales. Todo ello nos lleva a identificar el valor de las ramas con el cash-flow obtenido.

Presentaremos las cifras asociadas a cada final de rama "asumiendo que pasa todo lo necesario para llegar a dicho final de rama". Esto significa que no tendremos en cuenta en los cálculos que se presentan ahora las probabilidades de ocurrencia de las ramas que parten de un nudo aleatorio; ni cuestionaremos si se trata de un final de rama "razonable" o no (en función del entramado previo o posterior de apariciones del azar combinadas con decisiones que conducen al mismo). Así, por ejemplo, las ramas 7 y 11 deben presentar idéntico valor, ya que ambas suponen intentar vender todo y conseguirlo (aunque el orden en que ocurren los distintos sucesos no sea idéntico); y la rama 9 supondría intentar y vender la propiedad de Medina, intentar y vender la de Arceniega y parar aquí los esfuerzos.

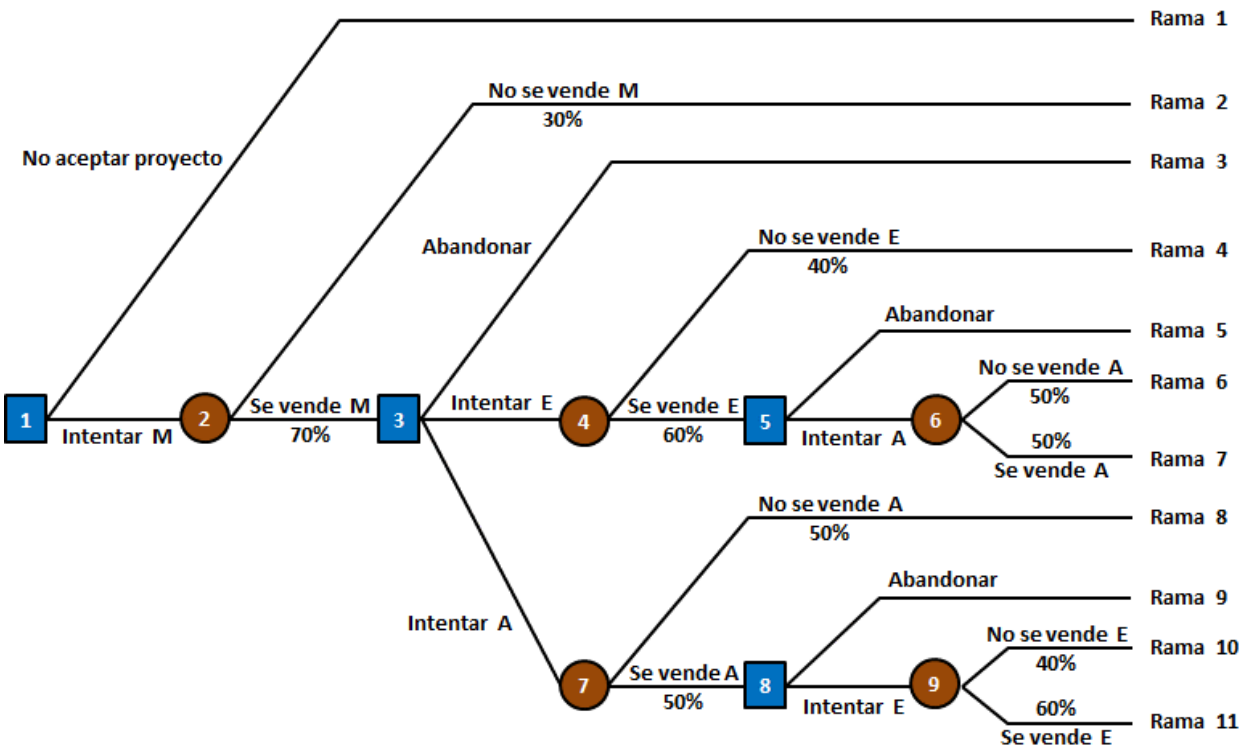


Figura 2

Los cálculos correspondientes a las distintas ramas son los siguientes:

Rama nº 1: 0 (no hacer nada; es la rama con la que implícitamente se comparan las demás)

Rama nº 2: -4.000

Rama nº 3: -4.000 + 5.000 = 1.000

Rama nº 4: -4.000 + 5.000 - 1.000 = 0

Rama nº 5: -4.000 + 5.000 -1.000 + 10.000 = 10.000

Rama nº 6: -4.000 + 5.000 -1.000 + 10.000 - 2.000 = 8.000

Rama nº 7: -4.000 + 5.000 -1.000 + 10.000 - 2.000 + 20.000 = 28.000

Rama nº 8: -4.000 + 5.000 - 2.000 = -1.000

Rama nº 9: -4.000 + 5.000 - 2.000 + 20.000 = 19.000

Rama nº 10: -4.000 + 5.000 - 2.000 + 20.000 - 1.000 = 18.000

Rama nº 11: -4.000 + 5.000 - 2.000 + 20.000 - 1.000 + 10.000 = 28.000

El siguiente paso consiste en insertar los valores obtenidos en el árbol, y resolver los nudos de derecha a izquierda. En una primera aproximación supondremos indiferencia al riesgo, por lo que valoraremos los nudos aleatorios en función de la esperanza matemática; mientras que en los nudos decisorios elegiremos aquella rama cuyo valor sea superior. El resultado es el que se presenta en la figura 3.

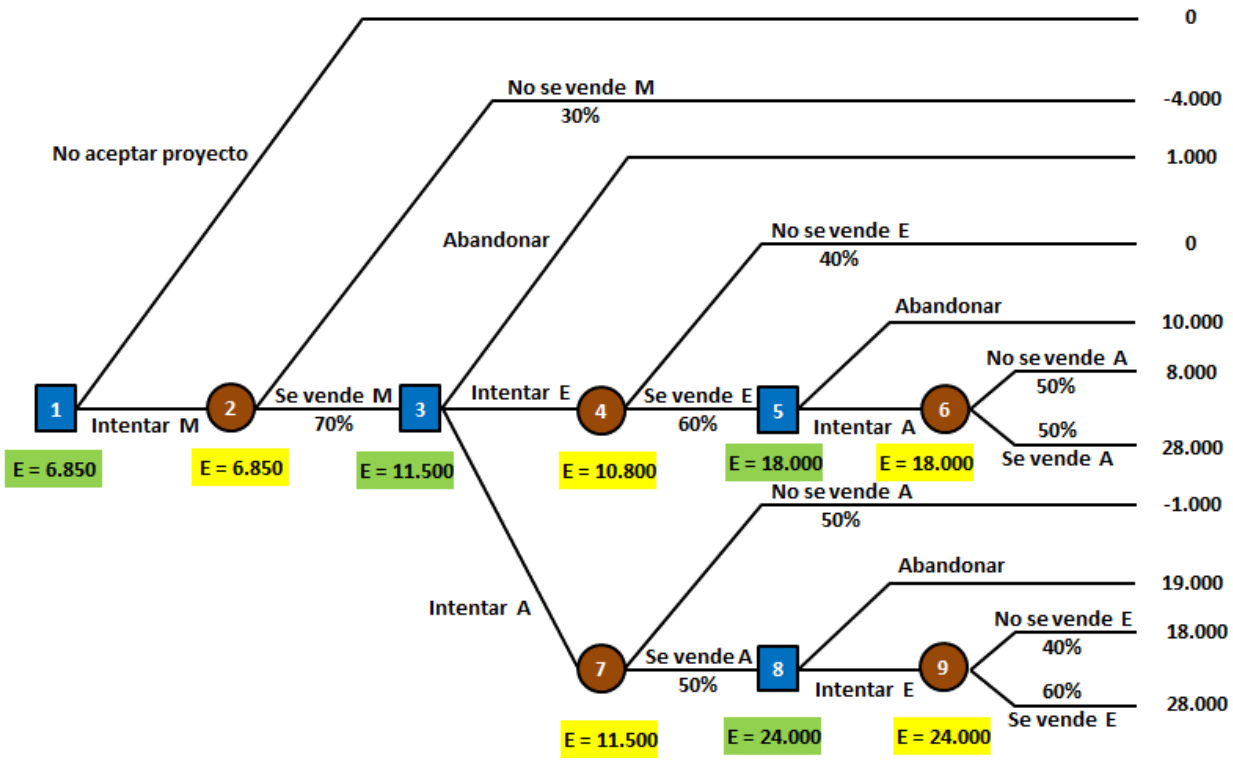


Figura 3

La decisión es acometer el proyecto, ya que el valor esperado del mismo es positivo. Para que el criterio de la esperanza matemática sea defendible, es necesario que el proyecto pueda considerarse repetitivo (dicho de otro modo, "que quede dentro de las operaciones normales de la

empresa"), ya que, en caso contrario, y si partimos de individuos enemigos del riesgo, deberíamos tener en cuenta la variabilidad en cada nudo, además del valor esperado.

Reflexionemos brevemente sobre la metodología propuesta. Una crítica clara que podría hacerse al planteamiento (al margen del tema indicado relacionado con la actitud frente al riesgo del decisor, que trataremos después) tiene que ver con la forma en que se aplica en la resolución el concepto de "variabilidad a la decisión", otro pilar básico de todo el razonamiento financiero moderno. Efectivamente, en el nudo 8, por ejemplo, se toma la decisión de "Intentar E" frente a "Abandonar" con cifras que no solo tienen en cuenta "lo que está por pasar en el tercer mes" sino también "lo ocurrido en los dos meses anteriores" (recuérdese que las cifras asociadas a cada rama implican aceptar que ha ocurrido todo lo necesario para llegar a ese fin de rama); sin embargo, es fácil justificar esta forma de razonamiento, que por otro lado simplifica enormemente la resolución del árbol: lo que tenemos en cuenta de más o de menos en las distintas ramas que nacen de un mismo nudo decisorio (lo ocurrido en meses anteriores) es idéntico en todas ellas, por lo que no introduce ninguna distorsión en la decisión correspondiente. En cualquier caso, puede ser interesante verificar lo anterior, para lo que veremos qué es lo que implícitamente supone actuar como se ha hecho en la figura 3. En realidad, el procedimiento propuesto equivale a "ir eliminando" los nudos decisorios, quedándonos con la mejor alternativa en cada caso; lo que puede también representarse de otras maneras distintas (véanse las figuras 4 y 5).

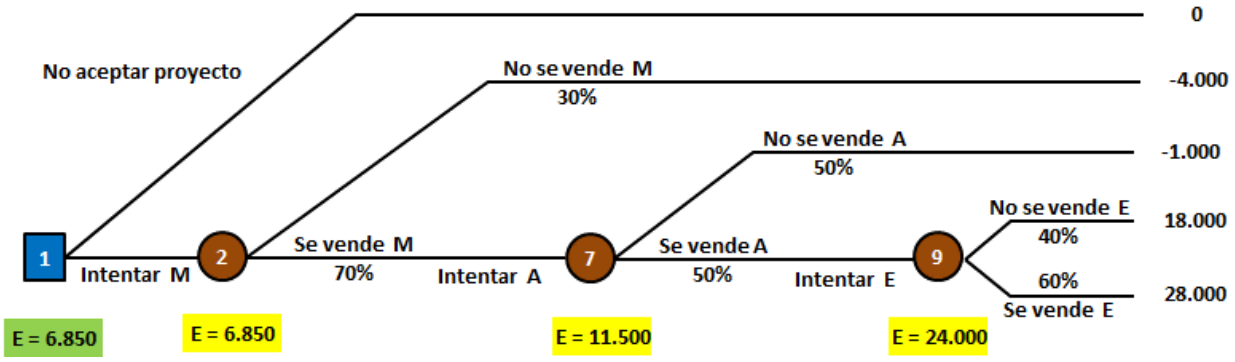


Figura 4

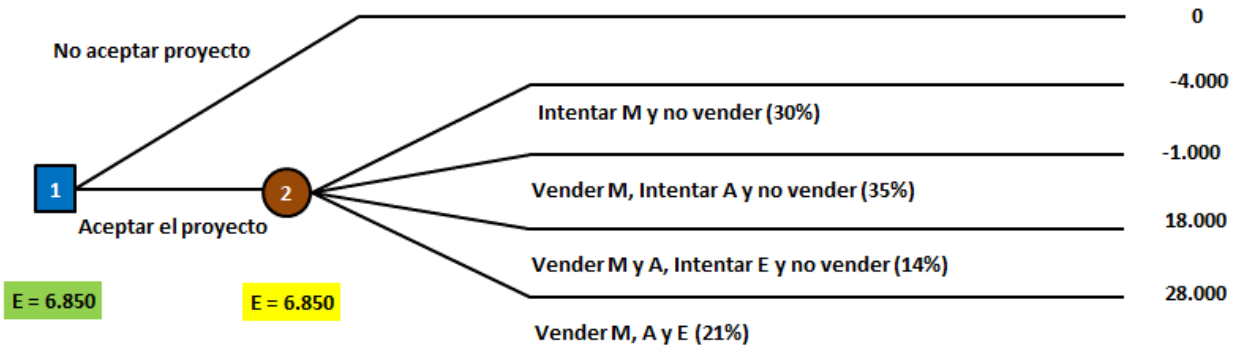


Figura 5

Una única aclaración relativa a la lógica implícita en el paso de la figura 4 a la figura 5: las probabilidades presentadas se obtienen por simple producto al tratarse de sucesos independientes.

A la vista de lo anterior, entendemos que queda claro que la forma de proceder resulta sencilla y adecuada.

3.3. Resolución del caso: aversión al riesgo supuesta hipótesis de normalidad

Volvamos ahora sobre el problema relativo al tratamiento del riesgo. La solución anterior puede encontrar su justificación en el hecho de que una empresa como la analizada se dedica a este tipo de actividad, por lo que el proyecto puede considerarse como repetitivo (es decir, todos los días se producen operaciones similares, en las que a veces las cosas salen bien y otras no; con lo que tiene sentido razonar en términos de esperanza matemática, que en último término se hace realidad por simple repetición). Si no fuera así, o si la dimensión del proyecto se saliera de lo que podríamos identificar como la "zona de operaciones normales de la empresa", podría resolverse el árbol utilizando el criterio del Valor Actualizado Penalizado (VAP). De entre las diversas formas posibles, nos inclinaremos, como ya hemos apuntado en la introducción, por la penalización lineal, que propone restar "t" veces la desviación típica del promedio de VAN:

$$VAP = \mu - t \cdot \sigma \tag{1}$$

donde el parámetro de penalización t tiene que ver con el nivel de garantía que exijamos al valor de referencia utilizado para juzgar el interés del proyecto. Nosotros utilizaremos una t = 1, lo que significa, supuesta normalidad de la distribución del VAN en cada nudo (más que discutible en este caso, pero que asumiremos de momento a efectos de simplificación), que el VAP obtenido es el VAN mínimo garantizado con un 84% de probabilidad, aproximadamente. Los resultados de la aplicación de esta metodología son los que se presentan en la figura 6.

Como puede verse, si no puede considerarse el proyecto dentro de las operaciones normales de la empresa (con lo que el criterio de la esperanza matemática de las unidades monetarias deja de ser justificable), y si utilizamos el VAP como criterio de tratamiento del riesgo con un valor de t igual a la unidad (que no supone una aversión exagerada al riesgo), el proyecto deja de ser interesante. También algunas decisiones intermedias cambian con respecto a las que se tomarían razonando en términos de promedio, tal como puede comprobarse comparando los dos árboles presentados (figuras 3 y 6).

Lo dicho con respecto a la solución alcanzada con el criterio de la esperanza matemática relativo a la variabilidad a la decisión sería también aplicable en esta alternativa: en los nudos decisorios, la elección entre las ramas implicadas tiene en cuenta no solo "lo que está por pasar", sino también "lo ocurrido anteriormente"; pero, nuevamente, lo que consideramos de más o de menos es idéntico en todas las ramas implicadas, por lo que el procedimiento no introduce ninguna distorsión en cuanto a la decisión (aunque sí en lo que se refiere a las cifras manejadas). Con todo, podría pensarse que el procedimiento penaliza de manera acumulativa en varios puntos del desarrollo, por lo que comprobaremos qué ocurre si replicamos el proceso realizado cuando no considerábamos el riesgo, es decir, el proceso consistente en eliminar en cada paso los nudos decisorios, "recuperando" la variabilidad en el paso siguiente (figuras 7 y 8).

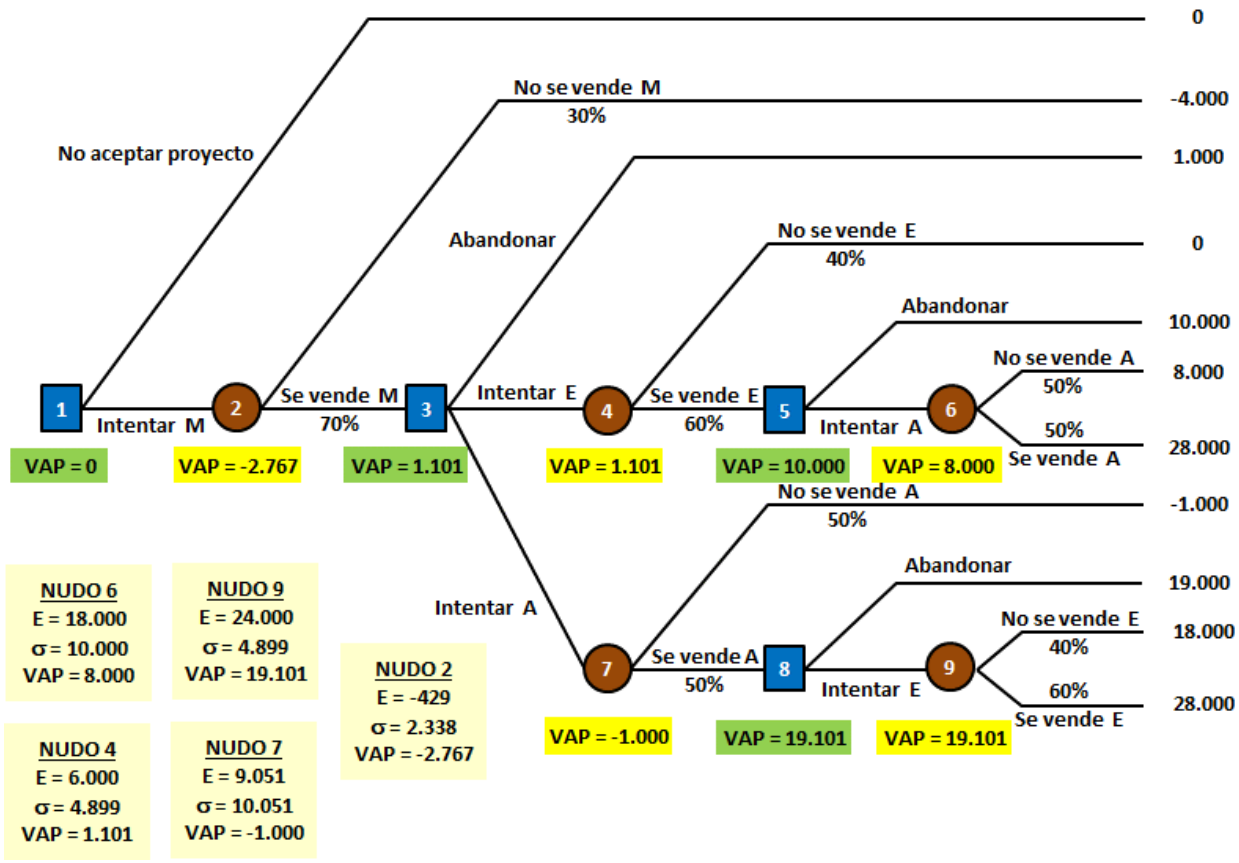


Figura 6

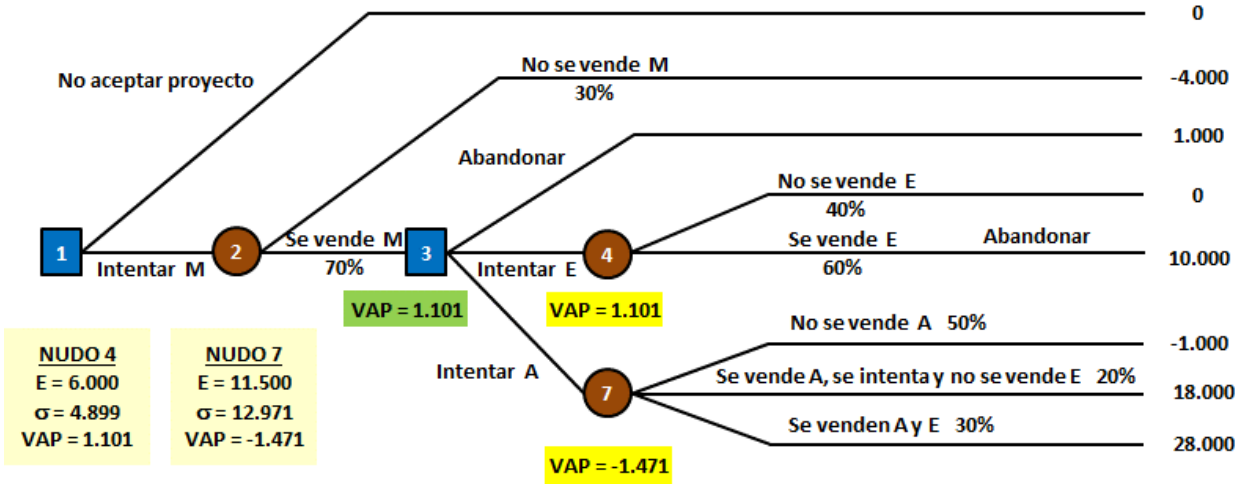


Figura 7

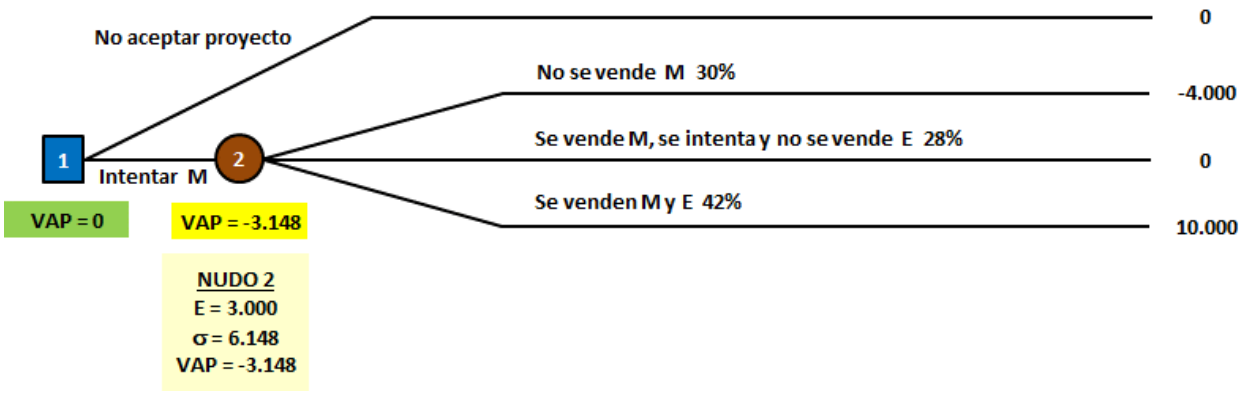


Figura 8

Puede verse que por este camino la decisión es en este caso totalmente coherente con la anterior en todos los pasos, si bien las cifras manejadas en cada uno de ellos son ligeramente distintas: de hecho, es tratando de evitar la "doble penalización" (segundo camino, "recuperando" en todo momento la variabilidad asociada a los nudos aleatorios) cuando obtenemos VAPs ligeramente inferiores a los alcanzados en el planteamiento original.

En nuestra opinión, son perfectamente defendibles ambas alternativas (recuérdese que el VAP puede entenderse como un VAN equivalente cierto; por lo que, a todos los efectos, "resumiría en cada momento la información considerada"), aunque nos decantaríamos por este segundo camino (recuperar la variabilidad en cada nudo aleatorio una vez resueltos los distintos nudos decisorios), que de alguna manera es "más limpio" en lo que se refiere al tratamiento del riesgo (aunque introduce algún mayor grado de dificultad).

3.4. Resolución del caso: aversión al riesgo y distribución beta incompleta

Con relación a la hipótesis de normalidad, y tal como puede verse, no parece que dicha hipótesis tenga demasiado sentido en un caso como el que nos ocupa, en el que el VAN obtenido en cada nudo aparece como una variable discreta. Sin embargo, es fácil también deducir que las cifras manejadas no son las únicas posibles, sino "las más representativas de un conjunto más amplio de valores"; con ello queremos decir que lo que no parece razonable es suponer que el coste del esfuerzo comercial pueda tomar solo un valor, ni tampoco que el precio de venta sea único para cada una de las propiedades involucradas. Probablemente, existe algún margen en el comportamiento de las dos variables relativas a cada propiedad, indicándose, eso sí, una cierta asimetría en algunos de los casos contemplados (Medina y Espinosa; en ambos casos, se trataría de asimetría a la izquierda, al aparecer como más probables los valores máximos). Lo anterior podría justificar una solución apoyada en la distribución beta incompleta como la que presentamos a continuación (en una línea similar a la que utilizábamos en el trabajo previo ya citado, Gómez-Bezares, Madariaga y Santibáñez, 2020).

Recalcularemos los valores de las distintas ramas implicadas suponiendo ahora que los costes del esfuerzo comercial presentan una horquilla del ±20% con respecto a los valores centrales

presentados; y que existe la posibilidad de rebajar hasta un 10% el precio de venta (y, por tanto, la comisión obtenida por la venta). Definimos así, para cada final de rama, un escenario pesimista (el coste del esfuerzo comercial se dispara un 20% y el precio de venta se reduce un 10%) y un escenario optimista (el coste del esfuerzo comercial se reduce un 20%, manteniéndose el precio de venta original). Y aplicaremos la fórmula 2 en el cálculo del valor de cada rama, lo que supone asumir distribuciones simétricas. Los resultados obtenidos por este procedimiento son los que se presentan en la figura 9, en la que se valoran los nudos con las fórmulas 2 y 4, según corresponda en cada caso en función de las probabilidades de ocurrencia de las distintas ramas implicadas (los distintos cálculos realizados en las figuras 9, 10 y 11 pueden verse en el apéndice que se presenta al final del artículo).

En las figuras 10 y 11 se resuelve una vez más el árbol de manera coherente con las anteriores, "recuperando" en cada nudo aleatorio la variabilidad una vez resueltos los nudos decisorios y tratando así de evitar la posibilidad de incurrir en dobles penalizaciones.

Tal como puede comprobarse, el proyecto se rechazaría también en el caso de utilizar la penalización lineal sobre la base de la distribución beta incompleta, obteniendo resultados relativamente parecidos a los alcanzados cuando se acepta la normalidad de las distribuciones.

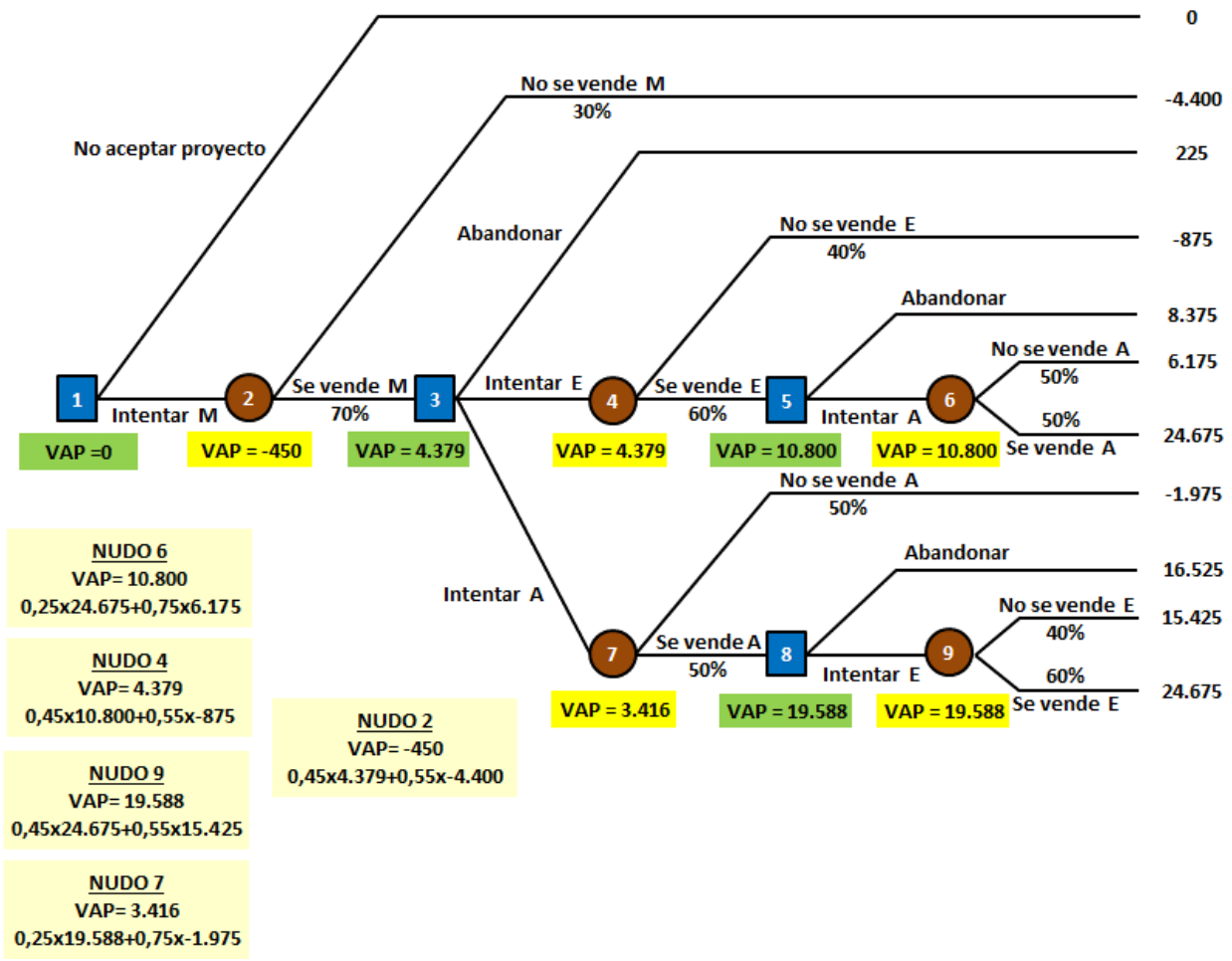


Figura 9

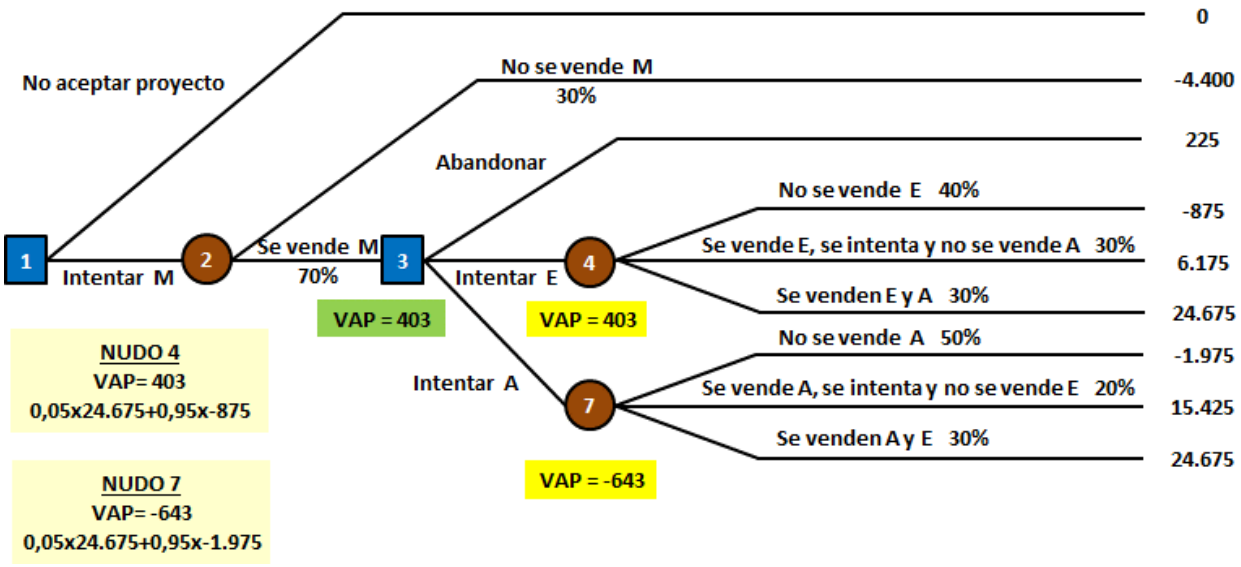


Figura 10

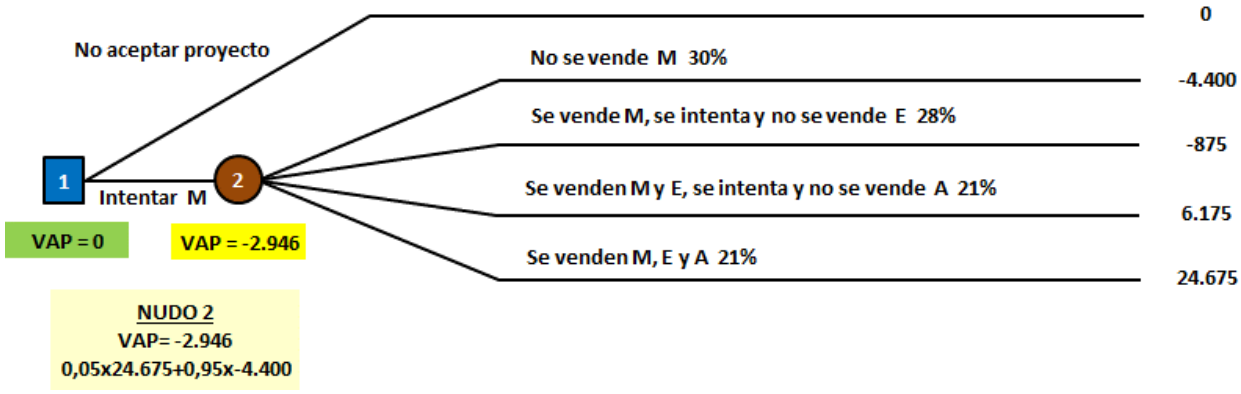


Figura 11

Como el lector habrá observado, la consideración de la asimetría en estas figuras es discutible. Nos hemos fijado en el valor más probable para definir la asimetría, manteniendo así una metodología clara que facilite el seguimiento del problema. En todo caso, la utilización de distribuciones como la normal o la beta incompleta en este caso puede justificarse solo como una aproximación, y el lector debe entenderlo principalmente como un ejemplo.

3.5. Resumen y discusión de los resultados

Resumimos en un sencillo cuadro los resultados obtenidos a través de las diferentes aproximaciones para facilitar su comparación (tabla 4).

		Figura 3	Figura 6	Figuras 6, 7 y 8	Figura 9	Figuras 9, 10 y 11
Nudo	**Tipo**	**Indiferencia al riesgo**	**Distribución normal 1**	**Distribución normal 2**	**Beta incompleta 1**	**Beta incompleta 2**
Nudo 6	Aleatorio	18.000,00	8.000,00	8.000,00	10.800,00	10.800,00
Nudo 5	Decisorio	18.000,00 Intentar A	10.000,00 Abandonar	10.000,00 Abandonar	10.800,00 Intentar A	10.800,00 Intentar A
Nudo 9	Aleatorio	24.000,00	19.101,00	19.101,00	19.588,00	19.588,00
Nudo 8	Decisorio	24.000,00 Intentar E	19.101,00 Intentar E	19.101,00 Intentar E	19.588,00 Intentar E	19.588,00 Intentar E
Nudo 4	Aleatorio	10.800,00	1.101,00	1.101,00	4.379,00	403,00
Nudo 7	Aleatorio	11.500,00	-1.000,00	-1.471,00	3.416,00	-643,00
Nudo 3	Decisorio	11.500,00 Intentar A	1.101,00 Intentar E	1.101,00 Intentar E	4.379,00 Intentar E	403,00 Intentar E
Nudo 2	Aleatorio	6.850,00	-2.767,00	-3.148,00	-450,00	-2.946,00
Nudo 1	Decisorio	6.850,00 Aceptar	0,00 Rechazar	0,00 Rechazar	0,00 Rechazar	0,00 Rechazar
Valor que quita el riesgo			9.617,00	9.998,00	7.300,00	9.796,00

Tabla 4

A la vista de la mencionada Tabla 4 pueden extraerse algunas conclusiones sencillas:

- En el caso analizado, la consideración del riesgo en la resolución del árbol hace que el proyecto sea rechazado (mientras que si pudiera entenderse que el proyecto está dentro de las "operaciones normales" sería interesante, aportaría valor a la empresa). Como era de esperar, las decisiones intermedias que van tomándose en los nudos decisorios no son siempre las mismas, dependiendo de si consideramos o no la aversión al riesgo en la valoración de los nudos aleatorios y de la forma en que penalicemos (suponiendo normalidad o distribución beta incompleta).

- Tampoco es indiferente desde el punto de vista de los resultados y conclusiones obtenidos resolver el árbol "retomando en cada punto" la variabilidad original o trabajando con los valores obtenidos en pasos anteriores. Recuérdese que, tanto en la resolución considerando normalidad en las distribuciones de resultado (hipótesis implícita cuando valoramos teniendo en cuenta solo el promedio y la desviación típica de resultado), como en la que se asume la lógica de la distribución beta incompleta (considerando así la posibilidad de que existan asimetrías en las distribuciones de resultado, como es nuestro caso), hemos resuelto el árbol por dos caminos distintos: en una primera aproximación se utilizan los valores obtenidos en nudos "posteriores" en la valoración de los nudos "anteriores" (es decir, se asume a todos los efectos que los valores alcanzados en la valoración de los nudos aleatorios resumen de manera adecuada la variabilidad implícita en ellos, siguiendo al pie de la letra la lógica de los "equivalentes ciertos"); mientras que en una segunda aproximación "recuperamos la variabilidad" asociada a los nudos aleatorios en nudos anteriores una vez resueltos los nudos decisorios correspondientes. De

hecho, y siempre en nuestro caso, la valoración del proyecto es inferior en esta segunda aproximación (tanto para distribución normal como para beta incompleta).

- Al considerar la aversión al riesgo, el proyecto se rechaza tanto si apoyamos nuestro razonamiento en la distribución normal como si lo hacemos en la distribución beta incompleta. La primera opción (hipótesis de normalidad) resulta más exigente, es decir, penaliza más en función del riesgo, lo que no resulta evidente de entrada: si bien es cierto que en la resolución de los distintos nudos la beta incompleta considera en muchos casos la hipótesis de asimetría a la izquierda, la valoración de las ramas originales supone ya una penalización previa de todas las cifras con las que se trabaja posteriormente. Debe tenerse en cuenta, además, que el nivel de exigencia de partida es menor en la aproximación que acepta la normalidad del VAN: el valor utilizado para el parámetro de penalización "t" es 1 (garantía exigida del 84% de que el VAN sea mayor o igual que el VAP calculado), mientras que la formulación basada en la distribución beta incompleta que hemos utilizado asume un valor de t=1,5 (garantía del 93,3%).

- No parece que la propuesta de trabajar con los valores "de final de rama" suponga una distorsión en lo que se refiere a la resolución del árbol: el planteamiento respeta adecuadamente el principio de variabilidad a la decisión, si bien parece aconsejable, en el caso de que deba considerarse la aversión al riesgo del decisor, "recuperar" la variabilidad asociada a los nudos aleatorios siempre que se resuelva un nudo decisorio, al menos como planteamiento complementario.

- La conclusión fundamental, probablemente, sea la de que no hay una "solución única y objetiva" del caso: cuando nos enfrentamos al riesgo, no existe una única forma de considerar el concepto de aversión al riesgo, por lo que la obtención de resultados diferentes no resta, en nuestra opinión, valor a la reflexión. Es imposible eliminar al 100% la subjetividad en el análisis del riesgo y, en general, en cualquier proceso de valoración que implica la estimación de lo que está por venir.

4. CONCLUSIONES

Los árboles de decisión constituyen una herramienta extraordinariamente útil a la hora de estudiar el interés de propuestas de inversión en ambientes reales de riesgo. Entre otras cosas, la técnica obliga a realizar una profunda reflexión relativa al comportamiento del proyecto a analizar, ya que exige presentar el entramado de posibles apariciones del azar y las decisiones que pueden adoptarse en cada caso. El Valor Actualizado Penalizado es un criterio de decisión que puede ser útil en la resolución de los árboles de decisión, ayudando a valorar los nudos aleatorios cuando no pueda justificarse la hipótesis de indiferencia al riesgo.

En este artículo se aplican de manera conjunta los dos instrumentos apuntados en la resolución de un caso práctico real. También se realiza una reflexión sobre un concepto fundamental como es el de "variabilidad a la decisión" para proponer un método simplificado de resolución.

La robustez del modelo se comprueba resolviendo el caso por varios caminos diferentes. Se constata que las conclusiones son coherentes en las distintas formas de considerar el riesgo, aunque los valores obtenidos no siempre sean idénticos; en este sentido, el decisor debe ser

consciente de que es imposible eliminar al 100% la subjetividad en el análisis de decisiones arriesgadas, resultando de la máxima importancia realizar siempre el adecuado análisis de robustez y sensitividad de los resultados obtenidos.

BIBLIOGRAFÍA

BAUMOL, W.J. (1963): "An expected gain-confidence limit criterion for portfolio selection", *Management science*, Octubre, págs. 174-182.

BREALEY, R.A., S.C. MYERS y F. ALLEN (2007): *Principles or corporate finance*, McGraw–Hill, New York, 9ª ed.

BUSSE, J.A. and P.J. IRVINE (2006): "Bayesian Alphas and Mutual Fund Persistence", *The Journal of Finance*, Vol. LXI, no. 5, October, pp. 2251-2288.

FAMA, E.F. (1968): "Risk, return and equilibrium –some clarifying comments", *Journal of finance*, Marzo, nº 23, págs. 29-40.

FAMA, E.F. (1976): *Foundations of finance*, Basic Books, Nueva York.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1984): "Algunos modelos básicos para la selección de inversiones con flujos relacionados", *XIV Congreso de la SEIO*, Caja de Ahorros de Granada, Granada, vol. 1, págs. 40-51.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1986a): *Las decisiones financieras en la práctica*, Desclée de Brouwer, Bilbao.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1986b): "Penalización de las decisiones de inversión en función del riesgo", *2º Congreso de economía y economistas de España*, Bilbao.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1987): "Criterios de selección de inversiones con riesgo", *Boletín de estudios económicos*, Agosto, págs. 287-321.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1988): "Decisioni di investimento con rischio", *L'Industria*, Octubre - Diciembre, págs. 637-647.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1989): *Dirección Financiera*, Desclée de Brouwer, Bilbao.

GÓMEZ-BEZARES, F. (1993): "Penalized present value: net present value penalization with normal and beta distributions", en Aggarwal, R., ed., *Capital budgeting under uncertainty*, Prentice - Hall, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, págs. 91-102.

GÓMEZ-BEZARES, F. (2012): *Elementos de finanzas corporativas*, Desclée de Brouwer, Bilbao.

GÓMEZ-BEZARES, F. y F.R. GÓMEZ-BEZARES (2012): "Classic performance indexes revisited: axiomatic and applications", *Applied Economics Letters*, 19, págs. 467-470.

GÓMEZ-BEZARES, F. y F.R. GÓMEZ-BEZARES (2013): "An analysis of risk treatment in the field of finance", en C.-F. LEE y A.C. LEE (editores): *Encyclopedia of finance*, 2ª ed., Springer, New York, págs. 705-711.

GÓMEZ-BEZARES, F. y F.R. GÓMEZ-BEZARES (2015): "Don't use quotients to calculate performance", *Cogent Economics & Finance*, 3: 1065584, vol. 3, nº 1, págs. 1-14.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBAÑEZ (1994): *Valoración de acciones en la bolsa española (un análisis de la relación entre la rentabilidad y el riesgo)*, Desclée de Brouwer, Bilbao.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2001): "La decisión de inversión en entornos de riesgo", *Estudios Empresariales*, 107, Tercer cuatrimestre, págs. 22-37.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2003): "Medidas de performance: algunos índices clásicos y relación de la TRIP con la Teoría de cartera", *Análisis Financiero Internacional*, 113, Tercer trimestre, págs. 5-19.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2004): "Performance ajustada al riesgo: índices clásicos y nuevas medidas", *Análisis Financiero*, 93, Primer Cuatrimestre, págs. 6-16.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA y J. SANTIBÁÑEZ (2020): "Árboles de decisión y VAN penalizado (Una alternativa a la valoración por opciones reales)", *Revista Española de Capital Riesgo*, nº 3/2020, págs. 5-16.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA, J. SANTIBÁÑEZ y A. APRAIZ (2007a): "Índices de performance, gestión activa y eficiencia. Un análisis empírico", *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*, vol. 16, nº 2, págs. 21-40.

GÓMEZ-BEZARES, F., J.A. MADARIAGA, J. SANTIBÁÑEZ y A. APRAIZ (2007b): "Índices de performance, gestión activa y eficiencia. Un análisis de sensitividad y del fenómeno de la persistencia", *Ekonomiaz*, nº 66, 3er Cuatrimestre, págs. 220-245.

JENSEN, M.C. (1968): "The performance of mutual funds in the period 1945-1964", *Journal of finance*, Mayo, págs. 389-416.

JENSEN, M.C. (1969): "Risk, the pricing of capital assets, and the evaluation of investment portfolios", *Journal of business*, Abril, págs. 167-247.

KOSOWSKI, R., A. TIMMERMANN, R. WERMERS and H. WHITE (2006): "Can Mutual Fund 'Stars' Really Pick Stocks? New Evidence from a Bootstrap Analysis", *The Journal of Finance*, Vol. LXI, no. 6, December, pp. 2551-2595.

LAKA, J.P. y J. SANTIBÁÑEZ (1995): "Algunas reflexiones sobre el Valor Actualizado Penalizado (VAP)", presentada en el *III Foro de Finanzas*, Universidad Comercial de Deusto, Bilbao, Noviembre-Diciembre. Publicada en Gómez-Bezares, F. y J.V. Ugarte, ed., *III Foro de Finanzas (1995)*, Bilbao, págs. 75-91.

LINTNER, J. (1965): "The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets", *Review of economics and statistics*, Febrero, vol. 47, nº 1, págs. 13-37.

MAGEE, J.F. (1964): "Decision trees for decision making", *Harvard business review*, julio-agosto, págs. 126-138.

MALKIEL, B.G. (1995): "Returns from Investing in Equity Mutual Funds 1971 to 1991", *The Journal of Finance*, Vol. L, no. 2, June, pp. 549-572.

MARKOWITZ, H. (1952): "Portfolio selection", *Journal of finance*, Marzo, págs. 77-91.

MARKOWITZ, H. (1959): *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*, Wiley, Nueva York.

MILLER, M.H. (1977): "Debt and Taxes", *Journal of finance*, 32, May, pp. 266–268.

MODIGLIANI, L. (1997): "Don't Pick Your Managers By Their Alphas", *U.S. Investment Research, U.S Strategy*, Morgan Stanley Dean Witter, June.

MODIGLIANI, F. and M.H. MILLER (1958): "The cost of capital, corporation finance and the theory of investment", *American economic review*, 48, June, pp. 261–297.

MODIGLIANI, F. and M.H. MILLER (1963): "Corporate income taxes and the cost of capital: A correction", *American economic review*, 53, June, pp. 433–443.

MODIGLIANI, F. and L. MODIGLIANI (1997): "Risk-Adjusted Performance", *Journal of Portfolio Management*, vol. 23, no. 2, Winter, pp. 45-54.

MURALIDHAR, A. (2000): "Risk-Adjusted Performance: The Correlation Correction", *Financial Analysts Journal*, vol. 56, no. 5, September/October, pp. 63-71.

MURALIDHAR, A. (2001): "Optimal Risk-Adjusted Portfolios with Multiple Managers", *Journal of Portfolio Management*, vol 27, no. 3, Spring, pp. 97-104.

PLAN GENERAL DE CONTABILIDAD (2007), *Boletín Oficial del Estado de 20 de noviembre*, Suplemento del número 278.

SANTIBAÑEZ, J. (1994): *Valoración de acciones en la bolsa española (1959-1988)*, Tesis doctoral, Universidad Comercial de Deusto, Bilbao.

SANTIBÁÑEZ, J. (1995): "El tratamiento del riesgo en la decisión de inversión: VAP y distribuciones no conocidas", *Boletín de Estudios Económicos*, 154, Abril, págs. 119-140.

SANTIBÁÑEZ, J. (2018): "Coste de los fondos aplicable a proyectos de inversión: una aproximación a través del VAP", *Boletín de Estudios Económicos*, 223, Abril, págs. 133-159.

SANTIBÁÑEZ, J., L. GOITIA-BERRIOZABAL y J.A. MADARIAGA (2020): "Estructura financiera y creación de valor: una aproximación a través de la TRIP", *Boletín de Estudios Económicos*, nº 229, Abril, págs. 143-170.

SANTIBÁÑEZ, J. y F. GÓMEZ-BEZARES (2014): *Nuevos casos prácticos de Inversión y Financiación*, Desclée de Brouwer, Bilbao, 3ª ed.

SANTIBÁÑEZ, J., F. GÓMEZ-BEZARES y J.A. MADARIAGA (2019): "Valor Actualizado Penalizado: penalización lineal por tramos", *Boletín de Estudios Económicos*, 226, Abril, págs. 191-221.

SHARPE, W.F. (1964): "Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk", *Journal of finance*, Septiembre, vol. 19, nº 3, págs. 425-442.

SHARPE, W.F. (1966): "Mutual fund performance", *Journal of business*, Enero, págs. 119-138.

SHARPE, W.F. (1970): *Portfolio theory and capital markets*, McGraw–Hill, Nueva York.

TREYNOR, J.L. (1965): "How to rate management of investment funds", *Harvard business review*, Enero-Febrero, págs. 63-75.

APÉNDICE EXPLICATIVO DE LOS VALORES DE LAS FIGURAS 9, 10 y 11

En el cálculo del valor de las ramas se utiliza la fórmula 2 (distribución simétrica).

RAMA 2 (Intentar y no vender M):

$[-4.000 \cdot 1,2] \cdot 0,75 + [-4.000 \cdot 0,8] \cdot 0,25 = -4.400$

RAMA 3 (Intentar y vender M y Abandonar):

$[-4.000 \cdot 1,2 + 5.000 \cdot 0,9] \cdot 0,75 + [-4.000 \cdot 0,8 + 5.000] \cdot 0,25 = 225$

RAMA 4 (Intentar y vender M, Intentar y no vender E):

$[(-4.000-1.000) \cdot 1,2 + 5.000 \cdot 0,9] \cdot 0,75 + [(-4.000-1.000) \cdot 0,8 + 5.000] \cdot 0,25 = -875$

RAMA 5 (Intentar y vender M, Intentar y vender E y Abandonar):

$[(-4.000-1.000) \cdot 1,2 + (5.000+10.000) \cdot 0,9] \cdot 0,75 + [(-4.000-1.000) \cdot 0,8 + (5.000+10.000)] \cdot 0,25 = 8.375$

RAMA 6 (Intentar y vender M, Intentar y vender E, Intentar y no vender A):

$[(-4.000-1.000-2.000) \cdot 1,2 + (5.000+10.000) \cdot 0,9] \cdot 0,75 + [(-4.000-1.000-2.000) \cdot 0,8 + (5.000+10.000)] \cdot 0,25 = 6.175$

RAMA 7 (Intentar y vender M, Intentar y vender E, Intentar y vender A):

$[(-4.000-1.000-2.000) \cdot 1,2 + (5.000+10.000+20.000) \cdot 0,9] \cdot 0,75 + [(-4.000-1.000-2.000) \cdot 0,8 + (5.000+10.000+20.000)] \cdot 0,25 = 24.675$

RAMA 8 (Intentar y vender M, Intentar y no vender A):

$[(-4.000-2.000) \cdot 1,2 + 5.000 \cdot 0,9] \cdot 0,75 + [(-4.000-2.000) \cdot 0,8 + 5.000] \cdot 0,25 = -1.975$

RAMA 9 (Intentar y vender M, Intentar y vender A y Abandonar):

$[(-4.000-2.000) \cdot 1,2 + (5.000+20.000) \cdot 0,9] \cdot 0,75 + [(-4.000-2.000) \cdot 0,8 + (5.000+20.000)] \cdot 0,25 = 16.525$

RAMA 10 (Intentar y vender M, Intentar y vender A, Intentar y no vender E):

$[(-4.000-2.000-1.000) \cdot 1,2 + (5.000+20.000) \cdot 0,9] \cdot 0,75 + [(-4.000-2.000-1.000) \cdot 0,8 + (5.000+20.000)] \cdot 0,25 = 15.425$

RAMA 11 (Intentar y vender M, Intentar y vender A, Intentar y vender E):

$[(-4.000-2.000-1.000) \cdot 1,2 + (5.000+20.000+10.000) \cdot 0,9] \cdot 0,75 + [(-4.000-2.000-1.000) \cdot 0,8 + (5.000+20.000+10.000)] \cdot 0,25 = 24.675$

FIGURA 9

En el cálculo del valor de los nudos aleatorios se utiliza la fórmula 4 (asimetría a la izquierda) para las propiedades de Medina (70%-30%) y Espinosa (60%-40%); y la fórmula 2 (distribución simétrica) para la propiedad de Arceniega (50%-50%).

NUDO 6:

$0{,}75 \cdot 6.175 + 0{,}25 \cdot 24.675 = 10.800$

NUDO 5:

$10.800 > 8.375$

NUDO 4:

$0{,}55 \cdot (-875) + 0{,}45 \cdot 10.800 = 4.379$

NUDO 9:

$0{,}55 \cdot 15.425 + 0{,}45 \cdot 24.675 = 19.588$

NUDO 8:

$19.588 > 16.525$

NUDO 7:

$0{,}75 \cdot (-1.975) + 0{,}25 \cdot 19.588 = 3.416$

NUDO 3:

$4.379 > 3.416 > 225$

NUDO 2:

$0{,}55 \cdot (-4.400) + 0{,}45 \cdot 4.379 = -450$

FIGURA 10

Aquí se utiliza la fórmula 3 (asimetría a la derecha), ya que los valores pesimistas son más probables que los optimistas.

NUDO 4:

$0{,}95 \cdot (-875) + 0{,}05 \cdot 24.675 = 403$

NUDO 7:

$0{,}95 \cdot (-1.975) + 0{,}05 \cdot 24.675 = -643$

NUDO 3:

403 > 225 > -643

FIGURA 11

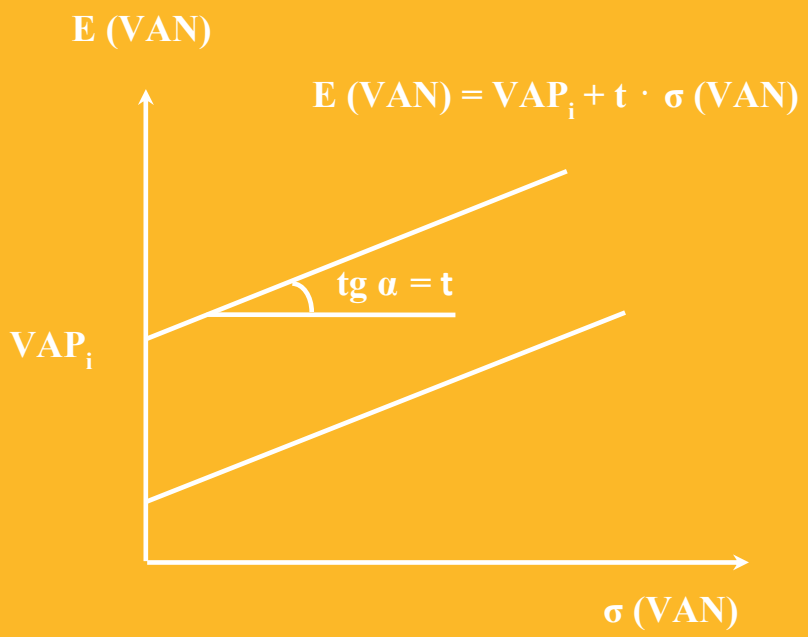
Aquí se utiliza de nuevo la fórmula 3 (asimetría a la derecha), ya que los valores pesimistas son más probables que los optimistas.

NUDO 2:

0,95 · (-4.400) + 0,05 · 24.675 = -2.946

Frente a los criterios clásicos de tratamiento del riesgo, el Ajuste del tipo de descuento (que penaliza el interés de los proyectos en ambiente de riesgo a través del denominador del VAN) y el Equivalente de certeza (que propone penalizar los flujos esperados convirtiéndolos en los «equivalentes ciertos») en este libro defendemos la posibilidad de penalizar directamente el VAN esperado con su riesgo. De entre las múltiples formas de hacerlo, la penalización lineal presenta claras ventajas frente a otras formas de penalización, tanto en lo relativo a la estimación de los parámetros que es necesario determinar para utilizarlo, como en lo que se refiere a la interpretación del resultado obtenido. Y es fácil generalizar la idea a la otra medida clásica del interés de los proyectos de inversión, la Tasa de Rentabilidad Interna.

En este libro, el lector interesado encontrará diecinueve artículos relacionados con el tema publicados en revistas especializadas a lo largo de los últimos cuarenta años.



Deusto
Publicaciones
Universidad de Deusto